Санкт-Петербургский
государственный
университет

ФИЗИКА

Школьные олимпиады СПбГУ

2019

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ШКОЛЬНЫЕ ОЛИМПИАДЫ СПбГУ 2019

Физика

Учебно-методическое пособие

ИЗДАТЕЛЬСТВО САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

УДК 53
ББК 22.3
Ш673

Авторы: Е. А. Денисов, А. С. Жуков,
Е. А. Злобина, М. В. Компаниец, Т. Н. Компаниец,
Д. А. Носова, Ф. А. Смирнов

Ш673 **Школьные олимпиады СПбГУ 2019. Физика**: учеб.-метод. пособие / под ред. А. С. Жукова. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2019. — 194 с.

ISBN 978-5-288-05969-8

В пособии представлены примеры заданий отборочного и заключительного этапов Олимпиады СПбГУ по физике для учащихся 7–11 классов за 2018/2019 учебный год. Все задачи сопровождаются подробными решениями.

Издание предназначено для подготовки к участию в Олимпиадах школьников СПбГУ.

УДК 53
ББК 22.3

ISBN 978-5-288-05969-8

Содержание

ИСТОРИЯ ОЛИМПИАДЫ

Впервые олимпиада СПбГУ по физике проводилась в 1985 году. Инициатором проведения такой олимпиады и главным разработчиком ее принципов был профессор отдела теоретической физики Анатолий Георгиевич Изергин. С 1990 г. курировал проведение олимпиады профессор Сергей Николаевич Манида. Под его руководством олимпиада претерпела реструктуризацию и стала проводиться в два тура: заочный и очный.

В этот же период была расширена и география проведения олимпиады. Были организованы ежегодные выезды в города Севастополь и Саров с целью проведения олимпиады по физике для учащихся 10–11 классов. При поддержке СПбГУ сотрудники и преподаватели Университета проводили выездные олимпиады школьников в Кирове, Мурманске, Апатитах, Пскове. С 1997 года появились контакты, а затем были подписаны договоры о сотрудничестве с учебными заведениями г. Ангарска продолжающиеся и по сей день. В рамках олимпиады совершались поездки по различным городам России, охватывавшие территорию страны от Калининграда до Южно-Сахалинска.

Согласно приказу минобрнауки РФ «Об утверждении перечня олимпиад школьников и их уровней на 2018/19 учебный год», олимпиада школьников Санкт-Петербургского государственного университета по профилю «физика» относится к олимпиадам III уровня. На основании пункта 42 Порядка приема на обучение по образовательным программам высшего образования — программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденным Приказом Минобрнауки от 14.10.2015 № 1147, особые права (прием без вступительных испытаний; получение 100 баллов по вступительному испытанию) предоставляются победителям и призерам олимпиад школьников при наличии у них результатов ЕГЭ не ниже 75 баллов.

Таким образом, в 2019 году при поступлении на нижеперечисленные направления подготовки в СПбГУ победителям и призерам олимпиады СПбГУ по физике предоставляется особое право поступления без вступительных испытаний при наличии у них не ниже 75 баллов по результатам ЕГЭ по физике:

- 03.03.01 Прикладная математика и физика
- 03.03.02 Физика
- 03.03.03 Радиофизика
- 05.03.01 Геология

Подробную информацию об олимпиаде и сроках ее проведения можно найти на сайте: http://olympiada.spbu.ru/

ПРЕДИСЛОВИЕ

Степень освоения курса физики, прежде всего, определяется умением применять полученные знания для решения задач. Именно решение задач создает представление о характерных особенностях законов физики и границах их применения. В основу любой задачи по физике положен какой-либо частный случай проявления общих законов природы.

Несмотря на то, что данный сборник предназначен, главным образом, для школьников, углубленно изучающих физику, он может быть полезен и для учащихся, углубленно изучающих другие естественные науки. Физика является одним из немногих предметов, развивающих и вербальные, и математические способности. Основная задача при изучении курса физики состоит в том, чтобы не просто запомнить и выучить фактический материал, а осмыслить его и научиться применять знания для решения сначала простых, а затем и более сложных задач. Изучая физику, легко научиться анализу проблем, умению выделять важные и несущественные моменты, что необходимо для работы в любой отрасли науки.

Учащиеся 9–11 классов ежегодно приезжают в Университет с целью более полно познакомиться с работой кафедр и иных научных и учебных подразделений. В настоящее время в СПбГУ созданы две лаборатории для школьников (на Васильевском острове и в Старом Петергофе), в которых проводятся занятия с учащимися старших классов. Эти занятия способствуют более глубокому освоению школьного курса физики, а также развивают экспериментальные навыки, необходимые как в период обучения в университете, так и в последующей работе по специальности.

Ждем вас в наших лабораториях и на олимпиаде!

СТРУКТУРА ЗАДАНИЙ И КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ

В 2018–2019 году участникам заочного (отборочного) тура предлагались задания для пяти параллелей: 7, 8, 9, 10 и 11 классы. Варианты отборочного тура олимпиады состояли из восьми заданий и имели одинаковую структуру для всех классов.

Задания 1–6 представляли из себя расчетные задачи низкой и средней сложности с проверкой ответа. Правильный ответ оценивался в 10 баллов.

Задания 7–8 — более сложные расчетные задачи, в которых проверялся не только ответ, но и решение. Оценка за решение задач 7 и 8 была от 0 до 20 баллов в зависимости от правильности, обоснованности и полноты приведенного решения.

Максимально возможная оценка работы отборочного этапа — 100 баллов. На выполнение заданий отборочного тура отводилось 3 часа.

Победителями отборочного тура олимпиады признавались участники, набравшие 90 баллов и более. Призерами — 40 баллов и более. Победители и призёры приглашались к участию в заключительном этапе.

В 2018–2019 году заключительный (очный) тур олимпиады проходил в трех параллелях: 7 класс, 8–9 класс и 10–11 класс. Каждый вариант состоял из пяти заданий разной сложности. Полный балл выставлялся за полностью обоснованное решение, имеющее правильный численный ответ. Однако достаточно высокий балл можно было получить и за не полностью решенную задачу, поскольку оценивался каждый правильный шаг в решении. Каждое задание оценивалось от 0 до 20 баллов в зависимости от правильности, обоснованности и полноты приведенного решения. Таким образом, максимально возможная оценка работы заключительного тура — 100 баллов. Продолжительность заключительного тура 3 часа 50 минут.

Победителями заключительного этапа олимпиады СПбГУ по физике признавались участники, набравшие от 65 до 100 баллов. Призерами признавались участники, набравшие 40 баллов и более.

Отборочный тур

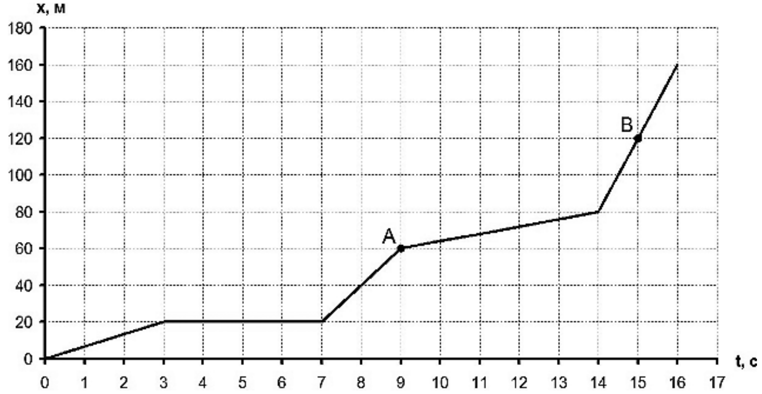
ЗАДАЧИ ДЛЯ 7 КЛАССА

Вариант 7.1

7.1.1. Бегун пробегает дистанцию 100 м за 15 с. Выразите скорость бегуна в см/мин.

7.1.2. Первые 50 км пути автомобиль проехал со средней скоростью 50 км/ч, следующие 20 км пути — со средней скоростью 40 км/ч, последние 45 км — со средней скоростью 30 км/ч. Определите среднюю скорость автомобиля на всем пути. Ответ приведите в км/ч, округлив до первого знака после запятой.

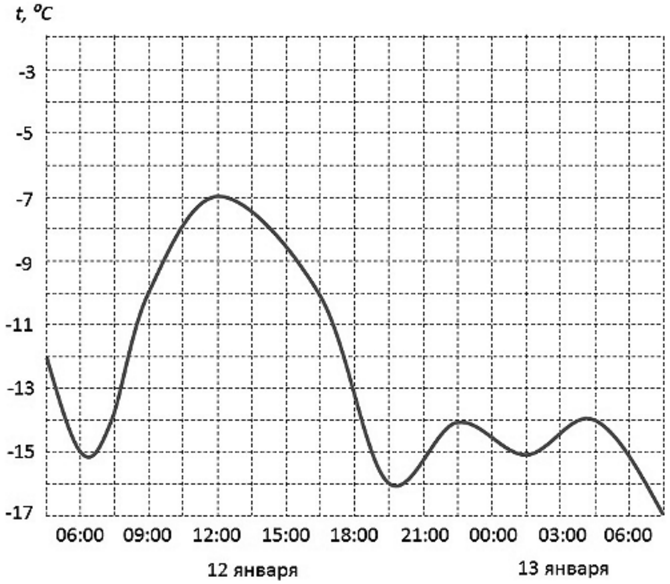
7.1.3. Представлен график зависимости пройденного телом расстояния от времени. Найдите среднюю скорость тела на участке AB. Ответ дайте в м/с.



7.1.4. Направляясь к остановке, Сережа заметил, что на расстоянии 450 метров позади него идет автобус. Чтобы не опоздать, он побежал и через 30 с прибежал на остановку одновременно с автобусом. С какой скоростью пришлось бежать Сереже, если известно, что автобус движется со скоростью 68.4 км/ч? Ответ выразите в м/с.

7.1.5. Двигаясь прямолинейно, велосипедист прошел путь между точками А и В. Одинаковые ли пути пройдены при этом передним и задним колесами велосипеда? Варианты ответов: 1 — да; 2 — нет. В поле для ответа укажите цифру, соответствующую Вашему ответу.

7.1.6. На рисунке показано изменение температуры воздуха. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку, какова была максимальная температура воздуха а промежутке времени от 00:00 до 06:00 13 января? Ответ укажите в градусах Цельсия.



7.1.7. Кот Матроскин решил подготовиться к колонизации Марса, но обнаружил, что в меню космической еды в тюбиках отсутствуют бутерброды с колбасой. Поэтому он решил разработать свою рецептуру: смешивать с помощью блендера колбасу, хлеб и сливочное масло для дальнейшей расфасовки получившейся пасты в тюбики. Известно, что объем тюбика $V = 100$ мл, а идеальные вкусовые качества получаются при смешивании колбасы, хлеба и масла, когда их массы относятся в пропорции 5:3:1. Рассчитайте окончательную массу космического бутерброда вместе с упаковкой, если масса пустого тюбика $m_0 = 30$ г, а плотности колбасы, хлеба и масла равны соответственно $\rho_1 = 450$ кг/м^3, $\rho_2 = 700$ кг/м^3 и $\rho_3 = 900$ кг/м^3. Ответ приведите в граммах и округлите до первого знака после запятой.

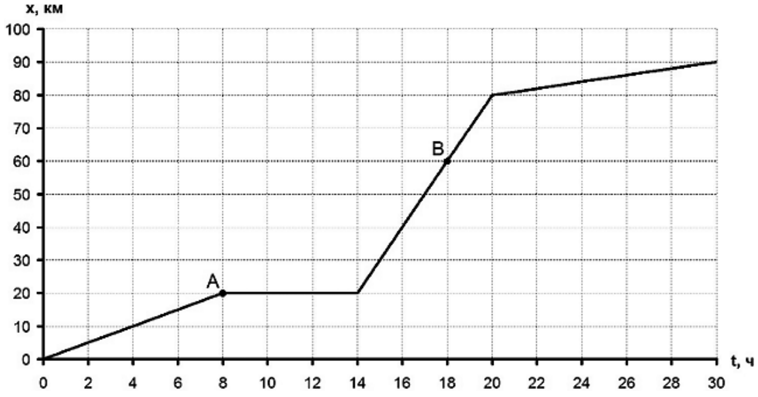
7.1.8. На тело вдоль одной прямой действуют силы, две из которых равны 3 Н и 4 Н. Может ли равнодействующая сил, действующих на данное тело, равняться 2 Н? Если не может, то почему? Если может, то в каком случае? Сделайте рисунок к задаче.

Вариант 7.2

7.2.1. Уровень воды в сосуде опускается на 1 см каждые 6 секунд. Считая сосуд достаточно вместительным, определите, на сколько метров опустится уровень воды в этом же сосуде за четверть часа при таких же условиях.

7.2.2. Найти среднюю скорость самолета, если известно, что первую треть пути он летел со скоростью 150 м/с, вторую треть — со скоростью 100 м/с, а последнюю часть пути — со скоростью, вдвое большей средней скорости на первых двух участках пути. Ответ приведите в м/с.

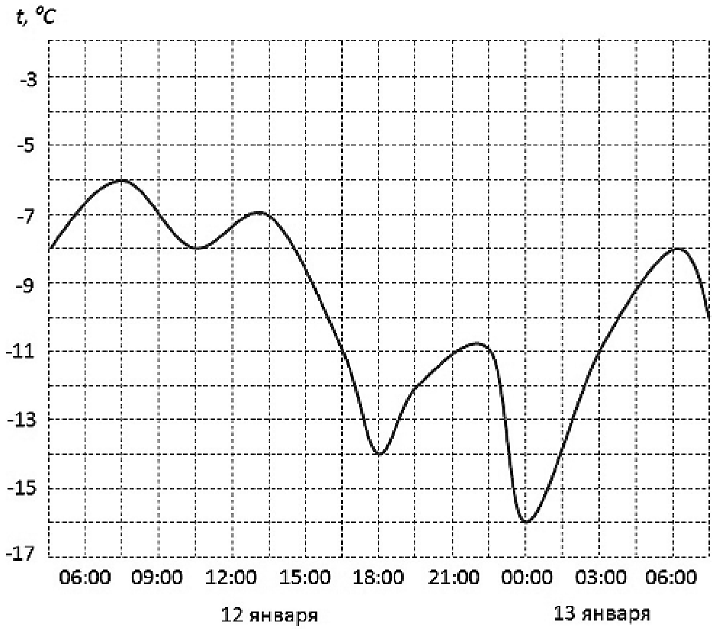
7.2.3. Представлен график зависимости пройденного телом расстояния от времени. Найдите среднюю скорость тела на участке АВ. Ответ дайте в км/ч.



7.2.4. Вася заметил идущий на остановку автобус в 540 м позади себя. Чтобы не опоздать, он побежал и через 30 с прибежал на остановку одновременно с автобусом. С какой скоростью пришлось бежать Васе, если известно, что автобус движется со скоростью 79.2 км/ч? Ответ выразите в м/с.

7.2.5. Минутная стрелка часов за один час совершает полный оборот. Какой путь проходит при этом конец стрелки длиной 5 см? Ответ укажите в см, округлив его до первого знака после запятой.

7.2.6. На рисунке показано изменение температуры воздуха. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку, какова была минимальная температура воздуха в промежутке времени от 06:00 до 12:00 12 января? Ответ укажите в градусах Цельсия.



7.2.7. Кот Матроскин решил подготовиться к колонизации Марса, но обнаружил, что в меню космической еды в тюбиках отсутствуют бутерброды с колбасой. Поэтому он решил разработать свою рецептуру: смешивать с помощью блендера колбасу, хлеб и сливочное масло для дальнейшей расфасовки получившейся пасты в тюбики. Идеальные вкусовые качества получаются при смешивании колбасы, хлеба и масла, когда их массы относятся в пропорции 4:3:1. Рассчитайте объем тюбика, если известно, что масса пустого тюбика $m_0 = 20$ гр, масса космического бутерброда вместе с упаковкой $m = 80$ гр, а плотности колбасы, хлеба и масла равны соответственно $\rho_1 = 450$ кг/м^3, $\rho_2 = 700$ кг/м^3 и $\rho_3 = 900$ кг/м^3. Ответ приведите в миллилитрах и округлите до первого знака после запятой.

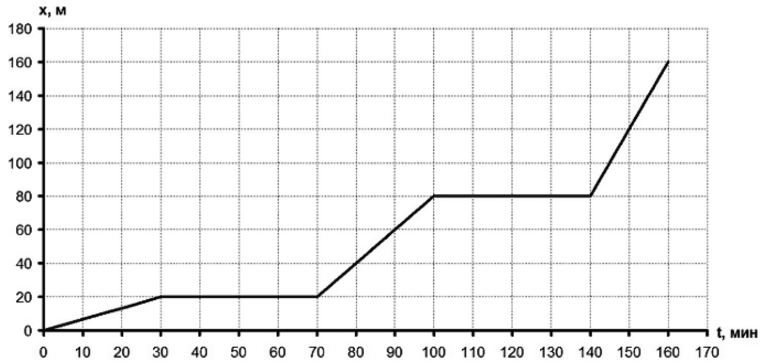
7.2.8. На тело вдоль одной прямой действуют силы, две из которых равны 3 Н и 4 Н. Может ли равнодействующая сил, действующих на данное тело, равняться 8 Н? В каком случае? Сделайте рисунок к задаче.

Вариант 7.3

7.3.1. Земля совершает один оборот вокруг Солнца за 1 год. Считайте, что в году 365 суток. Выразите это время в часах.

7.3.2. Половину тропинки зайчик пробежал со скоростью 15 км/ч. Далее половину оставшегося времени движения он бежал со скоростью 6 км/ч, а затем до конца пути крался, прячась от волка, со скоростью 4 км/ч. Определить среднюю скорость зайчика на всем пути в км/ч.

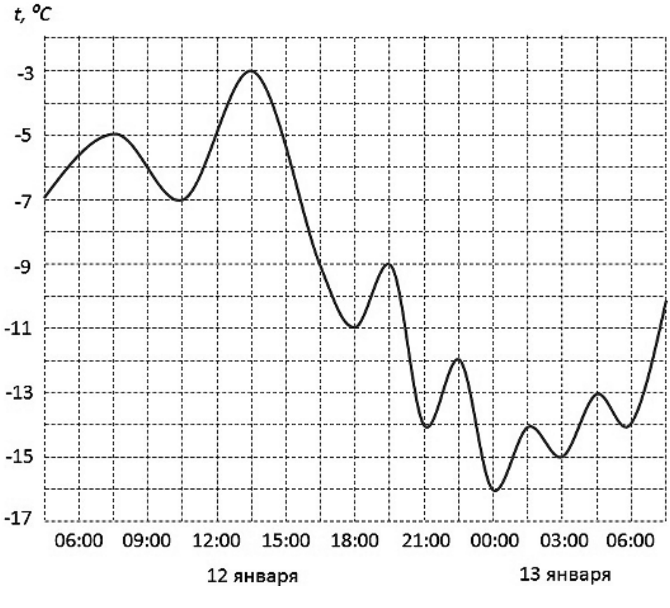
7.3.3. На рисунке представлен график зависимости пройденного телом расстояния от времени. Сколько метров тело прошло за второй час?



7.3.4. Костя заметил идущий на остановку автобус в 600 м позади себя. Чтобы не опоздать, он побежал и через 40 с прибежал на остановку одновременно с автобусом. С какой скоростью пришлось бежать Косте, если известно, что автобус движется со скоростью 64.8 км/ч? Ответ выразите в м/с.

7.3.5. Минутная стрелка часов за один час совершает полный оборот. Длина стрелки 10 см. Чему равно линейное перемещение конца стрелки в см?

7.3.6. На рисунке показано изменение температуры воздуха. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку, какова была максимальная температура воздуха в промежутке времени от 09:00 до 18:00 12 января? Ответ укажите в градусах Цельсия.

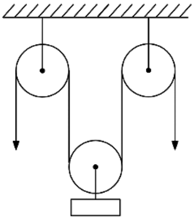


7.3.7. Кот Матроскин решил подготовиться к колонизации Марса, но обнаружил, что в меню космической еды в тюбиках отсутствуют бутерброды с колбасой. Поэтому он решил разработать свою рецептуру: смешивать с помощью блендера колбасу, хлеб и сливочное масло для дальнейшей расфасовки получившейся пасты в тюбики. Известно, что объем тюбика $V = 150$ мл, а идеальные вкусовые качества получаются при смешивании колбасы, хлеба и масла, когда их массы относятся в пропорции 5:4:1. Рассчитайте окончательную массу космического бутерброда вместе с упаковкой, если масса пустого тюбика $m_0 = 25$ гр, а плотности колбасы, хлеба и масла равны соответственно $\rho_1 = 450$ кг/м^3, $\rho_2 = 700$ кг/м^3 и $\rho_3 = 900$ кг/м^3. Ответ приведите в граммах и округлите до первого знака после запятой.

7.3.8. На тело по одной прямой действуют силы 3; 4; 5 Н. Может ли равнодействующая этих сил быть равной 6 Н? Сделайте рисунок к задаче.

ЗАДАЧИ ДЛЯ 8 КЛАССА

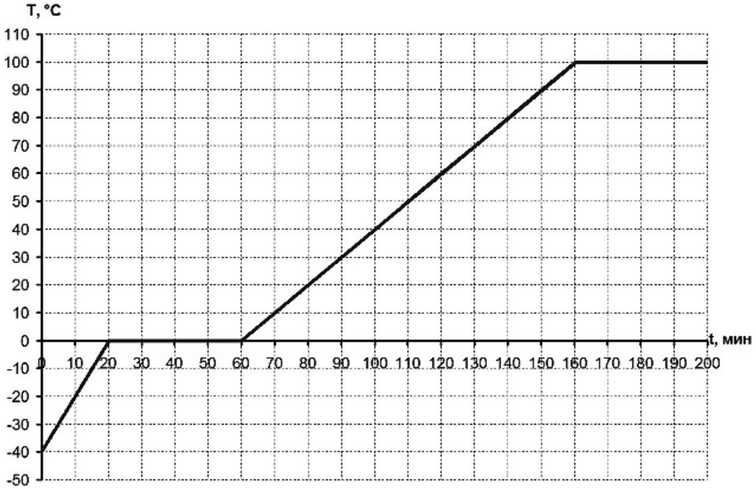
Вариант 8.1



8.1.1. В системе блоков, показанной на рисунке, левый конец нити опустили на 3 см, а правый на 5 см. На сколько сантиметров поднялся груз? Нить считать нерастяжимой, а блоки — идеальными.

8.1.2. Для отопления домов используются дрова, закупаемые по цене 128 рублей за тонну. Сколько рублей должен стоить каменный уголь, чтобы стоимость угольного отопления была такой же? Удельная теплота сгорания угля 29.3 МДж/кг, а дров 15.0 МДж/кг. Ответ округлить до ближайшего целого.

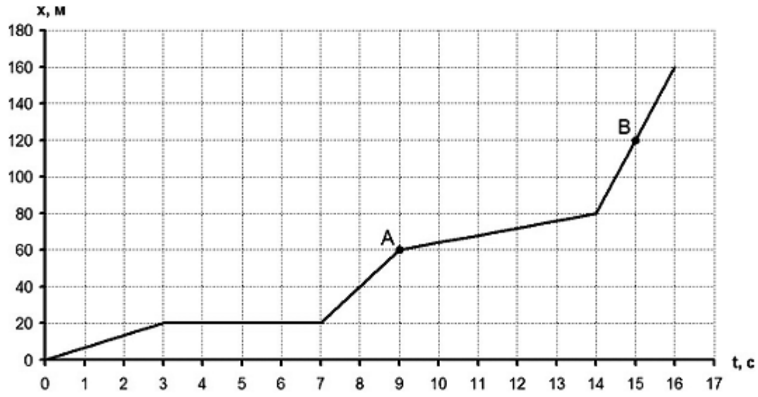
8.1.3. Кастрюлю со льдом поставили на плиту. На графике показана зависимость температуры содержимого кастрюли от времени. Напишите номера верных утверждений в порядке возрастания (без пробелов).



1) Через 60 минут весь лёд растаял.
2) Через 160 минут вся вода выкипела.
3) На 40 минуте в кастрюле не было жидкой воды.

4) На 40 минуте в кастрюле были и лёд, и вода.
5) На 120 минуте вода теплее, чем на 80 минуте.

8.1.4. Представлен график зависимости пройденного телом расстояния от времени. Найдите среднюю скорость тела на участке АВ. Ответ дайте в м/с.



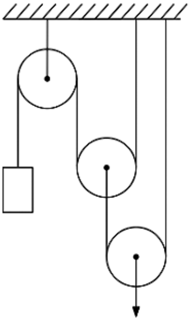
8.1.5. Мотоцикл двигался 12 секунд со скоростью 5 м/с, 10 секунд со скоростью 9 м/с и 8 секунд со скоростью 15 м/с. Какова средняя скорость движения мотоцикла? Ответ дайте в м/с.

8.1.6. Иридиевый ломик объёмом 600 см^3 утопили в ртути. Найти силу Архимеда, действующую на него. Ответ выразить в ньютонах и округлить до целых. Плотность ртути 13.5 г/см^3, плотность иридия 22.6 г/см^3. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

8.1.7. Одна лодка прошла участок реки длиной 20 км за 5 часов, а вторая — за 4 часа. При этом скорость второй лодки в озере в два раза больше, чем первой. Лодки двигались в одном направлении. Какова скорость течения реки?

8.1.8. В кружке вода температуры 20°С. В неё положили кипятильник, и через 10 минут вода закипела. Через какое время после закипания выкипит 10% воды?
Удельная теплота парообразования 2258 кДж/кг. Удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(К·кг). Мощность кипятильника считайте постоянной, теплоёмкостью кипятильника, кружки и теплопотерями пренебречь.

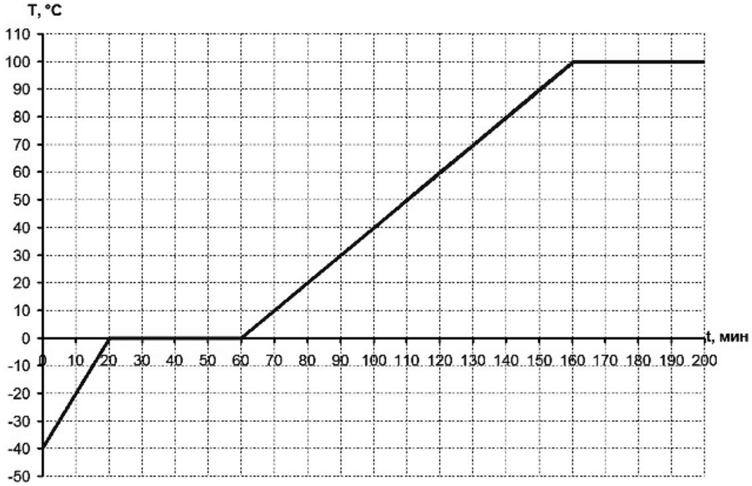
Вариант 8.2



8.2.1. В системе блоков, показанной на рисунке, нижний блок опустился на 3 см. На сколько сантиметров поднялся груз? Нить считать нерастяжимой, а блоки — идеальными.

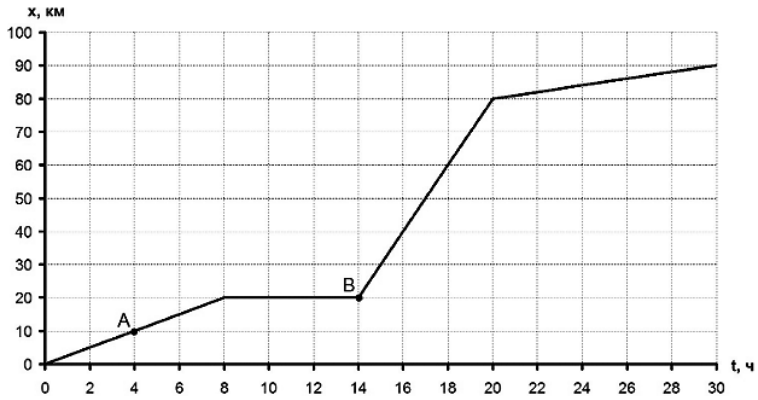
8.2.2. Для отопления дома используются дрова, закупаемые по цене 128 рублей за тонну. На отопление тратится 300 рублей в месяц. Сколько рублей будет тратиться, если отапливать дом углем стоимостью 83 рубля за тонну? Удельная теплота сгорания угля 29.3 МДж/кг, а дров 15.0 МДж/кг. Ответ округлить до ближайшего целого.

8.2.3. Кастрюлю со льдом поставили на плиту. На графике показана зависимость температуры содержимого кастрюли от времени. Напишите номера верных утверждений в порядке возрастания (без пробелов).



1) Через 10 минут в кастрюле была вода в жидком состоянии.
2) Через 160 минут вся вода выкипела.
3) На 40 минуте в кастрюле не было жидкой воды.
4) Первые 20 минут в кастрюле был только лёд.
5) На 40 минуте в кастрюле были и лёд, и вода.

8.2.4. Представлен график зависимости пройденного телом расстояния от времени. Найдите среднюю скорость тела на участке AB. Ответ дайте в км/ч.



8.2.5. Мотоциклист проехал 24 м со скоростью 8 м/с, а затем 26 м со скоростью 13 м/с. Найти среднюю скорость движения мотоциклиста. Ответ дать в м/с.

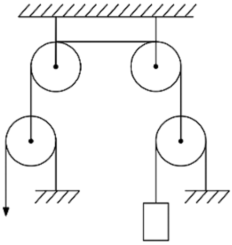
8.2.6. Урановый ломик объёмом 500 см^3 утопили в ртути. Найти силу Архимеда, действующую на него. Ответ выразить в ньютонах и округлить до целых. Плотность ртути 13.5 г/см^3, плотность урана 19.1 г/см^3. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

8.2.7. Одна лодка прошла участок реки длиной 24 км за 6 часов, а вторая — за 4 часа. При этом скорость второй лодки в озере в три раза больше, чем первой. Лодки двигались в одном направлении. Какова скорость течения реки? Ответ дать в км/ч.

8.2.8. Кастрюлю со льдом при температуре 0°C поставили на плиту и стали нагревать. За t секунд лёд растаял и полученная

вода нагрелась до 100°C. Какая часть воды выкипит за следующие $2t$ секунд?
Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг, удельная теплота парообразования 2258 кДж/кг. Удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(К·кг). Мощность плиты считайте постоянной, теплообменом с окружающей средой, испарением и теплоёмкостью кастрюли пренебречь.

Вариант 8.3

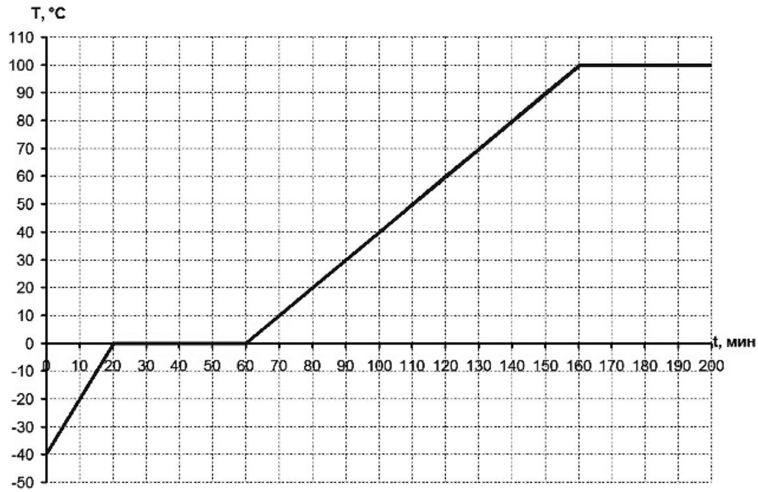


8.3.1. В системе блоков, показанной на рисунке, левый конец нити опустили на 4 см. На сколько сантиметров поднялся груз? Нить считать нерастяжимой, а блоки — идеальными.

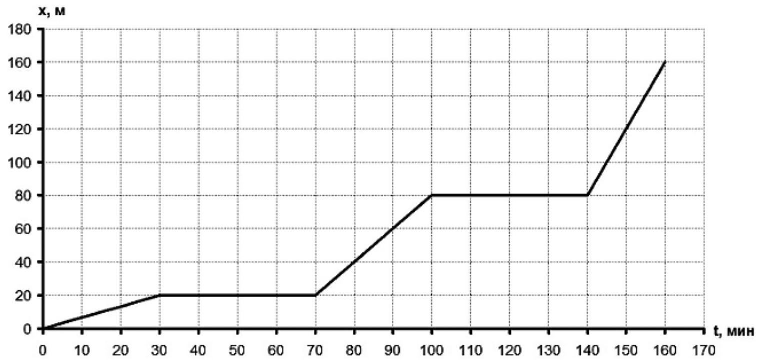
8.3.2. Обычно для отопления дома закупали угля на 100 рублей, но в этот раз угля не было, и купили дрова. На сколько больше рублей при этом заплатили? Дом отапливался так же хорошо. Удельная теплота сгорания угля 29.3 МДж/кг, а дров 15.0 МДж/кг. Уголь стоит 83 рубля за тонну, дрова — 128 рублей за тонну. Ответ округлить до ближайшего целого.

8.3.3. Кастрюлю со льдом поставили на плиту. На графике показана зависимость температуры содержимого кастрюли от времени. Напишите номера верных утверждений в порядке возрастания (без пробелов).

1) На 180 минуте вода кипит.
2) Первые 20 минут в кастрюле был только лёд.
3) На 40 минуте в кастрюле были и лёд, и вода.
4) Через 20 минут весь лёд растаял.
5) На 60 минуте вода теплее, чем на 30 минуте.



8.3.4. Представлен график зависимости пройденного телом расстояния от времени. Сколько метров тело прошло за второй час?



8.3.5. Мотоциклист проехал 50 с со скоростью 20 м/с, и его мотоцикл сломался. Следующие 20 м он прошел за 10 с. Какова средняя скорость мотоциклиста? Ответ дайте в м/с.

8.3.6. Золотой ломик объёмом 450 см^3 утопили в ртути. Найти силу Архимеда, действующую на него. Ответ выразить в ньютонах и округлить до целых. Плотность ртути 13.5 г/см^3, плотность золота 19.3 г/см^3. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

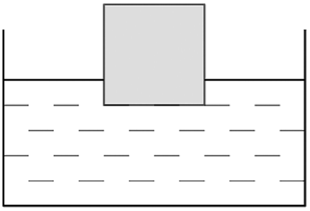
8.3.7. Одна лодка прошла участок реки длиной 30 км за 5 часов, а вторая — за 3 часа. При этом скорость второй лодки в озере в пять раз больше, чем первой. Лодки двигались в одном направлении. Какова скорость течения реки? Ответ дать в км/ч.

8.3.8. Кастрюлю со льдом при 0°C поставили на плиту и стали нагревать. За 10 минут лёд растаял. До какой температуры нагреется полученная вода через 6 минут?
Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг. Удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(К·кг). Мощность плиты считайте постоянной, теплообменом с окружающей средой, испарением и теплоёмкостью кастрюли пренебречь.

ЗАДАЧИ ДЛЯ 9 КЛАССА

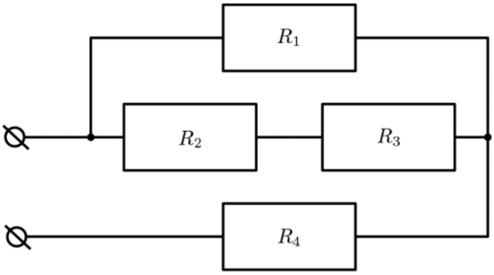
Вариант 9.1

9.1.1. В сосуде с водой плавает кубик из пенопласта. Найти силу Архимеда, действующую на кубик. Плотность пенопласта $\rho_п = 20$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, ребро кубика $l = 5$ см. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ выразить в мН.

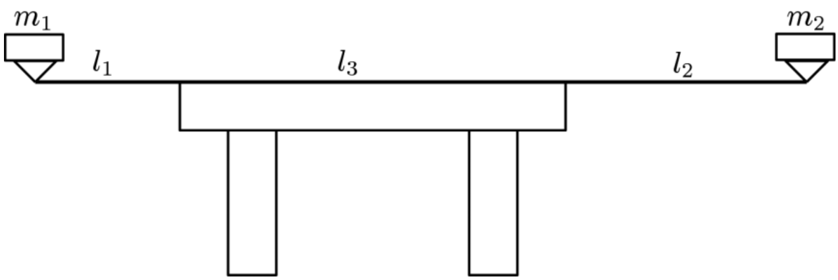


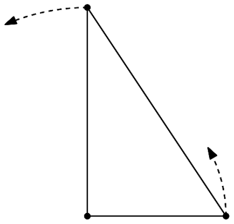
9.1.2. Тело кинули в пропасть вертикально вниз. За первую секунду оно пролетело 7 м. Сколько метров оно пролетит за вторую секунду? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

9.1.3. Сопротивления резисторов в схеме, изображенной на рисунке: $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = R_3 = R_4 = 1$ Ом. Напряжение на клеммах 10 В. Найти мощность, выделяемую на резисторе R_4. Ответ дать в Вт.



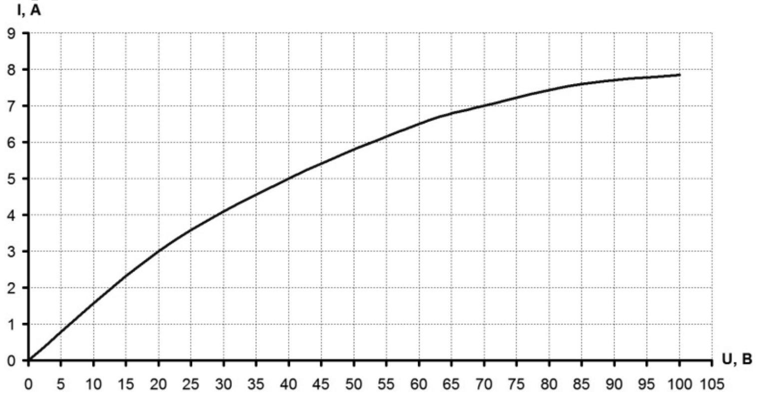
9.1.4. Рычаг с двумя чашами с песком покоится на столе. Масса песка в левой чаше $m_1 = 1$ кг, в правой $m_2 = 2$ кг. Какой максимальной и минимальной длины может быть левое плечо рычага l_1, чтобы равновесия не нарушилось? Ширина стола $l_3 = 70$ см, длина правого плеча $l_2 = 50$ см. Рычаг и чаши невесомы. В качестве ответа записать подряд без пробела сначала максимальное, затем минимальное значение l_1, выраженное в см.





9.1.5. Прямоугольный треугольник, вырезанный из фанеры, крутится вокруг вершины прямого угла в плоскости рисунка. Вершина острого угла при длинном катете движется со скоростью 12 см/с. С какой скоростью (в см/с) движется вершина второго острого угла? Длина гипотенузы 5 см, длина короткого катета 3 см.

9.1.6. Нелинейный элемент электрической цепи — это элемент, сила тока в котором не пропорциональна приложенному напряжению. На рисунке показана вольт-амперная характеристика (зависимость силы тока от напряжения) некоторого нелинейного элемента. Какая мощность выделяется на нем, когда сила тока равна 3 А? Ответ дать в Вт.

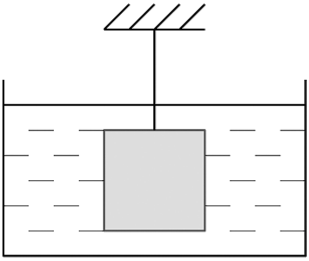


9.1.7. С земли вертикально вверх запустили ракету. Она летела 4 секунды с постоянным ускорением 30 м/с^2, после чего у неё кончилось топливо. Вторую такую же ракету запустили с того же места через 2 секунды после старта первой. На какой высоте ракеты столкнулись? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

9.1.8. На медную проволоку длиной $l = 1$ м и площадью поперечного сечения $S = 6$ мм^2 подали напряжение $U = 12$ В на $t = 1$ мс. На сколько градусов нагрелась проволока? Теплообменом с окружающей средой пренебречь. Удельное сопротивление меди $\rho_c = 0.018$ Ом·мм^2/м, удельная теплоемкость $c = 385$ Дж/(кг·К), плотность $\rho_п = 8900$ кг/м^3.

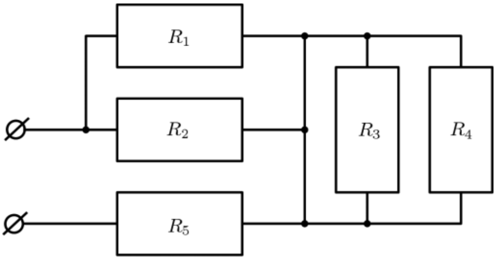
Вариант 9.2

9.2.1. Кубик, полностью погружённый в воду, прикреплён нитью к опоре над водой. Найти силу натяжения нити. Плотность материала кубика $\rho_к = 2700$ кг/м^3, $\rho_в = 1000$ кг/м^3, ребро кубика $l = 10$ см. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ выразить в Н.

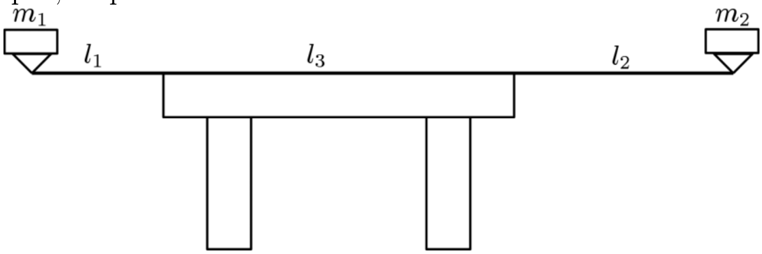


9.2.2. Тело кинули вертикально вниз в глубокую яму. За первые 2 секунды оно пролетело 24 м, а еще через секунду ударилось о дно ямы. Какова глубина ямы? Ответ дайте в метрах. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

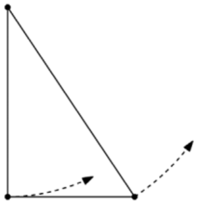
9.2.3. Сопротивления резисторов: $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 7$ Ом, $R_4 = 5$ Ом, $R_5 = 3$ Ом. Напряжение на клеммах 10 В. Найти мощность, выделяемую на резисторе R_5. Ответ дать в Вт.



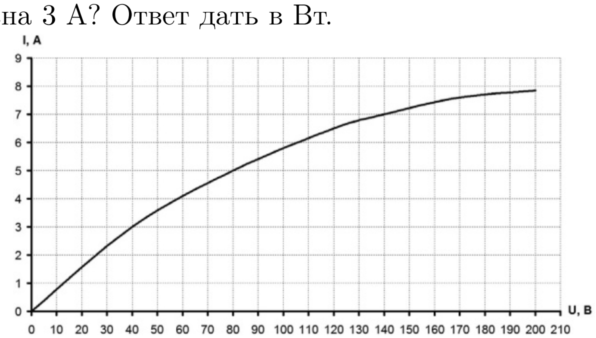
9.2.4. Рычаг с двумя чашами с песком покоится на столе. Масса песка в левой чаше $m_1 = 1$ кг, в правой $m_2 = 2$ кг. Какое максимальное количество песка можно, не нарушая равновесия, досыпать в левую чашу? В правую чашу? Ширина стола $l_3 = 70$ см, длина левого плеча $l_1 = 40$ см, длина правого плеча $l_2 = 50$ см. Рычаг и чаши невесомы. В качестве ответа записать подряд без пробела сначала ответ на первый, затем на второй вопрос, в граммах.



9.2.5. Прямоугольный треугольник, вырезанный из фанеры, крутится вокруг вершины острого угла в плоскости рисунка. Вершина второго острого угла движется со скоростью 10 см/с. С какой скоростью (в см/с) движется вершина прямого угла? Длина гипотенузы 5 см, расстояние между движущимися вершинами 3 см.



9.2.6. Нелинейный элемент электрической цепи — это элемент, сила тока в котором не пропорциональна приложенному напряжению. На рисунке показана вольт-амперная характеристика (зависимость силы тока от напряжения) некоторого нелинейного элемента. Какая мощность выделяется на нем, когда сила тока равна 3 А? Ответ дать в Вт.

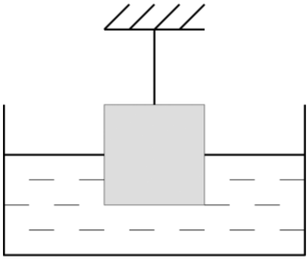


9.2.7. С земли вертикально вверх запускают по очереди две ракеты. Обе они летят с постоянным ускорением 30 м/с^2, пока не кончится топливо. В первой ракете его хватает на 3 секунды полёта, во второй — на 1.5 секунды. Через какое минимальное время после старта первой ракеты нужно запустить вторую, чтобы ракеты столкнулись в воздухе? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

9.2.8. На алюминиевую проволоку длиной $l = 5$ м и площадью поперечного сечения $S = 4$ мм^2 подали напряжение $U = 220$ В на $t = 0.1$ мс. Насколько нагрелась проволока? Теплообменом с окружающей средой пренебречь. Удельное сопротивление алюминия $\rho_c = 0.029$ Ом·мм^2/м, удельная теплоемкость $c = 897$ Дж/(кг·К), плотность $\rho_п = 2700$ кг/м^3.

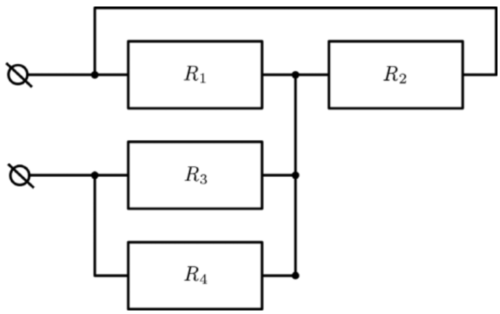
Вариант 9.3

9.3.1. Кубик погрузили в воду наполовину так, что его нижняя грань параллельна поверхности воды. Найти силу Архимеда, действующую на кубик. Плотность материала кубика $\rho_п = 2700$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, ребро кубика $l = 4$ см. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ выразить в мН.

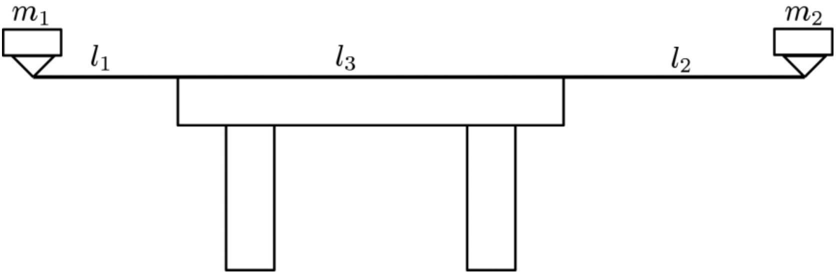


9.3.2. Тело кинули вертикально вниз в яму глубиной 51 м. Через 3 секунды тело достигло дна. Какой была начальная скорость тела? Ответ дайте в м/с. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

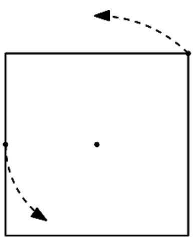
9.3.3. Сопротивления резисторов: $R_1 = R_2 = 4$ Ом, $R_3 = R_4 = 6$ Ом. Напряжение на клеммах 10 В. Найти мощность, выделяемую на резисторе R_4. Ответ дать в Вт.



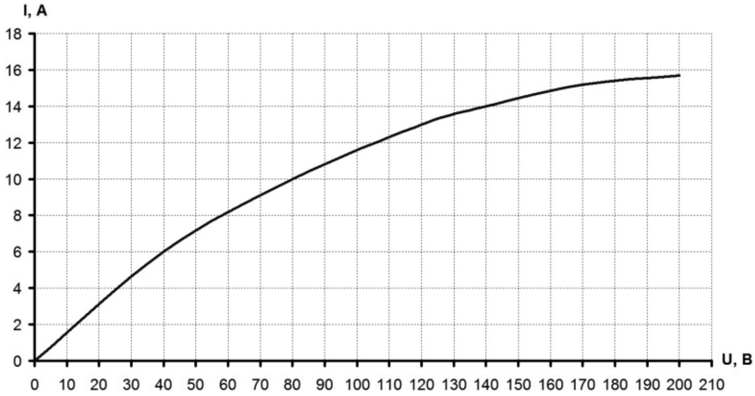
9.3.4. Рычаг с двумя чашами с песком покоится на столе. Масса песка в левой чаше $m_1 = 1$ кг, в правой $m_2 = 2$ кг. Какое максимальное количество песка можно убрать из левой чаши, не нарушая равновесия? Из правой чаши? Ширина стола $l_3 = 70$ см, длина левого плеча $l_1 = 180$ см, длина правого плеча $l_2 = 50$ см. Рычаг и чаши невесомы. В качестве ответа записать подряд без пробела сначала ответ на первый, затем на второй вопрос, в граммах.



9.3.5. Квадрат, вырезанный из фанеры, крутится вокруг своего центра в плоскости рисунка. Скорость вершины квадрата 7 см/с. Какова скорость (в см/с) середины стороны квадрата? Длина стороны квадрата 2 см. Ответ округлите до ближайшего целого числа.



9.3.6. Нелинейный элемент электрической цепи — это элемент, сила тока в котором не пропорциональна приложенному напряжению. На рисунке показана вольт-амперная характеристика (зависимость силы тока от напряжения) некоторого нелинейного элемента. Какая мощность выделяется на нем, когда сила тока равна 6 А? Ответ дать в Вт.



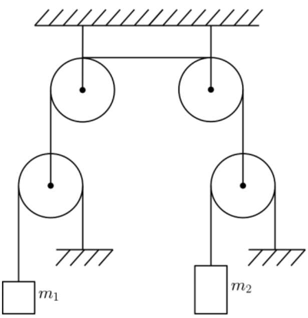
9.3.7. Запущенная с земли ракета летит вверх с постоянным ускорением 20 м/с^2 и за время t_1 поднимается на высоту H. Если с этой высоты запустить такую же ракету вниз, то она достигнет земли через время $t_2 = 1$ с. Найти t_1.

9.3.8. На нихромовую проволоку длиной $l = 3$ м и площадью поперечного сечения $S = 6$ мм^2 подали напряжение напряжение $U = 220$ В на $t = 2$ мс. Насколько нагрелась проволока? Теплообменом с окружающей средой пренебречь. Удельное сопротивление нихрома $\rho_c = 1.4$ Ом·мм^2/м, удельная теплоемкость $c = 450$ Дж/(кг·К), плотность $\rho_п = 8500$ кг/м^3.

ЗАДАЧИ ДЛЯ 10 КЛАССА

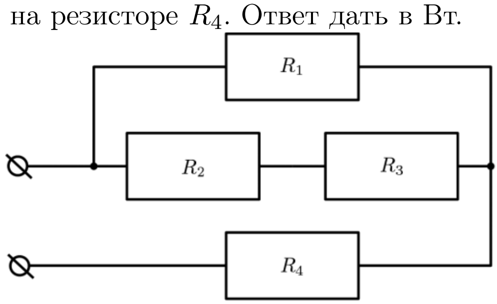
Вариант 10.1

10.1.1. Крокодил Гена массой 72 кг бежит со скоростью 10 км/ч. Навстречу ему катится вагон массой 120 кг со скоростью 5 м/с. С какой по модулю скоростью будет двигаться вагон, если Гена запрыгнет в него? Ответ привести в м/с, округлив до целых.



10.1.2. Определите величину ускорения, с которым движется груз m_1 (см. рис.). Массы грузов $m_1 = 500$ г и $m_2 = 1.5$ кг. Трением в блоке, массой блока и нити можно пренебречь. Нить считать нерастяжимой. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ приведите в единицах СИ, округлив до двух значащих цифр.

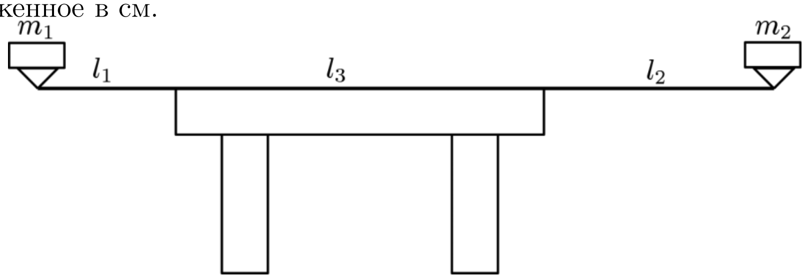
10.1.3. Сопротивления резисторов: $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = R_3 = R_4 = 1$ Ом. Напряжение на клеммах 10 В. Найти мощность, выделяемую на резисторе R_4. Ответ дать в Вт.



10.1.4. В кружке вода температуры 20°С. В неё положили кипятильник, и через 10 минут вода закипела. Через какое время после закипания выкипит 10% воды? Ответ привести в секундах и округлить до целого числа. Удельная теплота парообразования 2258 кДж/кг. Удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(кг·К). Мощность кипятильника считайте постоянной, теплоёмкостью кипятильника, кружки и теплопотерями пренебречь.

10.1.5. Шарик плавает на границе раздела двух жидкостей. Восьмая часть его объёма находится в керосине ($\rho_1 = 800$ кг/м^3), а другая — в воде. Определите плотность шарика. Ответ выразить в кг/м^3, округлив до целых. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

10.1.6. Рычаг с двумя чашами с песком покоится на столе. Масса песка в левой чаше $m_1 = 1$ кг, в правой $m_2 = 2$ кг. Какой максимальной и минимальной длины может быть левое плечо рычага l_1, чтобы равновесия не нарушилось? Ширина стола $l_3 = 70$ см, длина правого плеча $l_2 = 50$ см. Рычаг и чаши невесомы. В качестве ответа записать подряд без пробела сначала максимальное, затем минимальное значение l_1, выраженное в см.

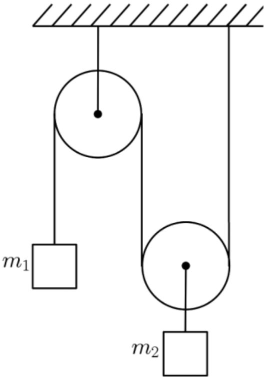


10.1.7. Два тела массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 900$ г лежат на гладком столе, между ними расположена невесомая пружина жесткостью $k = 400$ Н/м, длиной $l = 20$ см. Пружину сжимают в $n = 2$ раза и фиксируют конструкцию невесомой нерастяжимой нитью. Найти скорости тел v_1 и v_2 после пережигания нити. В ответе приведите аналитические выражения для искомых величин, а также их значения в м/с, округлив до десятых.

10.1.8. С земли вертикально вверх запустили ракету. Она летела 4 секунды с постоянным ускорением 30 м/с^2, после чего у неё кончилось топливо. Вторую такую же ракету запустили с того же места через 2 секунды после старта первой. На какой высоте ракеты столкнулись? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

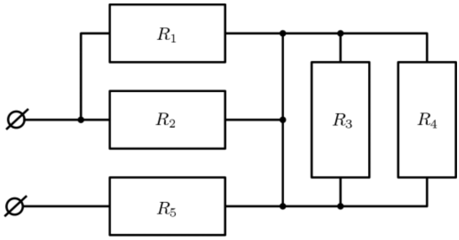
Вариант 10.2

10.2.1. Два тела начинают двигаться из одной точки, первое на север, второе на восток. Первое тело движется с постоянной скоростью $V_1 = 5$ м/с, второе — с постоянным ускорением $a_2 = 1$ м/с^2. Определить расстояние между телами через время $t = 3$ с. Ответ привести в метрах, округлив до целых.



10.2.2. Определите ускорение, с которым движется груз m_2 (см. рис.). Массы грузов $m_1 = m_2 = 500$ гр. Трением в блоке, массой блока и нити можно пренебречь. Нить считать нерастяжимой. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ приведите в единицах СИ, округлив до двух значащих цифр.

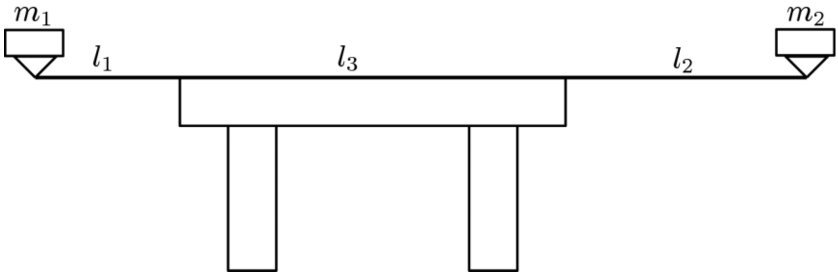
10.2.3. Сопротивления резисторов: $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 7$ Ом, $R_4 = 5$ Ом, $R_5 = 3$ Ом. Напряжение на клеммах 10 В. Найти мощность, выделяемую на резисторе R_5. Ответ дать в Вт.



10.2.4. Кастрюлю со льдом при температуре 0°С поставили на плиту и стали нагревать. За t секунд лёд растаял и полученная вода нагрелась до 100°С. Какая часть воды выкипит за следующие $2t$ секунд? Ответ привести в процентах, округлив до целого числа. Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг, удельная теплота парообразования 2258 кДж/кг. Удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(кг·К). Мощность плиты считайте постоянной, теплообменом с окружающей средой, испарением и теплоёмкостью кастрюли пренебречь.

10.2.5. Резиновый кубик ($\rho_0 = 950$ кг/м^3) плавает на границе раздела двух жидкостей. Часть его объёма находится в керосине ($\rho_1 = 800$ кг/м^3), а другая — в воде. Определите, какая часть кубика погружена в воду? Ответ выразите в процентах. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

10.2.6. Рычаг с двумя чашами с песком покоится на столе. Масса песка в левой чаше $m_1 = 1$ кг, в правой $m_2 = 2$ кг. Какое максимальное количество песка можно, не нарушая равновесия, досыпать в левую чашу? В правую чашу? Ширина стола $l_3 = 70$ см, длина левого плеча $l_1 = 40$ см, длина правого плеча $l_2 = 50$ см. Рычаг и чаши невесомы. В качестве ответа записать подряд без пробела сначала ответ на первый, затем на второй вопрос, в граммах.

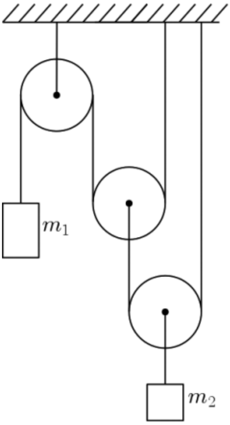


10.2.7. Два тела массами $m_1 = 5$ кг и $m_2 = 20$ кг лежат на гладком столе, между ними расположена невесомая пружина жесткостью $k = 100$ Н/м, длиной $l = 40$ см. Пружину сжимают на четверть длины и фиксируют конструкцию невесомой нерастяжимой нитью. Найти скорости тел v_1 и v_2 после пережигания нити. В ответе приведите аналитические выражения для искомых величин, а также их значения в м/с, округлив до десятых.

10.2.8. С земли вертикально вверх запускают по очереди две ракеты. Обе они летят с постоянным ускорением 30 м/с^2, пока не кончится топливо. В первой ракете его хватает на 3 секунды полёта, во второй — на 1.5 секунды. Через какое минимальное время после старта первой ракеты нужно запустить вторую, чтобы ракеты столкнулись в воздухе? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

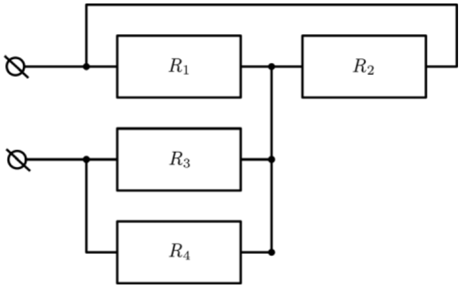
Вариант 10.3

10.3.1. С высоты $h = 180$ м одновременно сбрасывают коробку и шар для боулинга вертикально вниз. Из-за сопротивления воздуха коробка летит с ускорением в полтора раза меньшим, чем шар. Сопротивлением воздуха для шара можно пренебречь. Найти расстояние между коробкой и шаром через время $t = 6$ с. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2. Ответ привести в метрах, округлив до целых.



10.3.2. Определите величину результирующей силы, действующий на груз m_1 (см. рис.). Массы грузов $m_1 = 250$ г и $m_2 = 1$ кг. Трением в блоке, массой блока и нити можно пренебречь. Нить считать нерастяжимой. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ приведите в единицах СИ, округлив до двух значащих цифр.

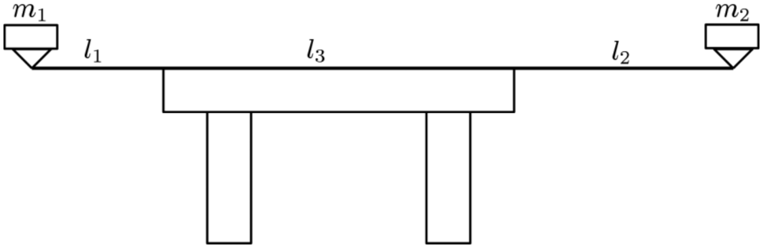
10.3.3. Сопротивления резисторов: $R_1 = R_2 = 4$ Ом, $R_3 = R_4 = 6$ Ом. Напряжение на клеммах 10 В. Найти мощность, выделяемую на резисторе R_4. Ответ дать в Вт.



10.3.4. Кастрюлю со льдом при 0 °С поставили на плиту и стали нагревать. За 10 минут лёд растаял. До какой температуры нагреется полученная вода через 6 минут? Ответ привести в °С, округлив до целого числа. Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг. Удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(кг·К). Мощность плиты считайте постоянной, теплообменом с окружающей средой, испарением и теплоёмкостью кастрюли пренебречь.

10.3.5. Резиновый шарик (средняя плотность $\rho_0 = 1000$ кг/м^3) подвешен к динамометру и опущен в масло ($\rho_1 = 920$ кг/м^3). Динамометр показывает $P_1 = 50$ Н. Что показал бы динамометр, если бы радиус шарика был в два раза меньше? Ответ выразить в Ньютонах и округлить до второго знака после запятой. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

10.3.6. Рычаг с двумя чашами с песком покоится на столе. Масса песка в левой чаше $m_1 = 1$ кг, в правой $m_2 = 2$ кг. Какое максимальное количество песка можно убрать из левой чаши, не нарушая равновесия? Из правой чаши? Ширина стола $l_3 = 70$ см, длина левого плеча $l_1 = 180$ см, длина правого плеча $l_2 = 50$ см. Рычаг и чаши невесомы. В качестве ответа записать подряд без пробела сначала ответ на первый, затем на второй вопрос, в граммах.



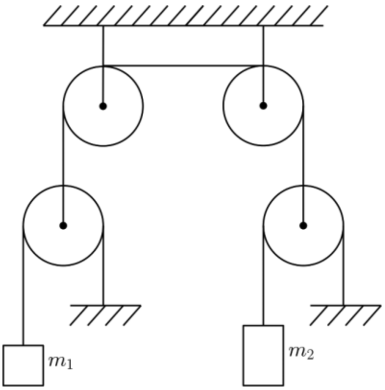
10.3.7. Два тела массами $m_1 = 500$ г и $m_2 = 2$ кг лежат на гладком столе, между ними расположена невесомая пружина жесткостью $k = 250$ Н/м, длиной $l = 20$ см. Пружину сжимают в $n = 2$ раз и фиксируют конструкцию невесомой нерастяжимой нитью. Найти скорости тел v_1 и v_2 после пережигания нити. В ответе приведите аналитические выражения для искомых величин, а также их значения в м/с, округлив до десятых.

10.3.8. Запущенная с земли ракета летит вверх с постоянным ускорением 20 м/с^2 и за время t_1 поднимается на высоту H. Если с этой высоты запустить такую же ракету вниз, то она достигнет земли через время $t_2 = 1$ с. Найти t_1.

ЗАДАЧИ ДЛЯ 11 КЛАССА

Вариант 11.1

11.1.1. Крокодил Гена массой 72 кг бежит со скоростью 10 км/ч. Навстречу ему катится вагон массой 120 кг со скоростью 5 м/с. С какой по модулю скоростью будет двигаться вагон, если Гена запрыгнет в него? Ответ привести в м/с, округлив до целых.



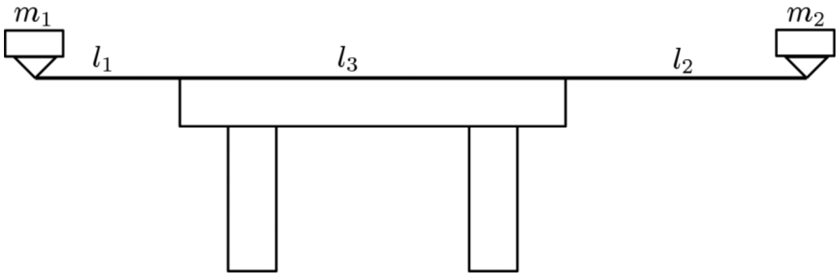
11.1.2. Определите величину ускорения, с которым движется груз m_1 (см. рис.). Массы грузов $m_1 = 500$ г и $m_2 = 1.5$ кг. Трением в блоке, массой блока и нити можно пренебречь. Нить считать нерастяжимой. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ приведите в единицах СИ, округлив до двух значащих цифр.

11.1.3. В вершинах равностороннего треугольника со стороной 10 см расположены заряды $q_1 = q_2 = 2$ нКл и $q_3 = -2$ нКл. Найдите силу, действующую на заряд q_2. Коэффициент k в законе Кулона считать равным $9{\cdot}10^9$ Н$\cdot$м^2/Кл^2. Ответ приведите в микроньютонах, округлив до двух значащих цифр.

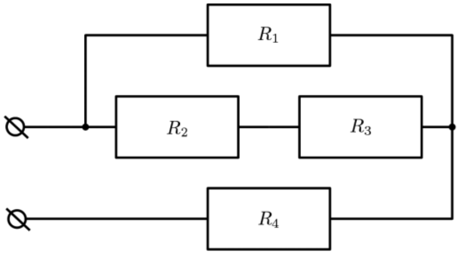
11.1.4. Профессор Джуп исследует возможность высадки на поверхность перспективных планет Апорве и Остиллак. Один из этапов — моделирование их атмосферы. Для первой планеты (Апорве) Джуп взял сферу диаметром $d_1 = 3122$ мм, заполнил её смесью газов со средней молярной массой $\mu_1 = 32$ г/моль и поддерживает в ней температуру $-193°$C. При этом масса газа внутри $m_1 = 4.8$ кг. Для моделирования атмосферы планеты Остиллак была взята сфера диаметром $d_2 = 4820$ мм, ее заполнили смесью газов, эффективная молярная масса которой на 4% больше, чем в первом случае. Ее поддерживают при температуре $-139°$C. Масса газа в ней оказалась равна $m_2 = 11$ кг. Каково отношение давлений в сферах (Апорве к

Остиллак)? Ответ округлите до одного знака после запятой. Толщиной стенок сфер и их массой можно пренебречь. Газы считать идеальными.

11.1.5. Рычаг с двумя чашами с песком покоится на столе. Масса песка в левой чаше $m_1 = 1$ кг, в правой $m_2 = 2$ кг. Какой максимальной и минимальной длины может быть левое плечо рычага l_1, чтобы равновесия не нарушилось? Ширина стола $l_3 = 70$ см, длина правого плеча $l_2 = 50$ см. Рычаг и чаши невесомы. В качестве ответа записать подряд без пробела сначала максимальное, затем минимальное значение l_1, выраженное в см.



11.1.6. Сопротивления резисторов: $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = R_3 = R_4 = 1$ Ом. Напряжение на клеммах 10 В. Найти мощность, выделяемую на резисторе R_4. Ответ дать в Вт.

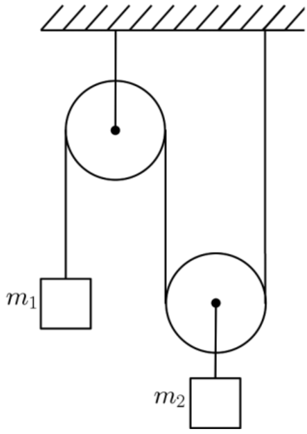


11.1.7. В сосуде под поршнем находился влажный воздух при температуре $t = 100°C$ и относительной влажности $\varphi = 60\%$. Газ изотермически сжали в 5 раз, в результате этого давление выросло в 2 раза. Найдите, каким было давление в сосуде в первоначальном состоянии. Ответ выразите в кПа, округлив до целых. Утечкой вещества из сосуда пренебречь.

11.1.8. Два тела массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 900$ г лежат на гладком столе, между ними расположена невесомая пружина жесткостью $k = 400$ Н/м, длиной $l = 20$ см. Пружину сжимают в $n = 2$ раза и фиксируют конструкцию невесомой нерастяжимой нитью. Найти скорости тел v_1 и v_2 после пережигания нити. В ответе приведите аналитические выражения для искомых величин, а также их значения в м/с, округлив до десятых.

Вариант 11.2

11.2.1. Два тела начинают двигаться из одной точки, первое на север, второе на восток. Первое тело движется с постоянной скоростью $V_1 = 5$ м/с, второе — с постоянным ускорением $a_2 = 1$ м/с^2. Определить расстояние между телами через время $t = 3$ с. Ответ привести в метрах, округлив до целых.



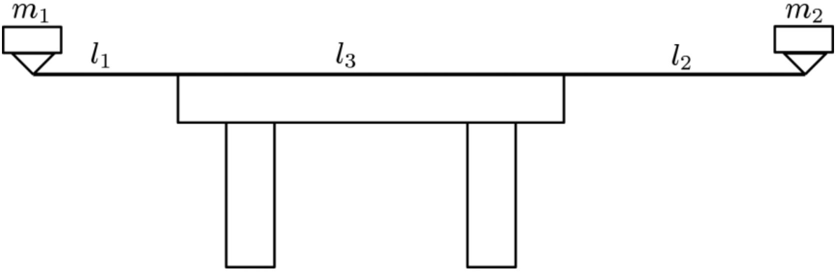
11.2.2. Определите ускорение, с которым движется груз m_2 (см. рис.). Массы грузов $m_1 = m_2 = 500$ гр. Трением в блоке, массой блока и нити можно пренебречь. Нить считать нерастяжимой. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ приведите в единицах СИ, округлив до двух значащих цифр.

11.2.3. В вершинах прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 см расположены заряды $q_1 = q_2 = 2$ нКл и $q_3 = -2$ нКл, при этом заряд q_3 лежит в вершине прямого угла, а заряд q_1 — в вершине угла в 30°. Найдите силу, действующую на заряд q_2. Коэффициент k в законе Кулона считать равным $9 \cdot 10^9$ Н$\cdot$м^2/Кл^2. Ответ приведите в микроньютонах, округлив до двух значащих цифр.

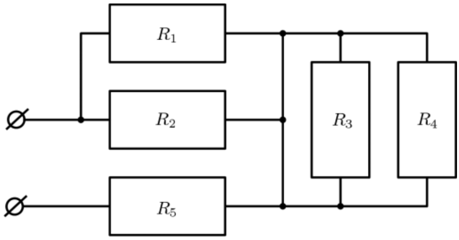
11.2.4. Профессор Джуп исследует возможность высадки на поверхность перспективных планет Оио и Деминаг. Один из этапов — моделирование их атмосферы. Для первой планеты

(Оио) Джуп взял сферу диаметром $d_1 = 3642$ мм и поддерживает в ней температуру $-163°$C. При этом масса газа внутри $m_1 = 8.9$ кг. Для атмосферы планеты Деминаг была взята сфера диаметром $d_2 = 5260$ мм. Ее поддерживают при температуре $+110°$C. Масса газа в ней оказалась равна $m_2 = 15$ кг. Каково отношение эффективных молярных масс газов, содержащихся в сферах (Оио к Деминагу), если среднее давление атмосферы Деминага $p_2 = 1.2$ кПа, а среднее атмосферное давление Оио — в 5 раз больше. Ответ округлите до трех знаков после запятой. Толщиной стенок сфер и их массой можно пренебречь. Газы считать идеальными.

11.2.5. Рычаг с двумя чашами с песком покоится на столе. Масса песка в левой чаше $m_1 = 1$ кг, в правой $m_2 = 2$ кг. Какое максимальное количество песка можно, не нарушая равновесия, досыпать в левую чашу? В правую чашу? Ширина стола $l_3 = 70$ см, длина левого плеча $l_1 = 40$ см, длина правого плеча $l_2 = 50$ см. Рычаг и чаши невесомы. В качестве ответа записать подряд без пробела сначала ответ на первый, затем на второй вопрос, в граммах.



11.2.6. Сопротивления резисторов: $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 7$ Ом, $R_4 = 5$ Ом, $R_5 = 3$ Ом. Напряжение на клеммах 10 В. Найти мощность, выделяемую на резисторе R_5. Ответ дать в Вт.

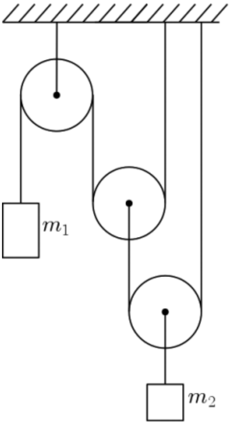


11.2.7. В сосуде под поршнем находился влажный воздух при температуре $t = 100°C$ и относительной влажности $\varphi = 60\%$. Газ изотермически сжали в 5 раз, в результате чего давление выросло в 2 раза. Найдите, каким было давление сухого воздуха в сосуде в первоначальном состоянии. Ответ выразите в кПа, округлив до целых. Утечкой вещества из сосуда пренебречь.

11.2.8. Два тела массами $m_1 = 5$ кг и $m_2 = 20$ кг лежат на гладком столе, между ними расположена невесомая пружина жесткостью $k = 100$ Н/м, длиной $l = 40$ см. Пружину сжимают на четверть длины и фиксируют конструкцию невесомой нерастяжимой нитью. Найти скорости тел v_1 и v_2 после пережигания нити. В ответе приведите аналитические выражения для искомых величин, а также их значения в м/с, округлив до десятых.

Вариант 11.3

11.3.1. С высоты $h = 180$ м одновременно сбрасывают коробку и шар для боулинга вертикально вниз. Из-за сопротивления воздуха коробка летит с ускорением в полтора раза меньшим, чем шар. Сопротивлением воздуха для шара можно пренебречь. Найти расстояние между коробкой и шаром через время $t = 6$ с. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2. Ответ привести в метрах, округлив до целых.

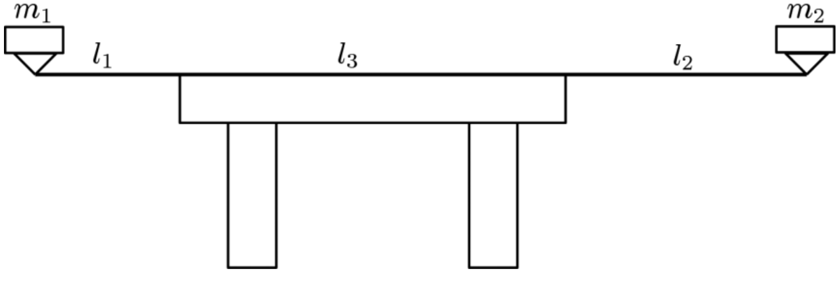


11.3.2. Определите величину результирующей силы, действующий на груз m_1 (см. рис.). Массы грузов $m_1 = 250$ г и $m_2 = 1$ кг. Трением в блоке, массой блока и нити можно пренебречь. Нить считать нерастяжимой. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ приведите в единицах СИ, округлив до двух значащих цифр.

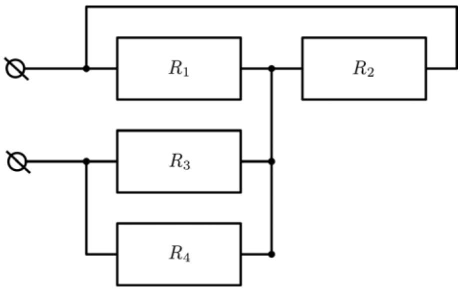
11.3.3. В вершинах равнобедренного треугольника с боковой стороной 10 см и углом при основании 30° расположены заряды $q_1 = q_2 = 2$ нКл и $q_3 = -2$ нКл. При этом заряд q_2 лежит в вершине наибольшего угла. Найдите силу, действующую на заряд q_2. Коэффициент k в законе Кулона считать равным $9 \cdot 10^9$ Н $\cdot$ м^2/Кл^2. Ответ приведите в микроньютонах, округлив до двух значащих цифр.

11.3.4. Профессор Джуп исследует возможность высадки на поверхность перспективных планет Апорве и Натит. Один из этапов — моделирование их атмосферы. Для первой планеты (Апорве) Джуп взял сферу диаметром $d_1 = 3122$ мм и поддерживает в ней температуру -193°С. Масса газа внутри $m_1 = 4.8$ кг. Для атмосферы планеты Натит была взята сфера диаметром $d_2 = 5152$ мм. Ее поддерживают при температуре -180°С, а средняя масса газа внутри оказалась равна $m_2 = 13$ кг. Каково отношение эффективных молярных масс газов, содержащихся в сферах (Натиту к Апорве), если давления газов равны $p_1 = 0.1$ мкПа (Апорве) и $p_2 = 1.2$ мкПа (Натиту)? Толщиной стенок сфер и их массой можно пренебречь. Газы считать идеальными.

11.3.5. Рычаг с двумя чашами с песком покоится на столе. Масса песка в левой чаше $m_1 = 1$ кг, в правой $m_2 = 2$ кг. Какое максимальное количество песка можно убрать из левой чаши, не нарушая равновесия? Из правой чаши? Ширина стола $l_3 = 70$ см, длина левого плеча $l_1 = 180$ см, длина правого плеча $l_2 = 50$ см. Рычаг и чаши невесомы. В качестве ответа записать подряд без пробела сначала ответ на первый, затем на второй вопрос, в граммах.



11.3.6. Сопротивления резисторов: $R_1 = R_2 = 4$ Ом, $R_3 = R_4 = 6$ Ом. Напряжение на клеммах 10 В. Найти мощность, выделяемую на резисторе R_4. Ответ дать в Вт.



11.3.7. В сосуде под поршнем находился влажный воздух при температуре $t = 100°$C и относительной влажности $\varphi = 70\%$. Газ изотермически сжали в 3 раза, при этом давление увеличилось в полтора раза. Найдите, каким было давление сухого воздуха в сосуде в первоначальном состоянии. Ответ выразите в кПа, округлив до целых.

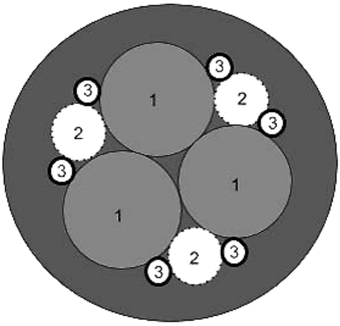
11.3.8. Два тела массами $m_1 = 500$ г и $m_2 = 2$ кг лежат на гладком столе, между ними расположена невесомая пружина жесткостью $k = 250$ Н/м, длиной $l = 20$ см. Пружину сжимают в $n = 2$ раз и фиксируют конструкцию невесомой нерастяжимой нитью. Найти скорости тел v_1 и v_2 после пережигания нити. В ответе приведите аналитические выражения для искомых величин, а также их значения в м/с, округлив до десятых.

Заключительный тур

ЗАДАЧИ ДЛЯ 7 КЛАССА

Вариант 7.1

7.1.1. На рисунке представлен срез трансконтинентального кабеля радиусом 3 см. Цифрой 1 обозначены медные жилы радиусом 1 см, цифрой 2 — нихромовые с радиусом 0.5 см, цифрой 3 — алюминиевые радиусом 0.2 см. Остальное пространство внутри кабеля заполнено полиэтиленом. Рассчитать линейную плотность кабеля, если известно, что плотность меди $\rho_1 = 8900$ кг/м^3, нихрома $\rho_2 = 8200$ кг/м^3, алюминия $\rho_3 = 2700$ кг/м^3. Плотность полиэтилена $\rho_0 = 940$ кг/м^3.



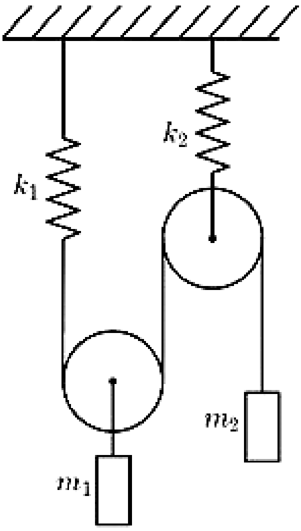
Линейная плотность однородного тела — физическая величина, определяемая отношением массы тела к его линейному параметру (как правило, длине). В СИ выражается в кг/м. Площадь круга радиусом r: $S = \pi r^2$, где $\pi \approx 3.14$.

7.1.2. Игральные карты длиной $L = 10$ см аккуратно складывают одна на другую с небольшим смещением друг относительно друга.

1. Найдите номер карты, добавление которой разрушит конструкцию, если каждая следующая карта смещается на $x_1 = 2$ см относительно предыдущей. Укажите, где именно начнется разрушение конструкции.

2. Найдите номер карты, добавление которой разрушит конструкцию, если для каждой следующей карты смещение относительно предыдущей увеличивается на $\Delta x_2 = 1$ см (смещение второй карты относительно первой — 1 см, третьей относительно второй — 2 см и так далее).

Ответ обоснуйте.



7.1.3. Изображенная на рисунке система находится в равновесии. Жесткости пружин $k_1 = 40$ Н/м, $k_2 = 100$ Н/м, $m_2 = 100$ г.
1. Найдите m_1.
2. Найдите растяжения пружин Δl_1 и Δl_2.
Рядом собирают точно такую же систему, но с грузами $M_1 = 2m_1$ и $M_2 = 2m_2$ вместо m_1 и m_2 соответственно.
3. На сколько сантиметров ниже будет висеть груз M_1 относительно m_1, если груз M_2 остался на той же высоте, что и m_2.
Блоки и пружины считайте невесомыми, а нити — невесомыми, нерастяжимыми и достаточно длинными.

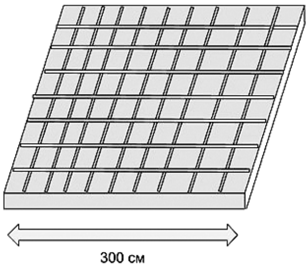
7.1.4. Небольшой кубик со стороной $a = 3$ см склеен из двух прямоугольных параллелепипедов: деревянного и пластикового. Вася заметил, что если положить кубик в воду деревом вниз, то он будет плавать так, что слой пластика будет погружен на $1/3$ высоты, а если его перевернуть, то над водой будет выступать половина деревянной части кубика.
1. Найдите отношение высот параллелепипедов (пластик : дерево).
2. На кубик надавили так, что его верхняя грань оказалась на уровне воды. Найти перемещение кубика, если сечение сосуда постоянно и имеет площадь $S_0 = 30$ см^2.
3. Какова плотность пластика?
Плотность воды 1000 кг/м^3; плотность дерева 800 кг/м^3. Ускорение свободного падения: $g = 10$ м/с^2

7.1.5. Мальчик идет из деревни А в деревню Б к бабушке в гости со скоростью $V = 5$ км/ч. Он взял с собой собаку, которая бегает со скоростью $2V$. Собаке скучно идти с мальчиком, поэтому она бежит вперед, добегает до деревни Б, быстро разворачивается, бежит к мальчику. Встретив мальчика, она быстро

разворачивается и опять бежит в деревню Б. Расстояние между деревнями равно 10 км.
1. Найти время, которое пройдет с момента выхода из деревни А до первой встречи мальчика и собаки.
2. Найти расстояние, которое пробежит собака к тому моменту, когда мальчик дойдет до деревни.
3. Найти время между четвертой и пятой встречами собаки с мальчиком.

Вариант 7.2

7.2.1. Железобетонный фундамент — это основание дома, которое представляет собой бетонную конструкцию, укрепленную арматурным каркасом. Арматурный каркас представляет собой соединенные стержни арматурной стали. Плита представляет собой параллелепипед толщиной 40 см и сторонами 300 см, который делается следующим образом: в форме создается каркас из арматуры: железные прутья длиной 300 см с расстоянием между центрами прутьев 20 см (см. рис.) сначала вдоль, потом поперек.



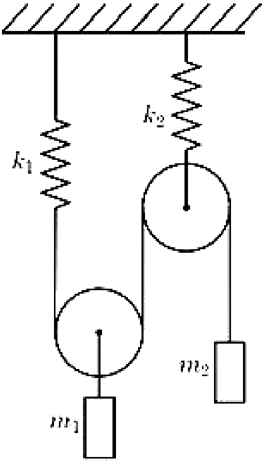
Три таких сетки укладываются одна на другую (поперечные + продольные прутья вплотную), потом это все заливается бетоном. Радиус прутьев 1 см, плотность железа 7800 кг/м^3, плотность бетона 2500 кг/м^3. Ускорение свободного падения g $= 10$ м/с^2.
Найдите среднее давление такой плиты на грунт.
Площадь круга радиусом r: $S = \pi r^2$, *где* $\pi \approx 3.14$.

7.2.2. Игральные карты длиной $L = 10$ см аккуратно складывают одна на другую с небольшим смещением друг относительно друга.
1. Найдите номер карты, добавление которой разрушит конструкцию, если каждая следующая карта смещается на $x_1 = 2$ см относительно предыдущей. Укажите, где именно начнется разрушение конструкции.

2. Найдите номер карты, добавление которой разрушит конструкцию, если для каждой следующей карты смещение относительно предыдущей увеличивается на $\Delta x_2 = 1$ см (смещение второй карты относительно первой — 1 см, третьей относительно второй — 2 см и так далее).

Ответ обоснуйте.

7.2.3. Изображенная на рисунке система находится в равновесии. Жесткости пружин $k_1 = 40$ Н/м, $k_2 = 100$ Н/м, $m_2 = 100$ г.



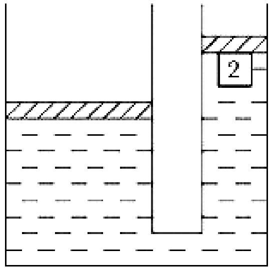
1. Найдите m_1.
2. Найдите растяжения пружин Δl_1 и Δl_2.

Рядом собирают точно такую же систему, но с грузами $M_1 = 2m_1$ и $M_2 = 2m_2$ вместо m_1 и m_2 соответственно.

3. На сколько сантиметров ниже будет висеть груз M_1 относительно m_1, если груз M_2 остался на той же высоте, что и m_2.

Блоки и пружины считайте невесомыми, а нити — невесомыми, нерастяжимыми и достаточно длинными.

7.2.4. Массы поршней гидравлического пресса подобраны так, чтобы в отсутствие грузов уровни воды в левом и правом коленах были равны.



На больший поршень кладут деревянное тело 1, расстояние между поршнями становится $x_1 = 10$ см. На меньший поршень кладут деревянное тело 2, система приходит в равновесие и уровень воды выравнивается.

После этого тела 1 и 2 снимают с поршней и ПОД меньший поршень помещают тело 2. Воздух под поршень не попадает.

1. Найти отношение объемов тел (1 к 2).
2. Найти изменение уровня воды в меньшем колене (относительно начального положения) в результате всех описанных действий.

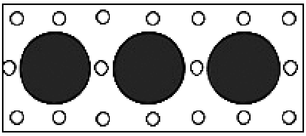
Плотность воды 1000 кг/м^3, плотность дерева 800 кг/м^3, отношение масс поршней $M_1/M_2 = 4$. Ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2 Толщиной поршней пренебречь.

7.2.5. Мальчик идет из деревни А в деревню В к бабушке в гости со скоростью $V = 5$ км/ч. Одновременно с ним от бабушки навстречу ему выбегает собака, которая бегает со скоростью $2V$. Собаке скучно идти с мальчиком, поэтому она, добежав до мальчика, быстро разворачивается, снова бежит к бабушке. И так до тех пор, пока мальчик не доберется в деревню Б. Расстояние между деревнями равно 15 км.

1. Найти время, которое пройдет между первой и второй встречей мальчика и собаки.
2. Найти расстояние, которое пробежит собака к тому моменту, когда мальчик дойдет к бабушке.
3. Найти время между пятой и шестой встречами собаки с мальчиком.

Вариант 7.3

7.3.1. При возведении зданий используют пустотные панели перекрытия. Они представляют собой бетонные элементы в форме прямоугольного параллелепипеда, усиленные арматурой. Отличительная особенность конструкции — наличие пустот круглого или овального сечения, расположенных вдоль продольной оси. На рисунке схематически изображен срез такой панели с тремя пустотами круглого сечения, вдоль каждой такой пустоты проходит 8 прутьев арматуры. Необходимо рассчитать линейную плотность такой плиты с 5 полостями. Радиус полостей 6 см, радиус арматурных прутьев 5 мм. Линейные размеры среза: 76 см на

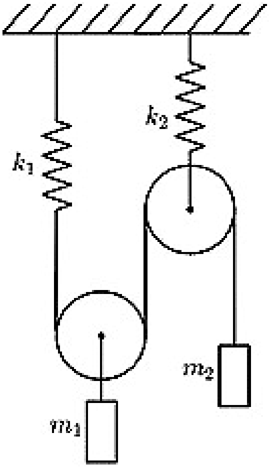


18 см. Плотность железа 7800 кг/м^3, плотность бетона 2500 кг/м^3.

Линейная плотность однородного тела — физическая величина, определяемая отношением массы тела к его линейному параметру (как правило, длине). В СИ выражается в кг/м.
Площадь круга радиусом r: $S = \pi r^2$, где $\pi = 3.14$.

7.3.2. Карты длиной $L = 16$ см аккуратно складывают одна на другую с небольшим смещением друг относительно друга.
1. Найдите номер карты, добавление которой разрушит конструкцию, если каждая следующая карта смещается на $x_1 = 3$ см относительно предыдущей. Укажите, где именно начнется разрушение конструкции.
2. Найдите номер карты, добавление которой разрушит конструкцию, если для каждой следующей карты смещение относительно предыдущей увеличивается на $\Delta x_2 = 1$ см (смещение второй карты относительно первой — 1 см, третьей относительно второй — 2 см и так далее).

Ответ обоснуйте.



7.3.3. Изображенная на рисунке система находится в равновесии. Жесткости пружин $k_2 = 100$ Н/м, $k_1 = 40$ Н/м, $m_2 = 300$ гр.
1. Найдите m_1;
2. Найдите растяжения пружин Δl_1 и Δl_2.
Рядом собирают точно такую же систему, но с грузами $M_1 = 2m_1$ и $M_2 = 2m_2$ вместо m_1 и m_2 соответственно.
3. На сколько сантиметров ниже будут висеть грузы M_1 относительно m_1 и M_2 относительно m_2, если они опустились на одинаковые расстояния?
Блоки и пружины считайте невесомыми, а нити — невесомыми, нерастяжимыми и достаточно длинными.

7.3.4. Легкий цилиндрический сосуд с площадью дна $S_1 = 16$ см^2 и высотой $h = 15$ см плавает в воде, внутри более крупной емкости с площадью дна $S_2 = 24$ см^2. Внутренний сосуд частично заполнен неизвестной жидкостью, так что он погружен в воду на половину своей высоты, при этом ось сосуда является вертикальной.

1. Найдите плотность неизвестной жидкости, если она занимает треть внутреннего объема сосуда.

2. На сколько сантиметров нужно переместить внутренний сосуд вверх, чтобы его нижняя поверхность оказалась вровень с водой?

3. Во внутренний сосуд доливают бензин. Какой толщины должен быть слой бензина, чтобы его уровень внутри сосуда совпал с уровнем воды снаружи сосуда?

Плотность воды 1000 кг/м^3, плотность бензина 750 кг/м^3, ускорение свободного падения 10 м/с^2 Бензин и неизвестная жидкость не смешиваются, толщина стенок сосуда мала.

7.3.5. Мальчик идет из деревни А в деревню Б к бабушке в гости со скоростью $V = 5$ км/ч. Через 30 минут следом за ним выбегает собака, которая бегает со скоростью $2V$. Собаке скучно идти с мальчиком, поэтому она, догнав хозяина, бежит вперед. Добежав до деревни Б, быстро разворачивается, бежит к мальчику. Встретив мальчика, она быстро разворачивается и опять бежит в деревню Б. Расстояние между деревнями равно 15 км.

1. Найти время, которое пройдет между первой и второй встречей мальчика и собаки;

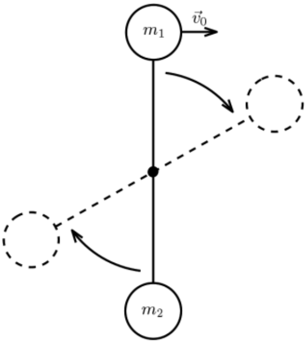
2. Найти расстояние, которое пробежит собака к тому моменту, когда мальчик дойдет до деревни;

3. Найти время между шестой и пятой встречами собаки с мальчиком.

ЗАДАЧИ ДЛЯ 8–9 КЛАССОВ

Вариант 8-9.1

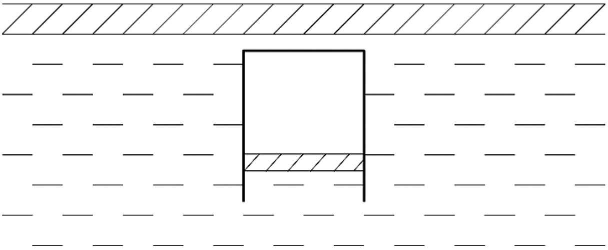
8-9.1.1. Два шара массами $m_1 = 10$ г и $m_2 = 30$ г соединены жёстким стержнем длины $L = 20$ см, который может вращаться в вертикальной плоскости вокруг оси, проходящей через его середину. В начальный момент стержень расположен вертикально и неподвижен. Верхнему шару массой m_1 щелчком сообщают скорость $v_0 = 5$ м/с. Через пол-оборота его скорость стала $v_1 = 3$ м/с. Какова будет его скорость, когда стержень повернётся на три четверти оборота, если трение в оси постоянно?



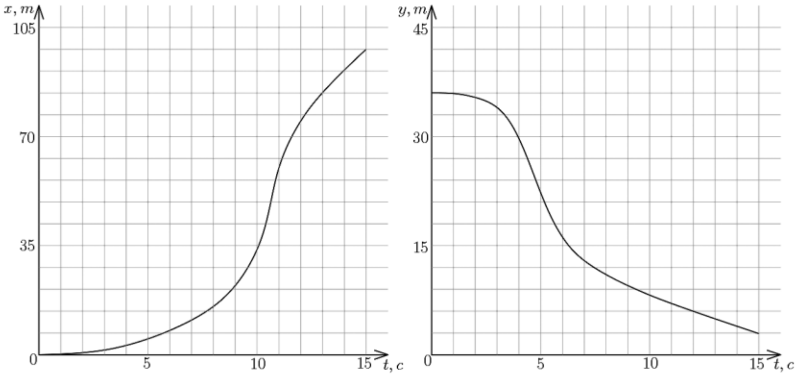
8-9.1.2. В одном калориметре находится $V_1 = 59$ мл уксусной кислоты при температуре $t_1 = 20°$C, во втором $V_2 = 31$ мл при температуре $t_2 = 100°$C. Содержимое калориметров смешали. Найдите объём смеси, если коэффициент объёмного расширения уксусной кислоты равен $\beta = 0.001\,°\mathrm{C}^{-1}$. Теплопотерями пренебречь.
Примечание: Коэффициент объёмного расширения равен отношению относительного изменения объёма тела к изменению температуры: $\beta = (\Delta V/V)/\Delta t$.

8-9.1.3. Водолазный колокол в форме цилиндра опускают в большой бассейн с двумя несмешивающимися жидкостями. Толщина верхнего слоя жидкости $h_1 = 1.5$ м, её плотность $\rho_1 = 800$ кг/м^3, плотность нижней жидкости $\rho_2 = 1000$ кг/м^3.
1) Какой объём жидкости из верхнего слоя окажется в колоколе, когда его низ опустится до линии раздела жидкостей?
2) Определите, при какой глубине погружения (расстоянии от низа колокола до границы жидкость-воздух) колокол начнет тонуть.
Изменением уровня жидкости в бассейне пренебречь. Стенки колокола тонкие, масса колокола $m = 1000$ кг, высота $H = 2$ м, площадь основания $S = 1\,\text{м}^2$. При погружении давле-

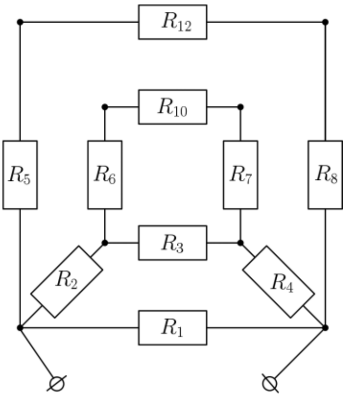
ние и объём воздуха изменяются по закону Бойля — Мариотта $pV = const$. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

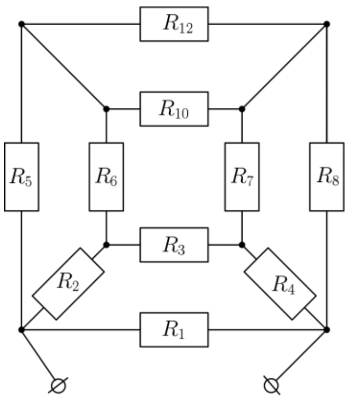


8-9.1.4. Тело массой 1 кг соскальзывает с холма. Графики зависимости его горизонтальной координаты x и вертикальной координаты y от времени показаны на рисунке. Считая, что половина выделившегося при трении тепла пошла на нагрев тела, вычислите увеличение его внутренней энергии за 15 с.



8-9.1.5. У Васи было восемь резисторов R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8 сопротивлением 1 Ом, два резистора R_{10} и R_{12} сопротивлением 2 Ом, проводки, паяльник и много свободного времени. Резисторы R_9 и R_{11} Вася искал, но не нашёл. Он спаял схему, показанную на верхнем рисунке.
Каково её сопротивление?

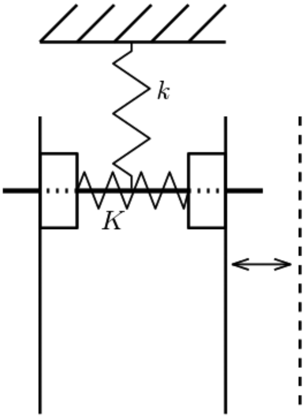




Потом Вася обнаружил, что не использовал два проводка. Чтобы они не пропали зря, он усовершенствовал схему, как показано на нижнем рисунке.
Каково её сопротивление?

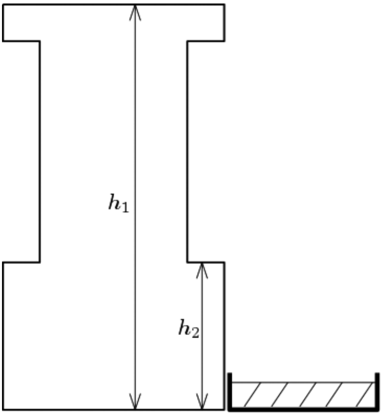
Вариант 8-9.2

8-9.2.1. Две одинаковых каретки массой по 150 г закреплены на паре параллельных вертикальных рельс, так что могут скользить по ним вверх и вниз. Каретки соединены между собой пружиной жёсткостью 200 Н/м и невесомым стержнем, благодаря которому всегда находятся на одной высоте. Стержень не препятствует деформации пружины. Сдвигая и раздвигая рельсы, Вася установил, что максимальное расстояние между рельсами, при котором каретки неподвижны — $L_0 = 14$ см, и рассчитал коэффициент трения. Какое значение получил Вася? Пружина, соединяющая каретки, в недефомированном состоянии имеет длину $L = 20$ см.



Потом он установил рельсы на расстоянии $L_1 = 13$ см друг от друга и прикрепил стержень к потолку пружиной с малой жёсткостью 10 Н/м. Каретки находились на такой высоте, что вертикальная пружина не была деформирована. Резко раздвинув рельсы на расстояние $L_2 = 17$ см, Вася дождался, когда каретки съехали вниз на 7 см, и быстро вернул рельсы в начальное положение. Какое расстояние проехали каретки до полной остановки после сближения рельсов?

Примечание: энергия, запасенная в деформированной пружине, равна $k(\Delta l)^2/2$, где Δl — деформация пружины.



8-9.2.2. Капли расплавленного свинца падают с башни высотой $h_1 = 80$ м в теплоизолированную ванну с водой. Вода имеет массу 2 кг и температуру $T_0 = 30°$C. Проводя в полете время $t_1 = 4$ с, свинец застывает у самой поверхности воды. Когда в ванну упало 1200 дробинок, температура воды в ванне стала $T_к = 100°$C. Потом свинец стали капать с платформы башни, расположенной на высоте $h_2 = 20$ м, и капли долетали до воды за время $t_2 = 2$ с. С платформы в ванну упало 8 капель. Сколько всего воды испарилось?

Между падением двух свинцовых капель проходит достаточно времени, чтобы в ванне установилось тепловое равновесие. Удельная теплоёмкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг·°C), удельная теплота парообразования $L = 2300$ кДж/кг, удельная теплоёмкость свинца $c_с = 130$ Дж/(кг·°C), удельная теплота плавления $\lambda = 25$ кДж/кг, температура плавления $T_{пл} = 327°$C. Капли свинца одинаковы и имеют массу 20 г, их начальная температура равна температуре плавления $T_{пл}$. Вода из ванны не выливается.

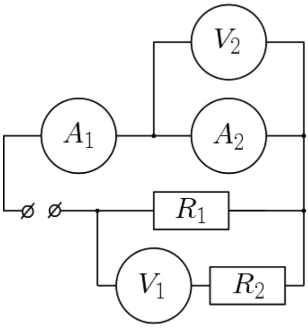
8-9.2.3. Кусочек стекла взвешивают в вакууме на рычажных весах чувствительностью $m_0 = 0.5$ мг с помощью железных гирь. Чтобы вынуть образец, в вакуумную камеру пустили воздух и дождались, когда давления в камере и в комнате выровняются. Определите, при какой минимальной массе стекла после установления равенства давлений весы гарантированно выйдут из равновесия.

Плотность стекла 2.5 г/см^3, плотность железа 7.8 г/см^3, плотность воздуха 1.2 кг/м^3. Температура воздуха и атмосферное давление во время опыта не меняются.

Примечание: чувствительность весов равна максимальной массе груза, который не выводит весы из равновесия.

8-9.2.4. Мистер Исключительный разозлился и бросил своего босса в стену, но не рассчитал силу, и тот пробил несколько стен в офисе. После «прохождения» первой стены, сделанной из двух слоев гипсокартона, скорость босса снизилась на 11%. Затем он летел через кабинеты обычных сотрудников, разделенные одним слоем такого же гипсокартона. Сколько всего он пробил стен, если не касался пола до остановки? Сопротивлением воздуха пренебречь.

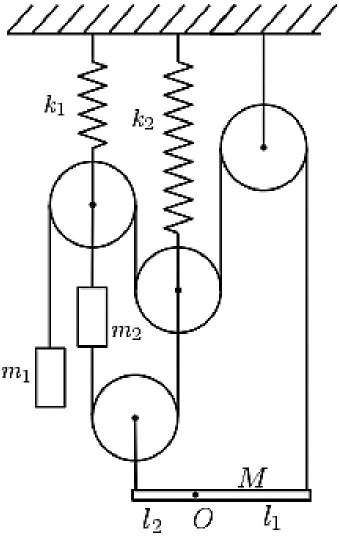
8-9.2.5. В изображенной на рисунке электрической цепи использованы одинаковые вольтметры, одинаковые амперметры и одинаковые резисторы. Вольтметры перед подключением «испортили», соединив их параллельно с одинаковыми низкоомными резисторами (на рисунке не показаны). Показания вольтметра $V_1 = 2.8$ В, $V_2 = 0.8$ В, амперметра $A_1 = 4.2$ А, $A_2 = 4.0$ А.



Какое напряжение подано на цепь?

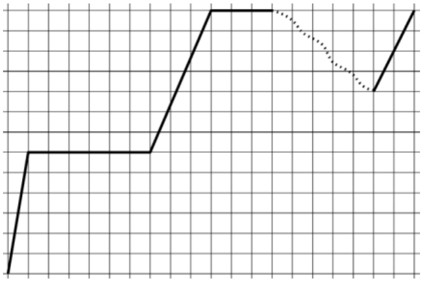
Вариант 8-9.3

8-9.3.1. Изображенная на рисунке система находится в равновесии. Рычаг массой $M = 40$ г может вращаться вокруг неподвижной оси O. Известно, что $l_1 = 30$ см, $l_2 = 10$ см, массы грузов $m_1 = 20$ г, $m_2 = 10$ г, жёсткости пружин $k_1 = 20$ Н/м, $k_2 = 10$ Н/м. Найдите силу натяжения нити, прикрепленной к левому концу рычага, удлинения пружин и силу натяжения

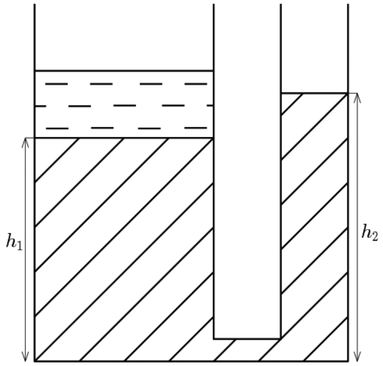


нити, на которой подвешен крайний правый блок. Блоки и пружины считайте невесомыми, а нити — невесомыми и нерастяжимыми.

8-9.3.2. Наводя порядок в лаборатории, студенты нашли график, начерченный на миллиметровке (без координатных осей). Из записей на обороте листа они узнали, что:



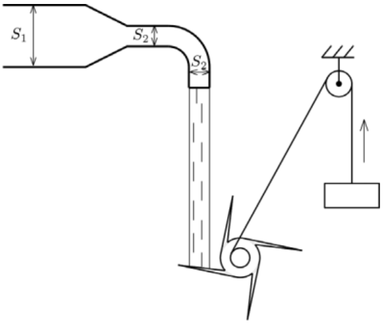
1) график изображает зависимость температуры нагреваемого в калориметре вещества от времени;
3) в какой-то момент в калориметр уронили гирьку, и после того, как установилось равновесие (пунктирная линия на графике), данные продолжили снимать;
4) отношение удельной теплоты парообразования к удельной теплоте плавления вещества равно $L : \lambda = 13 : 1$.
Найдите отношение теплоёмкостей тела в твёрдом и в жидком состояниях. Во сколько раз отличаются теплоёмкости гири и теплоёмкость вещества в твёрдом состоянии?



8-9.3.3. В левом колене сообщающихся сосудов находятся две несмешивающиеся жидкости с плотностями $\rho_1 = 1$ г/см^3 и $\rho_2 = 0.8$ г/см^3, а в правом колене только жидкость плотностью ρ_1. Высота столба первой жидкости в левом колене $h_1 = 8$ см, в правом колене $h_2 = 12$ см.

В левое колено аккуратно опустили цилиндр плотностью $\rho_0 = 0.6$ г/см^3, так что его основание горизонтально. Площадь сечения левого и правого колена $S_1 = 25$ см^2 и $S_2 = 5$ см^2 соответственно, площадь основания цилиндра $S = 5$ см^2, его высота $H = 10$ см. Стенки сосудов достаточно высокие, так что жидкость не выливается.

Определите объём жидкости плотностью ρ_2. Какова высота находящейся в воздухе части цилиндра? Найдите изменение высоты столба жидкости в правом колене.



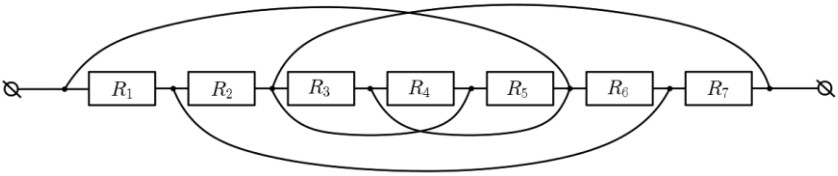
8-9.3.4. Горизонтальная труба с переменным сечением гладко переходит в вертикальную. Площадь сечения первого участка трубы $S_1 = 1/4$ м^2, второго — $S_2 = 3/16$ м^2. Струя воды, выходящая из трубы, падает на лопасти мельничного колеса, на вал которого наматывается верёвка, перекинутая через блок. С помощью этой конструкции поднимают грузы. Когда колесо установлено на 7 м ниже конца трубы, груз массой 66 кг поднимается вверх со скоростью 0.3 м/с.

1) Определите скорость течения воды во втором горизонтальном участке трубы, если в первом участке скорость течения $v_1 = 4.5$ м/с.

2) Найдите КПД подъёмника.

Струя не разбивается на отдельные капли, вся вода попадает на лопасти колеса. Длина вертикального участка трубы пренебрежимо мала. Плотность воды 1000 г/м^3.

8-9.3.5. Из семи резисторов сопротивлениями $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $R_3 = 1$ Ом, $R_4 = 2$ Ом, $R_5 = 3$ Ом, $R_6 = 7$ Ом, $R_7 = 6$ Ом и пяти перемычек составлена цепь, показанная на рисунке. На клеммы подано напряжение $U = 87$ В. Через какой резистор протекает минимальный ток? Максимальный ток? Вычислите их значения. Найдите общее сопротивление цепи.

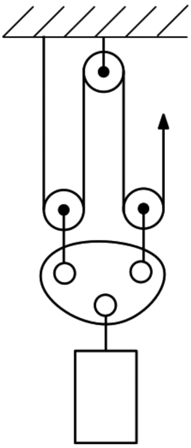


Примечание: В местах пересечения проводов, не отмеченных чёрными точками, электрический контакт отсутствует.

ЗАДАЧИ ДЛЯ 10–11 КЛАССОВ

Вариант 10-11.1

10-11.1.1. Для поднятия тяжёлых грузов альпинисты сооружают систему, называемую полиспастом. Идеализированный



полиспаст — это система блоков, дающая выигрыш в силе. Блок представляет собой массивный диск, вся масса которого сосредоточена на внешнем радиусе, без трения вращающийся вокруг центральной оси.

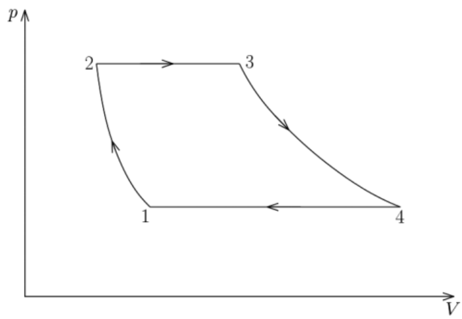
1. С какой силой нужно тянуть за верёвку, чтобы поднимать груз массой $M = 100$ кг с ускорением $a = 1$ м/с^2, в случае, если блоки идеальные (т. е. не имеют массы)?

2. Учтите теперь, что каждый блок имеет массу $m = 5$ кг, и ответьте на тот же вопрос. При какой массе блоков использовать данную систему для подъёма груза массы станет невыгодно?

3. Альпинист Петрович нашёл один идеальный блок! Какой неидеальный блок ему надо заменить, чтобы добиться максимального ускорения груза при неизменной тянущей силе?

Считать, что все верёвки нерастяжимы и параллельны друг другу, кроме мест, где они проходят через блоки.

10-11.1.2. Тепловая машина, работающая по циклу, изображённому на рисунке, использует в качестве рабочего тела идеальный одноатомный газ. Известно, что минимальный объём



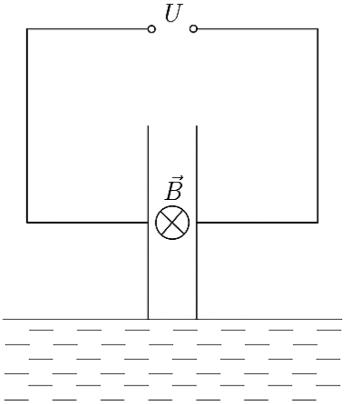
в процессе равен 1 л, а максимальный 64 л. Минимальное давление, достигаемое тепловой машиной, равно 10^5 Па, а в процессе $4 \to 1$ над газом совершается работа 5600 Дж. В процессе $1 \to 2$ отсутствует теплообмен между газом и окружающей средой, а процесс $3 \to 4$ проходит при постоянной температуре.

1. Найдите отношение температур в точках 3 и 1;

2. Найдите КПД цикла.

Примечание: Уравнение адиабатического процесса $PV^{5/3} = const$. Работа газа в изотермическом процессе может быть вычислена по формуле (здесь T — температура изотермы, ν — количество молей газа, V_0 и V — объем газа в начале и в конце процесса): $A = \nu RT \ln(V/V_0)$.

10-11.1.3. Для поднятия несжимаемой незаряженной проводящей жидкости был сконструирован следующий насос. Высокий конденсатор с расстоянием между пластинами, равным d, и шириной пластин, равной a, касается нижним краем проводящей жидкости так, что обкладки конденсатора перпендикулярны поверхности. Внутри конденсатора создаётся горизонтальное постоянное однородное магнитное поле с индукцией B, параллельное пластинам конденсатора.

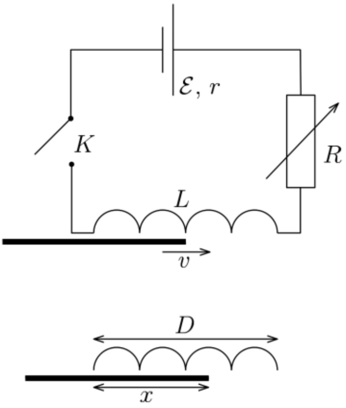


Конденсатор подключён к источнику постоянного напряжения U, имеющему максимальную мощность P_m: пока мощность, выделяемая на нагрузке, меньше P_m, на конденсаторе поддерживается постоянное напряжение U. При дальнейшем росте тока нагрузки напряжение падает так, чтобы мощность, выделяемая на нагрузке, была постоянна и равна P_m.

1. На какую высоту поднимется жидкость между пластинами конденсатора, если её плотность $\rho_{пл}$, а удельное сопротивление $\rho_э$?

2. Допустим, предельная высота подъёма жидкости h известна. С какой скоростью будет двигаться жидкость вверх из конден-

сатора, если тот будет обрезан до высоты $h_0 = h/4$? Получите ответ для случая $UB < 2dg\rho_э\rho_{пл}$.



10-11.1.4. Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r, идеальной катушки индуктивности длиной D, имеющей N витков, каждый площадью S, и переменного сопротивления, начальное значение которого равно R_0.

1. Ключ замыкают. Какой ток будет течь через индуктивность, если подождать достаточно долго после замыкания ключа?

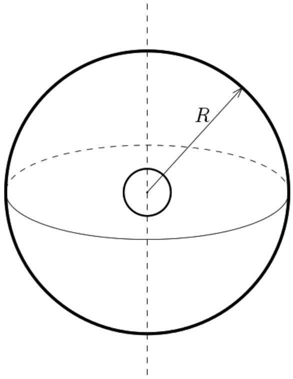
2. Если в катушку ввести сердечник, то её индуктивность вырастет в k раз. Какой будет индуктивность катушки, если сердечник введен на расстояние x ($x < D$)?

3. После установления тока в катушку начинают вводить сердечник с нулевой начальной скоростью и ускорением a. Одновременно с этим начинает меняться сопротивление R так, чтобы ток через катушку не менялся. Найдите зависимость сопротивления от времени.

Примечание: Индуктивность катушки без сердечника может быть вычислена по формуле: $L = \mu_0 N^2 S/D$, где μ_0 — магнитная постоянная (константа, считать известной), N — количество витков, D — длина катушки, а S — площадь сечения одного витка.

10-11.1.5. Сфера Дайсона — это гипотетическое искусственное сооружение, которое может быть построено цивилизацией вокруг звезды для максимального использования её энергии. Представляет собой сферу радиусом R, центр которой совпадает с центром звезды: в результате все излучения звезды может быть собрано. Неизвестно, сможет ли когда-нибудь человечество построить такую конструкцию, но некоторые оценки вы способны сделать уже сейчас.

1) Во-первых, нужно выбрать радиус сферы Дайсона для того, чтобы на ее поверхности было не слишком холодно и не



слишком горячо. Наиболее комфортной для человека считается температура около $23°C$. Оцените, каким должен быть радиус сферы Дайсона R для Солнца, чтобы температура поверхности сферы была комфортной для человека. При этом считайте, что суммарная мощность, излучаемая Солнцем равна $P_0 = 4 \cdot 10^{26}$ Вт. Сфера излучает тепло в окружающее пространство по закону Стефана — Больцмана: $j = \sigma T^4$, , где j — мощность излучения с единицы площади излучающей поверхности, T — температура излучающей поверхности в Кельвинах, а $\sigma \approx 5.7 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4) — постоянная Стефана — Больцмана.

2а) Пусть мы хотим жить на внутренней поверхности сферы. Чтобы создать иллюзию гравитации можно раскрутить сферу вокруг оси. Найдите, какой должна быть угловая скорость ω для того, чтобы груз на экваторе сферы действовал на её поверхность с такой же силой, как и на Земле. Считайте известными радиус сферы R, массу звезды M и ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли g.

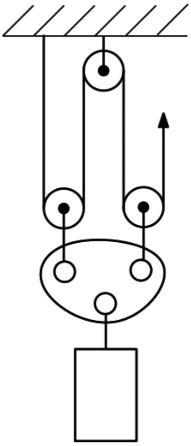
2б) Оцените эту угловую скорость для Солнца, взяв R, найденный в первом вопросе, $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг и $g = 10$ м/с^2. Гравитационная постоянная $G \approx 6.7 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2).

3а) Найдите в общем виде, в каком диапазоне широт предметы на внутренней поверхности сферы остаются на месте, если их не трогать? Коэффициент трения равен μ.

3б) Оцените результат, полученный в вопросе 3а, для рассматриваемой нами сферы Дайсона вокруг Солнца и $\mu = 0.5$.

Вариант 10-11.2

10-11.2.1. Для поднятия тяжёлых грузов альпинисты сооружают систему, называемую полиспастом. Идеализированный



полиспаст представляет собой систему блоков, дающую выигрыш в силе. Реальный блок имеет два радиуса — внешний, по которому проходит верёвка, и внутренний, по которому проходит вращение относительно оси, за которую закреплён блок. Внутри блока действует сила трения. Момент силы трения внутри блока постоянен и равен $M = 4$ Н·м. Внешний радиус блока равен $R = 6$ см.

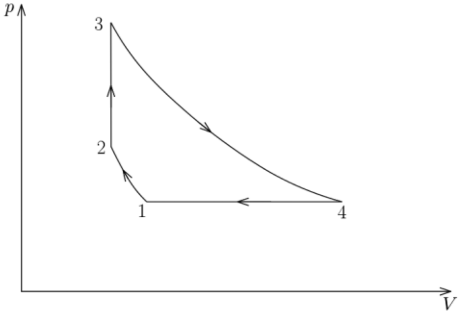
1. С каким усилием нужно тянуть за свободный конец верёвки, чтобы без ускорения поднимать груз массой 120 кг? Силой трения пренебречь.

2. Учтите силу трения и рассчитайте реальное усилие. При каком значении M использование системы для подъёма данного груза становится неоправданным?

3. Альпинист Петрович нашёл один идеальный блок (без трения)! Какой реальный блок ему надо заменить, чтобы добиться наибольшего выигрыша в силе?

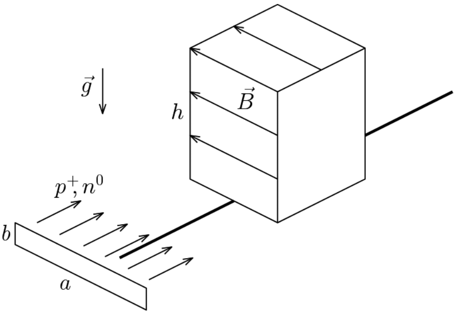
Считать, что все верёвки нерастяжимы и параллельны друг другу, кроме мест, где они проходят через блоки.

10-11.2.2. Тепловая машина, работающая по циклу, изображённому на рисунке, использует в качестве рабочего тела идеальный одноатомный газ. Известно, что минимальный объём в



процессе равен 1 л, а максимальный 128 л. Максимальное давление, достигаемое тепловой машиной $128 \cdot 10^5$ Па, а в процессе $2 \to 3$ к газу было подведено 14.4 кДж теплоты. В процессе $1 \to 2$ отсутствует теплообмен между газом и окружающей средой, а процесс $3 \to 4$ проходит при постоянной температуре.
1. Найдите отношение температур в точках 3 и 1;
2. Найдите КПД цикла.
Примечание: Уравнение адиабатического процесса $PV^{5/3} = const$. *Работа газа в изотермическом процессе может быть вычислена по формуле (здесь* T *— температура изотермы,* ν *— количество молей газа,* V_0 *и* V *— объем газа в начале и в конце процесса):* $A = \nu RT \ln(V/V_0)$.

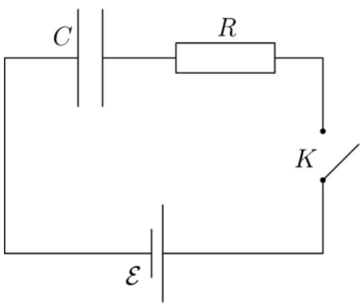
10-11.2.3. В реакторе имеется щель, высотой b, из которой летит параллельный пучок частиц (протоны и нейтроны). Напротив щели на горизонтальном рельсе стоит экспериментальная установка, которая может скользить по рельсу с трением (коэффициент трения μ). Частицы имеют скоростью v, направленную параллельно рельсу. Экспериментальная установка представляет собой ящик, у которого отсутствует две стенки: ближняя к щели и верхняя крышка.

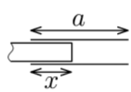


Ящик представляет собой куб со стороной $h \gg b$, имеет массу M и создаёт в своём внутреннем объёме однородное магнитное поле $B = m_0 v/eh$, направленное в горизонтальной плоскости перпендикулярно направлению летящих частиц. Стенки ящика поглощают попавшие на них частицы. Нижний край щели совпадает с нижним краем ящика по высоте.

1. В первом эксперименте из щели летят только нейтроны. Скорость вылетающих из реактора частиц v. При каком минимальном значении интенсивности пучка n $(1/(\text{см}^2 \cdot \text{с}))$ ящик сдвинется с места?
2. Ответьте на тот же вопрос, если из реактора летят нейтроны и протоны в соотношении 1:1 с той же скоростью и суммарной интенсивностью. Массу протона считать равной массе нейтрона $m_p = m_n = m_0$. Элементарный заряд e.
Влиянием силы тяжести на частицы пренебречь.

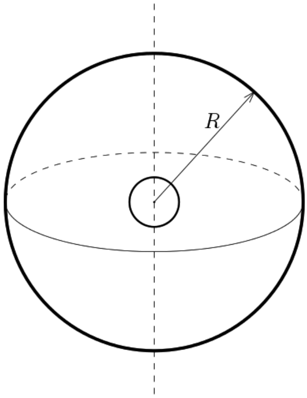
10-11.2.4. Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС $\mathcal{E}$, конденсатора ёмкостью C и резистора с сопротивлением R. Конденсатор имеет квадратные пластины со стороной a, расстояние между пластинами — d.





1. Какой ток I_1 будет течь через конденсатор сразу после замыкания ключа?
2. Если в конденсатор ввести квадратную пластину диэлектрика со стороной a, то его емкость вырастет в k раз. Какой будет емкость конденсатора, если диэлектрик введен на расстояние x $(x < a)$?
3. Найдите, с какой скоростью нужно начать вдвигать диэлектрическую пластину в конденсатор в тот момент, когда ток через конденсатор станет равен $I_2 = I_1/3$, чтобы сила тока в цепи перестала меняться.

10-11.2.5. Сфера Дайсона — это гипотетическое искусственное сооружение, которое может быть построено цивилизацией



вокруг звезды для максимального использования её энергии. Представляет собой сферу радиусом R, центр которой совпадает с центром звезды: в результате все излучения звезды может быть собрано. Неизвестно, сможет ли когда-нибудь человечество построить такую конструкцию, но некоторые оценки вы способны сделать уже сейчас.

1) Во-первых, нужно выбрать радиус сферы Дайсона для того, чтобы на ее поверхности было не слишком холодно и не слишком горячо. Наиболее комфортной для человека считается температура около $23°C$. Оцените, каким должен быть радиус сферы Дайсона R для Бетельгейзе, чтобы температура поверхности сферы была комфортной для человека. При этом считайте, что суммарная мощность, излучаемая Бетельгейзе, равна $P_0 = 2 \cdot 10^{31}$ Вт. Сфера излучает тепло в окружающее пространство по закону Стефана — Больцмана: $j = \sigma T^4$, где j — мощность излучения с единицы площади излучающей поверхности, T — температура излучающей поверхности в Кельвинах, а $\sigma \approx 5.7 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4) — постоянная Стефана — Больцмана.

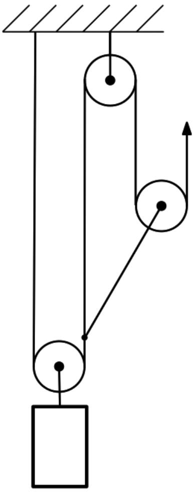
2а) Пусть мы хотим жить на внутренней поверхности сферы. Чтобы создать иллюзию гравитации можно раскрутить сферу вокруг оси. Найдите, какой должна быть угловая скорость ω для того, чтобы груз на экваторе сферы действовал на её поверхность с такой же силой, как и на Земле.

Считайте известными радиус сферы R, массу звезды M и ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли g.

2б) Оцените эту угловую скорость для Бетельгейзе, взяв R, найденный в первом вопросе, $M = 3 \cdot 10^{31}$ кг и $g = 10$ м/с^2. Гравитационная постоянная $G \approx 6.7 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2).
3а) Найдите в общем виде, в каком диапазоне широт предметы на внутренней поверхности сферы остаются на месте, если их не трогать? Коэффициент трения равен μ.
3б) Оцените результат, полученный в вопросе 3а, для рассматриваемой нами сферы Дайсона вокруг Бетельгейзе и $\mu = 0.5$.

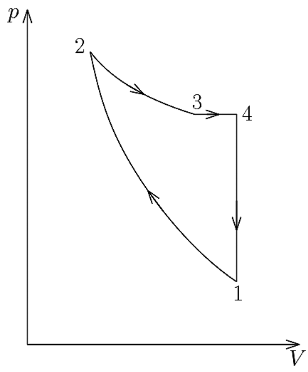
Вариант 10-11.3

10-11.3.1. Для поднятия тяжёлых грузов альпинисты сооружают систему, называемую полиспастом. Идеализированный



полиспаст представляет собой систему блоков, дающую выигрыш в силе. Реальный блок имеет два радиуса — внешний, по которому проходит верёвка, и внутренний, по которому проходит вращение относительно оси, за которую закреплён блок. Внутри блока действует сила трения (коэффициент трения $\mu = 0.3$). Внешний радиус блока $R = 3$ см, внутренний $r = 1$ см.
1. Рассчитайте идеальный (т. е. без учёта силы трения) выигрыш системы, изображённой на рисунке.
2. Учтите силу трения и рассчитайте реальный выигрыш данной системы. При каком значении коэффициента трения система становится бесполезной?
3. Альпинист Петрович нашёл один идеальный блок (без трения)! Какой блок с трением ему надо заменить, чтобы добиться максимального выигрыша в силе?
Считать, что все верёвки нерастяжимы и параллельны друг другу, кроме мест, где они проходят через блоки.

10-11.3.2. Тепловая машина, работающая по циклу, изображённому на рисунке, использует в качестве рабочего тела идеальный одноатомный газ. Известно, что минимальное давление в процессе равно 10^5 Па, а максимальное $32 \cdot 10^5$ Па. Максимальный объём, достигаемый тепловой машиной, равен 8 л, а в

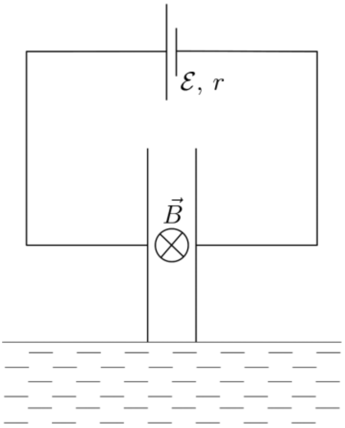


процессе $3 \to 4$ газ совершает работу 3200 Дж. В процессе $1 \to 2$ отсутствует теплообмен между газом и окружающей средой, а процесс $2 \to 3$ проходит при постоянной температуре.

1. Найдите отношение температур в точках 3 и 1;
2. Найдите КПД цикла.

Примечание: Уравнение адиабатического процесса $PV^{5/3} = const$. *Работа газа в изотермическом процессе может быть вычислена по формуле (здесь* T *— температура изотермы,* ν *— количество молей газа,* V_0 *и* V *— объем газа в начале и в конце процесса):* $A = \nu RT \ln(V/V_0)$.

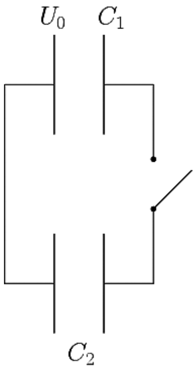
10-11.3.3. Для поднятия несжимаемой незаряженной проводящей жидкости был сконструирован следующий насос. Высокий конденсатор с расстоянием между пластинами, равным d, и шириной пластин, равной a, касается нижним краем проводя-



щей жидкости так, что обкладки конденсатора перпендикулярны поверхности. Внутри конденсатора создаётся горизонтальное постоянное однородное магнитное поле с индукцией B, параллельное пластинам конденсатора. Конденсатор подключён к аккумулятору с величиной ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r.

1) На какую высоту поднимется жидкость между пластинами конденсатора, если её плотность $\rho_{\text{пл}}$, а удельное сопротивление $\rho_{\text{э}}$?

2) Допустим, предельная высота подъёма жидкости h известна. С какой скоростью будет двигаться вода вверх из конденсатора, если тот будет обрезан до высоты $h_0 = h/2$?

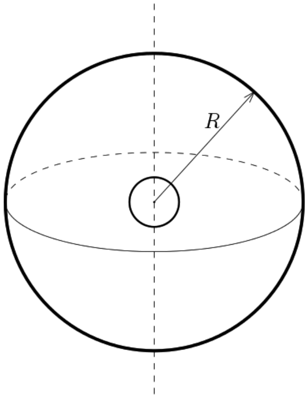


10-11.3.4. В схеме, изображенной на рисунке, конденсатор C_1 заряжен до напряжения U_0, конденсатор C_2 разряжен. Ключ замыкают. Подождав достаточно долгое время, расстояние между обкладками конденсатора C_1 начинают медленно увеличивать (со скоростью V). Площадь обкладок конденсаторов S, начальное расстояние между обкладками конденсатора C_1 – d, конденсатора C_2 – $3d$.

1. Найдите напряжение на конденсаторе C_2 перед тем, как начали раздвигать обкладки;
2. Найдите зависимость заряда от времени на конденсаторе C_1, приняв за начало отсчета времени момент, когда обкладки начали раздвигать.

10-11.3.5. Сфера Дайсона — это гипотетическое искусственное сооружение, которое может быть построено цивилизацией вокруг звезды для максимального использования её энергии. Представляет собой сферу радиусом R, центр которой совпадает с центром звезды: в результате все излучения звезды может быть собрано. Неизвестно, сможет ли когда-нибудь человечество построить такую конструкцию, но некоторые оценки вы способны сделать уже сейчас.

1) Во-первых, нужно выбрать радиус сферы Дайсона для того, чтобы на ее поверхности было не слишком холодно и не слишком горячо. Наиболее комфортной для человека счита-



ется температура около $23°C$. Оцените, каким должен быть радиус сферы Дайсона R для Солнца, чтобы температура поверхности сферы была комфортной для человека. При этом считайте, что суммарная мощность, излучаемая Солнцем равна $P_0 = 4 \cdot 10^{26}$ Вт. Сфера излучает тепло в окружающее пространство по закону Стефана — Больцмана: $j = \sigma T^4$, , где j — мощность излучения с единицы площади излучающей поверхности, T — температура излучающей поверхности в Кельвинах, а $\sigma \approx 5.7 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4) — постоянная Стефана — Больцмана.

2а) Пусть мы хотим жить на внутренней поверхности сферы. Чтобы создать иллюзию гравитации можно раскрутить сферу вокруг оси. Найдите, какой должна быть угловая скорость ω для того, чтобы груз на экваторе сферы действовал на её поверхность с такой же силой, как и на Земле. Считайте известными радиус сферы R, массу звезды M и ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли g.

2б) Оцените эту угловую скорость для Солнца, взяв R, найденный в первом вопросе, $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг и $g = 10$ м/с^2. Гравитационная постоянная $G \approx 6.7 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2).

3а) Найдите в общем виде, в каком диапазоне широт предметы на внутренней поверхности сферы остаются на месте, если их не трогать? Коэффициент трения равен μ.

3б) Оцените результат, полученный в вопросе 3а, для рассматриваемой нами сферы Дайсона вокруг Солнца и $\mu = 0.5$.

РЕШЕНИЯ

Отборочный тур

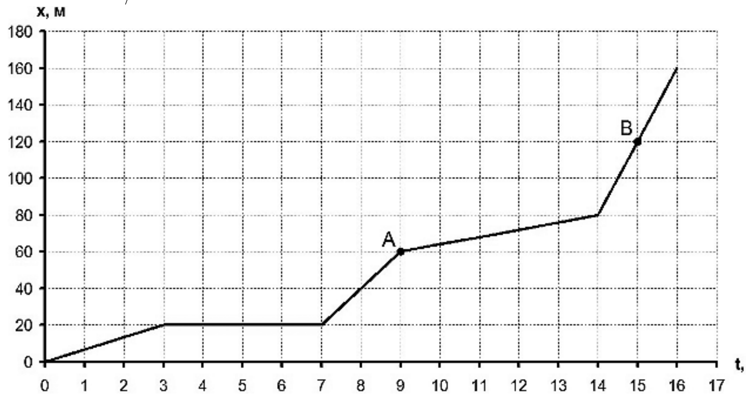
ЗАДАЧИ ДЛЯ 7 КЛАССА

Вариант 7.1

7.1.1. Определим скорость как отношение пройденного пути к промежутку времени, за которое бегун преодолевает данную дистанцию. Выразим дистанцию в сантиметрах: 100 м = 10000 см, а время в минутах: 15 с = 0.25 мин.
Таким образом, получаем искомую скорость 40000 см/мин.
Ответ: 40000.

7.1.2. Для определения средней скорости необходимо весь пройденный путь разделить на все время движения.
Пусть $s = 115$ км, $s_1 = 50$ км, $s_2 = 20$ км и $s_3 = 45$ км, скорости, соответственно, равны $v_1 = 50$ км/ч, $v_2 = 40$ км/ч и $v_3 = 30$ км/ч, а время выразим как $t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \frac{s_3}{v_3}$. Тогда искомая скорость равна 38.3 км/ч.
Ответ: 38.3 км/ч.

7.1.3. Для определения средней скорости необходимо весь пройденный путь разделить на все время движения.
По графику зависимости пройденного телом расстояния от времени находим, что средняя скорость тела на участке АВ равна 10 км/ч.

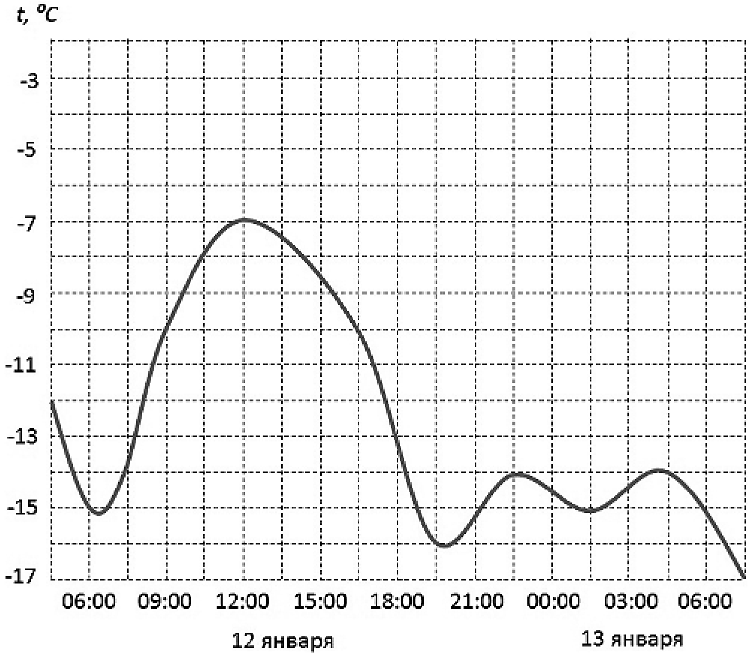


Ответ: 10.

7.1.4. Пусть расстояние, которое преодолел Сережа равно x. Тогда автобус преодолел расстояние, равное $450 + x$. Автобус, двигаясь со скоростью 68.4 км/час, за 30 секунд преодолел 570 метров.
Таким образом, расстояние x равно 120 метров. Искомая скорость Сережи равна 4 м/с.
Ответ: 4 м/с.

7.1.5. Нам известно, что велосипедист проехал путь от А до В. Пути, пройденные передним и задним колесами велосипеда одинаковые, потому что расстояние между колесами велосипеда не изменилось.
Ответ: 1.

7.1.6. По графику изменения температуры воздуха находим, что максимальная температура воздуха в промежутке времени от 00:00 до 00:60 13 января была -14 градуса Цельсия.



Ответ: -14.

7.1.7. Определим, что колбаса составляет 5/9 общей массы, хлеб — 3/9, масло — 1/9. Соответствующие объемы равны: колбасы $V_к = \frac{5M}{9\rho_1}$, хлеба $V_х = \frac{3M}{9\rho_2}$, масло $V_м = \frac{M}{9\rho_3}$, где M — общая масса продуктов. Таким образом, получаем суммарный объем $V = 0.1$л. Плотность в кг/м^3 численно равна плотности в г/л. Получаем: $V = \text{М} \cdot (\frac{5}{\rho_1} + \frac{3}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3})/9$. Найдем, что М=54.5 г. В итоге, масса тюбика с продуктами $\text{М}_т = \text{М} + m_0 = 54.5 + 30 = 84.5$ г.
Ответ: $\text{М}_т = 84.5$ г.

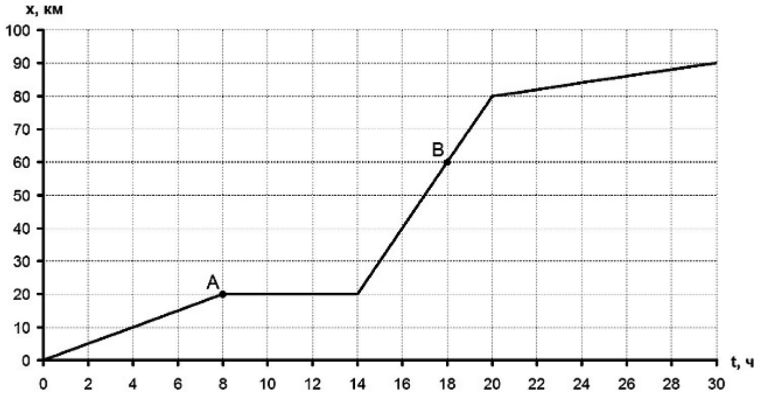
7.1.8. Да, может.
Пусть R — равнодействующая сил, действующих на данное тело. Рассмотрим случай, когда силы в $F_1 = 3H$ и $F_2 = 4H$ направлены в одну сторону, но на тело действует ещё одна сила в $F_3 = 5H$, направленная вдоль той же прямой, но в противоположную сторону. Тогда $R = (3 + 4) - 5 = 2H$.
Возможен другой вариант. Если силы $F_1 = 3H$ и $F_2 = 4H$ направлены в разные стороны и сила, равная $1H$ направлена также как и сила $F_2 = 4H$. Тогда получим, $R = 4 - 3 + 1 = 2H$.
Ответ: Да, может.

Вариант 7.2

7.2.1. Нам известно, что уровень воды в сосуде опускается на 1 см каждые 6 секунд. Переведем данные значения в метры и часы соответственно.
Определим искомую величину, как $\frac{0{,}01 \cdot 0{,}25}{6/3600} = 1.5$.
Ответ: 1.5.

7.2.2. Для определения средней скорости необходимо весь пройденный путь разделить на все время движения.
Пусть s — общий путь, который пролетает самолет. Сначала необходимо найти скорость на последней трети пути. Определим ее как $s/(\frac{0{,}5s}{150} + \frac{0{,}5s}{100}) = 120$ м/с.
Тогда определим среднюю скорость самолета как $s/(\frac{s}{3 \cdot 150} + \frac{s}{3 \cdot 100} + \frac{s}{3 \cdot 240}) = 144$ м/с.
Ответ: 144 м/с.

7.2.3. Для определения средней скорости необходимо весь пройденный путь разделить на все время движения.
По графику зависимости пройденного телом расстояния от времени находим, что средняя скорость тела на участке AB равна 4 км/ч.

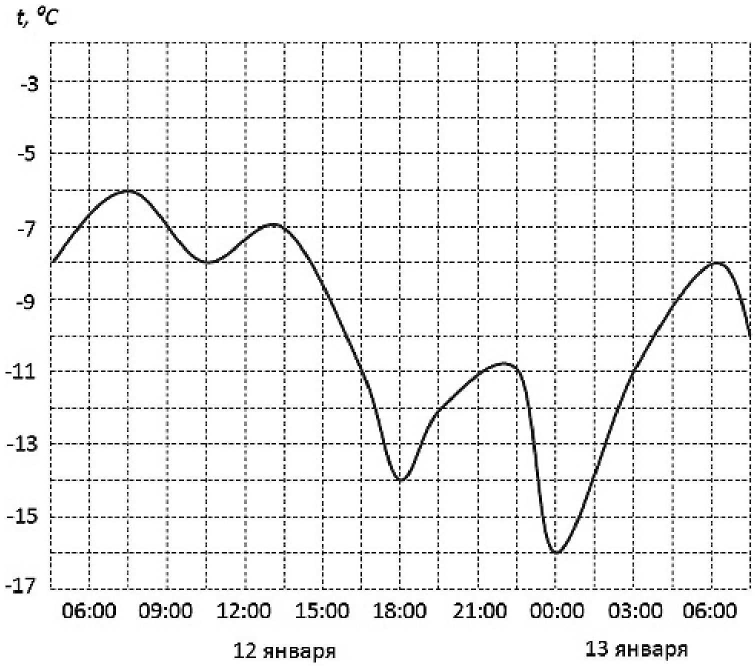


Ответ: 4.

7.2.4. Пусть расстояние, которое преодолел Вася равно x. Тогда автобус преодолел расстояние, равное $540 + x$. Автобус, двигаясь со скоростью 79.2 км/час, за 30 секунд преодолел 660 метров.
Таким образом, расстояние x равно 120 метров. Искомая скорость Сережи равна 4 м/с.
Ответ: 4 м/с.

7.2.5. Так как минутная стрелка часов за один час совершает полный оборот, то пройденный путь, который проходит конец стрелки равен $2\pi R$, R — это длина конца стрелки.
Таким образом, искомый путь равен 31.4 см.
Ответ: 31.4 см.

7.2.6. По графику изменения температуры воздуха находим, что минимальная температура воздуха в промежутке времени от 06:00 до 12:00 12 января была -8 градуса Цельсия.



Ответ: -8.

7.2.7. Определим массу космического бутерброда как $M = m - m_0 = 60$ г. Масса колбасы — $60 \cdot 4/8 = 30$ г, хлеба – $60 \cdot 3/8 = 22.5$ г, масла — $60 \cdot 1/8 = 7.5$ г. Плотность в кг/м^3 численно равна плотности в г/л. Объем каждого продукта в литрах: «колбаса» — $30/450$, «хлеб» — $22.5/700$, «масло» — $7.5/900$. Таким образом, получим, что суммарный объем с миллилитрах $V = 1000 \cdot (30/450 + 22.5/700 + 7.5/900) = 107.1$ мл.
Ответ: $V = 107.1$ мл.

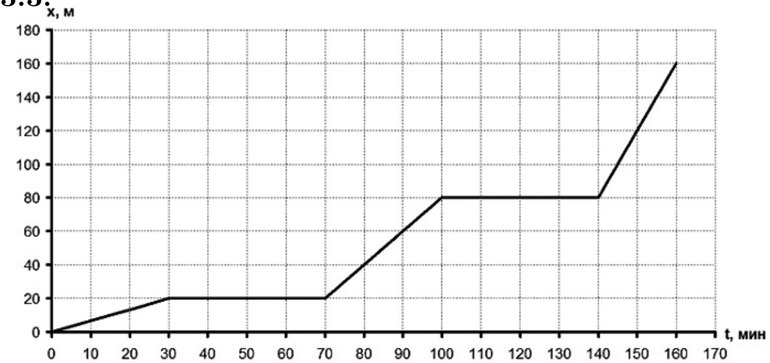
7.2.8. Да, может.
Пусть R — равнодействующая сил, действующих на данное тело. Рассмотрим случай, когда силы в $F_1 = 3H$ и $F_2 = 4H$ направлены в одну сторону, но на тело действует ещё одна сила в $F_3 = 1H$, направленная также, как и две предыдущие. Тогда $R = 3 + 4 + 1 = 8H$.
Возможен другой вариант. Если силы $F_1 = 3H$ и $F_2 = 4H$ направлены в разные стороны и сила, равная $7H$ направлена также как и сила $F_2 = 4H$. Тогда получим, $R = 4 - 3 + 7 = 8H$.
Ответ: Да, может.

Вариант 7.3

7.3.1. Будем считать, что в году 365 суток. Чтобы выразить это время в часах, необходимо вспомнить, что 1 сутки это 24 часа. Таким образом, получаем, что 1 год — это 8760 часов.
Ответ: 8760.

7.3.2. Для определения средней скорости зайчика необходимо весь пройденный путь разделить на все время движения.
Пусть x — это длина всего пути. Тогда можно время, затраченное на преодоление половины пути, t_1 выразить как $0.5x/15$. А время, затраченное на преодоление второй половины пути, t_2 выражается из уравнения $0.5x = v_2 \cdot 0.5 \cdot t_2 + v_3 \cdot 0.5 \cdot t_2$. Находим, что $t_2 = \frac{x}{v_2+v_3}$. Таким образом, находим, что средняя скорость $v = \frac{x}{t_1+t_2} = 7.5$ км/ч.
Ответ: 7.5 км/ч.

7.3.3.



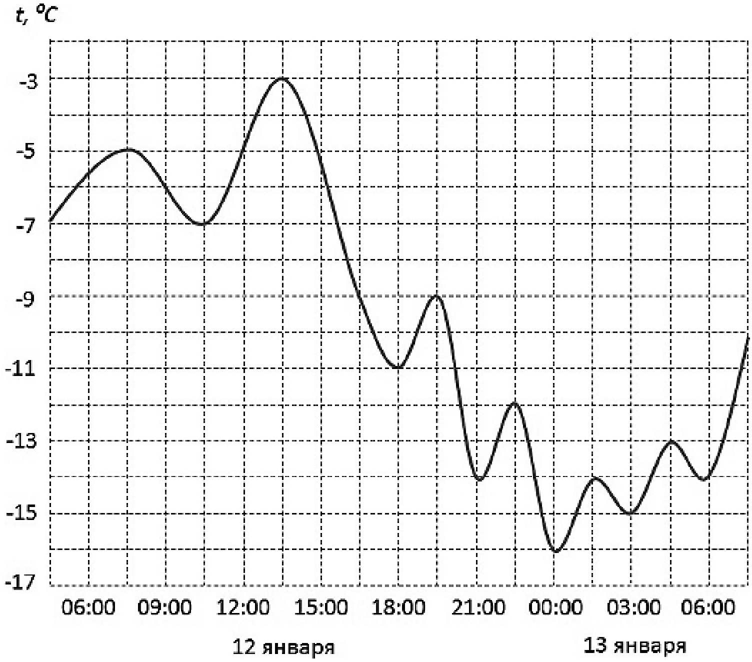
Рассмотрим график зависимости пройденного телом расстояния от времени. В промежутке времени от 60 до 70 мин — тело не двигалось, а в промежутке от 70 до 120 минут тело прошло 60 метров.
Таким образом, по графику можно определить, что искомое расстояние равно 60 м.
Ответ: 60.

7.3.4. Пусть расстояние, которое преодолел Костя равно x. Тогда автобус преодолел расстояние, равное $600 + x$. Автобус, двигаясь со скоростью 64.8 км/час, за 40 секунд преодолел 720 метров.

Таким образом, расстояние x равно 120 метров. Искомая скорость Сережи равна 3 м/с.
Ответ: 3 м/с.

7.3.5. Линейное перемещение это вектор, соединяющий положения движущейся точки в начале и в конце некоторого промежутка времени. Так как минутная стрелка часов за один час совершает полный оборот, то линейное перемещение конца стрелки равно нулю.
Ответ: 0.

7.3.6.



По графику изменения температуры воздуха можно определить, что максимальная температура воздуха в промежутке времени от 09:00 до 18:00 12 января было -3 градуса Цельсия.
Ответ: -3.

7.3.7. Определим, что колбаса составляет 5/10 общей массы, хлеб — 4/10, масло — 1/10. Соответствующие объемы равны: колбасы $V_к = \frac{5M}{10\rho_1}$, хлеба $V_х = \frac{4M}{10\rho_2}$, масло $V_м = \frac{M}{10\rho_3}$, где M — общая масса продуктов. Таким образом, получаем суммарный

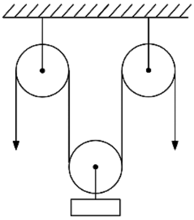
объем $V = 0.15$л. Плотность в кг/м^3 численно равна плотности в г/л.
Получаем: $V = \text{М} \cdot (\frac{5}{\rho_1} + \frac{4}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3})/10$. Найдем, что М=83.6 г. В итоге, масса тюбика с продуктами $\text{М}_\text{т} = \text{М} + m_0 = 83.6 + 25 = 108.$ г.
Ответ: $\text{М}_\text{т} = 108.6$ г.

7.3.8. Да, может.
Пусть R — равнодействующая сил, действующих на данное тело. Рассмотрим случай, когда силы в $F_1 = 3H$ и $F_2 = 4H$ направлены в одну сторону, но на тело действует ещё одна сила в $F_3 = 1H$, направленная также, как и две предыдущие. Тогда $R = 3 + 4 + 1 = 8H$.
Возможен другой вариант. Если силы $F_2 = 4H$ и $F_3 = 5H$ направлены в одну сторону и сила, равная $F_1 = 3H$ направлена противоположно им. Тогда получим, $R = 4 + 5 - 3 = 6H$.
Ответ: Да, может.

ЗАДАЧИ ДЛЯ 8 КЛАССА

Вариант 8.1

8.1.1. Представим, что на левом и правом концах нити находятся грузы. Пусть левый груз опустился на a см, правый — на b см, а центральный груз поднялся на c см. Для того чтобы левый груз опустился на a см, необходимо, чтобы длина всей нити увеличилась на a см при условии неподвижности остальных грузов. Аналогично для правого груза.



Для того чтобы центральный груз поднялся на c см, необходимо, чтобы длина нити уменьшилась на $2c$ см при условии неподвижности остальных грузов, так как центральный груз висит на двух нитях.

Получается, что при одновременном указанном перемещении всех грузов длина нити должна измениться на $(a + b - 2c)$ см. Но так как нить считается нерастяжимой, то изменение длины нити равно нулю, то есть выполнено равенство:

$$a + b - 2c = 0.$$

В нашем случае $a = 3$ см, $b = 5$ см. Тогда можем найти c:

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{3+5}{2} \text{ см} = 4 \text{ см}.$$

Ответ: 4.

8.1.2. Количество теплоты, необходимое для отопления, не изменится, поэтому верно следующее равенство:

$$q_1 m_1 = q_2 m_2,$$

q_1, q_2 — удельная теплота сгорания дров и угля соответственно, m_1, m_2 — массы дров и угля соответственно.

То есть, вместо m_1 кг дров нужно m_2 кг угля. Чтобы стоимость отопления была такой же, необходимо:

$$C_1 m_1 = C_2 m_2,$$

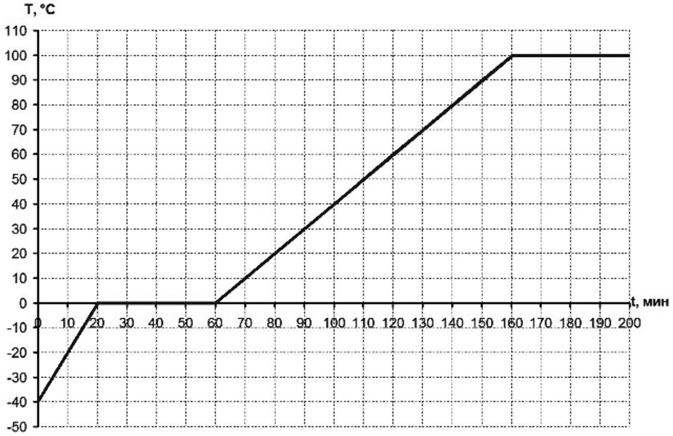
C_1, C_2 — стоимость дров и угля соответственно.

$$C_2 = C_1 \cdot \frac{m_1}{m_2} = C_1 \cdot \frac{q_2}{q_1} =$$

$$= 128 \text{ рубль/тонна} \cdot \frac{29.3 \text{ МДж/кг}}{15 \text{ МДж/кг}} \approx 250 \text{ рубль/тонна.}$$

Ответ: 250.

8.1.3. Опишем, что происходит с содержимым кастрюли с течением времени на каждом участке графика.



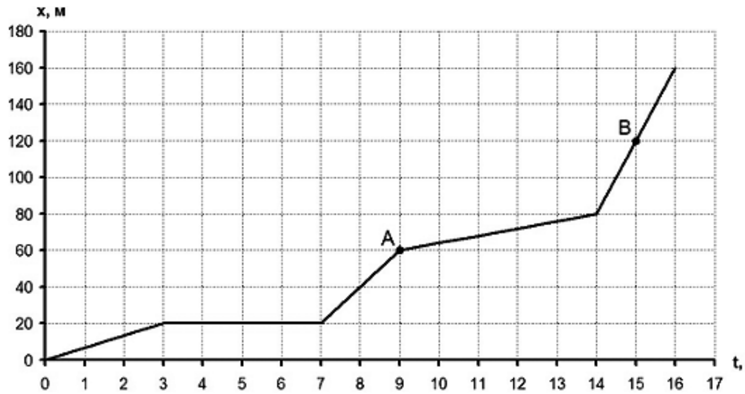
От 0 до 20 мин: нагрев льда от $-40\ ^\circ C$ до $0\ ^\circ C$.
От 20 до 60 мин: плавление льда.
От 60 до 160 мин: нагрев воды от $0\ ^\circ C$ до $100\ ^\circ C$.
От 160 до 200 мин: кипение воды.
Выберем верные утверждения:
1) Верно, так как с 60 минуты начинается нагрев воды, полученной из полностью растаявшего льда.
2) Неверно, так как со 160 минуты начинается процесс кипения воды.
3) Неверно, так как на 40 минуте продолжается процесс плавления льда, следовательно, в кастрюле находилась смесь воды и льда.
4) Верно (объяснение аналогично предыдущему пункту).
5) Верно, так как с 80 до 120 минут продолжался нагрев воды.
Ответ: 145.

8.1.4. На участке АВ тело двигалось в одном и том же направлении на протяжении всего пути, так как с течением времени координата тела не уменьшалась. Следовательно, расстояние, пройденное телом, можно вычислить как разность конечной и начальной координат тела:

$$S = x_B - x_A = (120 - 60)\text{ м} = 60\text{ м}.$$

Время, затраченное на преодоление этого расстояния, находим как разность моментов времени, когда тело находилось в точке В и в точке А:

$$t = t_B - t_A = (15 - 9)\text{ с} = 6\text{ с}.$$



Тогда среднюю скорость вычисляем по формуле:

$$V = \frac{S}{t} = \frac{60\text{ м}}{6\text{ с}} = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: 10.

8.1.5. Вычислим суммарное расстояние, пройденное мотоциклом (движение на каждом участке происходило с постоянной скоростью).

$$S = V_1t_1 + V_2t_2 + V_3t_3,$$

$V_1,\ V_2,\ V_3$ — скорость на отдельных участках пути,
$t_1,\ t_2,\ t_3$ — время движения по отдельным участкам пути.
Суммарное время, потраченное на преодоление расстояния S, вычисляем по формуле:

$$t = t_1 + t_2 + t_3.$$

Тогда среднюю скорость вычисляем по формуле:

$$V = \frac{S}{t} = \frac{(5 \cdot 12 + 9 \cdot 10 + 15 \cdot 8)\ \text{м/с} \cdot \text{с}}{(12 + 10 + 8)\ \text{с}} = 9\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: 9.

8.1.6. Сила Архимеда, действующая на ломик, вычисляется по формуле:

$$F_a = \rho g V,$$

ρ — плотность жидкости (в нашем случае — ртути)
V — объем погруженной части тела (в нашем случае — это весь объем тела)

$$F_a = (13.5 \cdot 600) \cdot 10^{-3}\ \text{кг} \cdot 10\ \text{м/с}^2 = 81\ \text{Н}.$$

Ответ: 81.

8.1.7. Пусть L — длина участка реки, который прошли лодки, время движения первой лодки t_1, второй — t_2. Скорость второй лодки в озере v_2 в n раз больше, чем первой v_1.
Пусть скорость течения реки относительно озера равна u. Лодки двигались по реке в одном направлении, следовательно, скорость каждой из лодок относительно озера равны $v_1 + u$ и $v_2 + u$ соответственно.
Каждая из лодок двигалась равномерно и прямолинейно, следовательно:

$$(v_1 + u)t_1 = L,$$

$$(v_2 + u)t_2 = L.$$

Из первого уравнения выразим v_1:

$$v_1 = \frac{L}{t_1} - u.$$

Используя $v_2 = nv_1$ и выражение для v_1, выразим u из второго уравнения:

$$n\frac{L}{t_1} - nu + u = \frac{L}{t_2},$$

$$u = \frac{L}{n-1}\left(\frac{n}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right),$$

$$u = \frac{20\ \text{км}}{2-1}\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right)\ \frac{1}{\text{ч}} = 3\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Ответ: 3 км/ч.

8.1.8.

Обозначения:

c — удельная теплоемкость воды;

L — удельная теплота парообразования воды;

m — масса воды в кружке;

ΔT — разность температуры кипения ($100\ °C$) и начальной температуры воды;

P — мощность кипятильника;

t_1 — время нагревания воды до температуры кипения;

t_2 — время, за которое выкипит 10% воды.

Пусть Q_1 — количество теплоты, необходимое для нагревания воды до температуры кипения.

$$Q_1 = cm\Delta T.$$

По закону сохранения энергии, поскольку теплоёмкостью кипятильника, кружки и теплопотерями можно пренебречь, тепло, полученное от кипятильника за время t_1, идет полностью на нагрев воды до температуры кипения.

$$Q_1 = Pt_1.$$

Тогда можем выразить мощность кипятильника:

$$P = \frac{cm\Delta T}{t_1}.$$

Пусть Q_2 — количество теплоты, необходимое для того, чтобы выкипело 10 % воды.

$$Q_2 = 0.1mL.$$

Это же количество теплоты вода получит от кипятильника за время t_2.

$$Q_2 = Pt_2.$$

Используем выражения для P и Q_2, чтобы вычислить t_2:

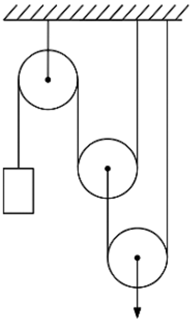
$$t_2 = 0.1mL \cdot \frac{t_1}{cm\Delta T} = 0.1t_1 \cdot \frac{L}{c\Delta T},$$

$$t_2 = 0.1 \cdot 10 \text{ мин} \cdot \frac{2258 \ \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}}{4.2 \ \ \frac{\text{кДж}\cdot\ {}^\circ C}{\text{кг}} \cdot (100-20)\ {}^\circ C} \approx$$
$$\approx 6.72 \text{ мин} \approx 6 \text{ мин } 43 \text{ с.}$$

Ответ: 6 мин 43 с.

Вариант 8.2

8.2.1. Сначала рассмотрим нижний блок: так как он опустился на $\Delta l = 3$ см, длина нитей слева и справа от него должна увеличиться на Δl и общее изменение длины нити, на которой он висит, должно составить $2\Delta l$.



Но эта нить нерастяжима и ее длина не меняется, следовательно, средний блок должен опуститься на высоту $2\Delta l$. Аналогичные рассуждения можно провести и со средним блоком: длина нити, на которой он висит, должна увеличиться на $2 \cdot 2\Delta l = 4\Delta l$, но так как нить нерастяжима ее и длина не может измениться, груз должен подняться на высоту $4\Delta l = 4 \cdot 3 = 12$ см.

Ответ: 12.

8.2.2. Обозначим через $Z_1,\ Z_2$ затраты на отопление в месяц при использовании дров и угля соответственно.

$C_1,\ C_2$ — стоимость дров и угля соответственно. $m_1,\ m_2$ — массы дров и угля соответственно.

Очевидно, что

$$Z_1 = C_1 m_1,\ Z_2 = C_2 m_2,$$

$q_1,\ q_2$ — удельная теплота сгорания дров и угля соответственно,

Количество теплоты, необходимое для отопления, не изменится, поэтому верно следующее равенство:

$$q_1 m_1 = q_2 m_2.$$

То есть, вместо m_1 кг дров нужно m_2 кг угля, где

$$m_2 = m_1 \frac{q_1}{q_2} = \frac{Z_1}{C_1} \cdot \frac{q_1}{q_2}.$$

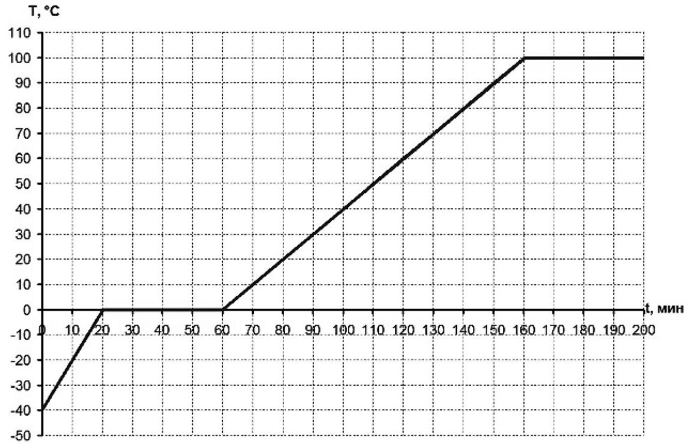
Тогда можем найти Z_2:

$$Z_2 = Z_1 \cdot \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{q_1}{q_2} = 300 \text{ рубль/мес} \times$$

$$\times \frac{83 \text{ рубль/тонна}}{128 \text{ рубль/тонна}} \cdot \frac{15 \text{ МДж/кг}}{29.3 \text{ МДж/кг}} \approx \approx 100 \text{ рубль/мес.}$$

Ответ: 100.

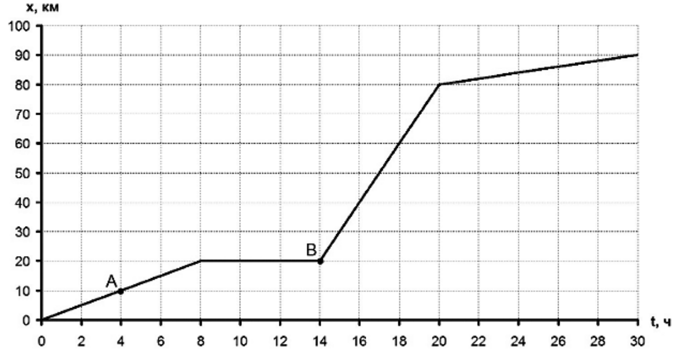
8.2.3. Опишем, что происходит с содержимым кастрюли с течением времени на каждом участке графика.



От 0 до 20 мин: нагрев льда от $-40\ ^\circ C$ до $0\ ^\circ C$.
От 20 до 60 мин: плавление льда.
От 60 до 160 мин: нагрев воды от $0\ ^\circ C$ до $100\ ^\circ C$.
От 160 до 200 мин: кипение воды.
Выберем верные утверждения:
1) Неверно, так как через 10 мин продолжался нагрев льда.
2) Неверно, так как от 160 до 200 мин вода продолжала кипеть.
3) Неверно, так как на 40 минуте продолжался процесс плавления льда, следовательно, в кастрюле была смесь воды и льда.
4) Верно, так как в первые 20 минут лед только нагревался и не менял своего агрегатного состояния.
5) Верно (объяснение аналогично п.3)
Ответ: 45.

8.2.4. На участке AB тело двигалось в одном и том же направлении на протяжении всего пути, так как с течением времени координата тела не уменьшалась. Следовательно, расстояние, пройденное телом, можно вычислить как разность конечной и начальной координат тела:

$$S = x_B - x_A = (20 - 10)\ \text{км} = 10\ \text{км}.$$



Время, затраченное на преодоление этого расстояния, находим как разность моментов времени, когда тело находилось в точке B и в точке A:

$$t = t_B - t_A = (14 - 4)\ \text{ч} = 10\ \text{ч}.$$

Тогда среднюю скорость вычисляем по формуле:

$$V = \frac{S}{t} = \frac{10\ \text{км}}{10\ \text{ч}} = 1\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Ответ: 1.

8.2.5. Вычислим суммарное расстояние, пройденное мотоциклом (движение на каждом участке происходило с постоянной скоростью).

$$S = S_1 + S_2 = (24 + 26)\ \text{м} = 50\ \text{м}$$

$S_1,\ S_2$ — длина отдельных участков пути,
$V_1,\ V_2$ — скорость на отдельных участках пути,
$t_1,\ t_2$ — время движения по отдельным участкам пути.

Суммарное время, потраченное на преодоление расстояния S, вычислим по формуле:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{S_1}{V_1} + \frac{S_2}{V_2} = \frac{24 \text{ м}}{8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}} + \frac{26 \text{ м}}{13 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 5 \text{ с}.$$

Тогда среднюю скорость вычисляем по формуле:

$$V = \frac{S}{t} = \frac{50 \text{ м}}{5 \text{ с}} = 10 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: 10.

8.2.6. Сила Архимеда, действующая на ломик, вычисляется по формуле:

$$F_a = \rho g V,$$

ρ — плотность жидкости (в нашем случае — ртути)
V — объем погруженной части тела (в нашем случае — это весь объем тела).

$$F_a = (13.5 \cdot 500) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 \approx 68 \text{ Н}.$$

Ответ: 68.

8.2.7. Пусть L — длина участка реки, который прошли лодки, время движения первой лодки t_1, второй — t_2. Скорость второй лодки в озере v_2 в n раз больше, чем первой v_1.
Пусть скорость течения реки относительно озера равна u. Лодки двигались по реке в одном направлении, следовательно, скорость каждой из лодок относительно озера равны $v_1 + u$ и $v_2 + u$ соответственно.
Каждая из лодок двигалась равномерно и прямолинейно, следовательно:

$$(v_1 + u)t_1 = L,$$

$$(v_2 + u)t_2 = L.$$

Из первого уравнения выразим v_1:

$$v_1 = \frac{L}{t_1} - u.$$

Используя $v_2 = nv_1$ и выражение для v_1, выразим u из второго уравнения:

$$n\frac{L}{t_1} - nu + u = \frac{L}{t_2},$$

$$u = \frac{L}{n-1}\left(\frac{n}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right),$$

$$u = \frac{24\ \text{км}}{3-1}\left(\frac{3}{6} - \frac{1}{4}\right)\ \frac{1}{\text{ч}} = 3\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Ответ: 3 км/ч.

8.2.8. Введем следующие обозначения:
m — масса льда в кастрюле;
δT=100 C — разность конечной и начальной температуры воды;
c — удельная темлоемкость воды;
t_1 — время нагревания до температуры кипения;
Q_1 — количество тепла, необходимое для плавления льда и нагрева воды до температуры кипения;
Q_2 — количество тепла, затраченное на выкипание воды;
P — мощность плиты;
L — удельная теплота парообразования;
λ — удельная теплота плавления;
t_2 — время кипения воды;
x — выкипевшая часть воды.
Для плавления льда и нагревания воды от 0°C до температуры кипения необходимо количество тепла $Q_1 = m\lambda + mc\Delta T$. Количество тепла, полученное водой от кипятильника при нагревании до 100°C, равняется $Q_1 = Pt_1$.
Отсюда

$$P = \frac{m\lambda + mc\Delta T}{t_1}.$$

Количество тепла полученное водой за время t_2, равняется

$$Q_2 = Pt_2 = t_2\frac{m\lambda + mc\Delta T}{t_1}.$$

Это тепло израсходовано на испарение воды

$$Q_2 = t_2\frac{m\lambda + mc\Delta T}{t_1} = mL.$$

Отсюда $x = t_2\frac{\lambda + c\Delta T}{t_1 L} = 2\frac{330000+4200\cdot 100}{2258000} = 0.66$.
Ответ: 0.66.

Вариант 8.3

8.3.1. Когда левый конец нити опустили на 4 см, блок, через который она перекинута, опустился на 2 см. Тогда правый блок поднялся на 2 см, а груз поднялся на 4 см.
Ответ: 4 см.

8.3.2. Обозначим через $Z_1,\ Z_2$ затраты на отопление в месяц при использовании дров и угля соответственно.
$C_1,\ C_2$ — стоимость дров и угля соответственно. $m_1,\ m_2$ — массы дров и угля соответственно.
Очевидно, что

$$Z_1 = C_1 m_1,\ Z_2 = C_2 m_2,$$

$q_1,\ q_2$ — удельная теплота сгорания дров и угля соответственно,
Количество теплоты, необходимое для отопления, не изменится, поэтому верно следующее равенство:

$$q_1 m_1 = q_2 m_2.$$

То есть, вместо m_2 кг угля нужно m_1 кг дров, где

$$m_1 = m_2\frac{q_2}{q_1} = \frac{Z_2}{C_2}\cdot\frac{q_2}{q_1}.$$

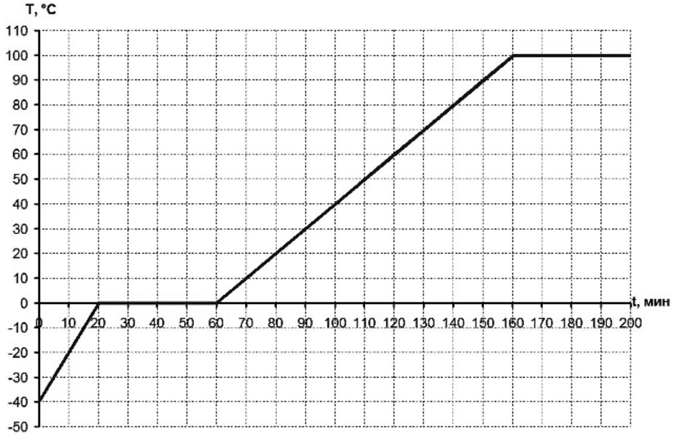
Тогда можем найти $Z_1 - Z_2$:

$$Z_1 - Z_2 = C_1 m_1 - Z_2 = C_1\cdot\frac{Z_2}{C_2}\cdot\frac{q_2}{q_1} - Z_2 = Z_2\left(\frac{C_1}{C_2}\cdot\frac{q_2}{q_1} - 1\right),$$

$$Z_1 - Z_2 = 100\ \text{рубль/мес}\left(\frac{128}{83}\cdot\frac{29.3}{15} - 1\right) \approx 201\ \text{рубль/мес}.$$

Ответ: 201.

8.3.3. Опишем, что происходит с содержимым кастрюли с течением времени на каждом участке графика.



От 0 до 20 мин: нагрев льда от $-40\ ^{\circ}C$ до $0\ ^{\circ}C$.

От 20 до 60 мин: плавление льда.

От 60 до 160 мин: нагрев воды от $0\ ^{\circ}C$ до $100\ ^{\circ}C$.

От 160 до 200 мин: кипение воды.

Выберем верные утверждения:

1) Верно, так как вплоть до 200 минут вода точно кипит.

2) Верно, так как процесс плавления льда в первые 20 минут еще не начался.

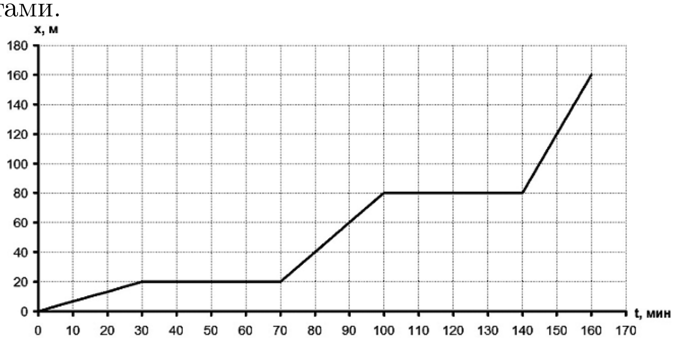
3) Верно, так как на 40 минуте продолжался процесс плавления льда, следовательно, в кастрюле была смесь воды и льда.

4) Неверно (см. п.2)

5) Неверно, так как в процессе плавления льда температура содержимого кастрюли не изменяется.

Ответ: 123.

8.3.4. Второй час — это промежуток времени между 60 и 120 минутами.



Тело двигалось в одном и том же направлении на протяжении всего пути, так как с течением времени координата тела не уменьшалась. Следовательно, расстояние, пройденное телом, можно вычислить как разность конечной и начальной координат тела:

$$S = x_{120} - x_{60} = (80 - 20)\ \text{м} = 60\ \text{м}.$$

Ответ: 60.

8.3.5. $S_1,\ S_2$ — длина отдельных участков пути,
$V_1,\ V_2$ — скорость на отдельных участках пути,
$t_1,\ t_2$ — время движения по отдельным участкам пути.
Вычислим суммарное расстояние, пройденное мотоциклом (движение на каждом участке происходило с постоянной скоростью).

$$S = S_1 + S_2 = V_1 t_1 + S_2 = (20 \cdot 50 + 20)\ \text{м} = 1020\ \text{м}.$$

Суммарное время, потраченное на преодоление расстояния S, вычислим по формуле:

$$t = t_1 + t_2 == t_1 + t_2 = (50 + 10)\ \text{с} = 60\ \text{с}.$$

Тогда среднюю скорость вычисляем по формуле:

$$V = \frac{S}{t} = \frac{1020\ \text{м}}{60\ \text{с}} = 17\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: 17.

8.3.6. Сила Архимеда, действующая на ломик, вычисляется по формуле:

$$F_a = \rho g V,$$

ρ — плотность жидкости (в нашем случае — ртути)
V — объем погруженной части тела (в нашем случае — это весь объем тела)

$$F_a = (13.5 \cdot 450) \cdot 10^{-3}\ \text{кг} \cdot 10\ \text{м/с}^2 \approx 61\ \text{Н}.$$

Ответ: 61.

8.3.7. Пусть L — длина участка реки, который прошли лодки, время движения первой лодки t_1, второй —t_2. Скорость второй лодки в озере v_2 в n раз больше, чем первой v_1.
Пусть скорость течения реки относительно озера равна u. Лодки двигались по реке в одном направлении, следовательно, скорость каждой из лодок относительно озера равны v_1+u и v_2+u соответственно.
Каждая из лодок двигалась равномерно и прямолинейно, следовательно:

$$(v_1 + u)t_1 = L,$$

$$(v_2 + u)t_2 = L.$$

Из первого уравнения выразим v_1:

$$v_1 = \frac{L}{t_1} - u.$$

Используя $v_2 = nv_1$ и выражение для v_1, выразим u из второго уравнения:

$$n\frac{L}{t_1} - nu + u = \frac{L}{t_2},$$

$$u = \frac{L}{n-1}\left(\frac{n}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right),$$

$$u = \frac{30\text{ км}}{5-1}\left(\frac{5}{5} - \frac{1}{3}\right)\ \frac{1}{\text{ч}} = 5\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Ответ: 5 км/ч.

8.3.8. Обозначения:
m — масса льда в кастрюле;
ΔT — разность между конечной и исходной температурой воды;
c — удельная теплоемкость воды;
t_1 — время плавления льда;
t_2 — время нагревания воды
Q_1 — количество тепла, затраченное на плавление льда;
Q_2 — количество тепла, затраченное на нагревание воды;
P — мощность плиты;
λ — удельная теплота плавления.

Для плавления льда необходимо количество тепла $Q_1 = m\lambda$. Количество тепла, полученное водой от кипятильника за время плавления льда, равняется $Q_1 = Pt_1$. Отсюда

$$P = \frac{m\lambda}{t_1}.$$

Количество тепла полученное водой за время нагревания воды t_2

$$Q_2 = Pt_2 = \frac{m\lambda t_2}{t_1}.$$

Это тепло израсходовано на нагревание воды на ΔT градусов

$$Q_2 = mc\Delta T.$$

Отсюда

$$\Delta T = \frac{\lambda t_2}{ct_1} = 330000 \cdot \frac{6}{4200} \cdot 10 = 47.$$

Ответ: 47 °C.

ЗАДАЧИ ДЛЯ 9 КЛАССА

Вариант 9.1

9.1.1. В состоянии равновесия действующие на кубик сила тяжести и сила Архимеда должны быть численно равны и противоположны по направлению. Таким образом:

$$F_{\text{А}} = F_{\text{т}} = m_{\text{к}} g,$$

где $m_{\text{к}} = \rho_{\text{п}} l^3 = 2.5 \cdot 10^{-3}$ — масса кубика. Тогда сила Архимеда

$$F_{\text{А}} = 2.5 \cdot 10^{-3} * 10 = 25 \text{ мН}.$$

Ответ: 25.

9.1.2. Путь, который пролетело тело, можно описать следующей формулой:

$$S = V_0 t + \frac{gt^2}{2},$$

тогда зная, что за первую секунду тело пролетело $S(t=1) = 7$ м, можно выразить начальную скорость $V_0 = 2$ м/с. За две секунды тело пролетело путь

$$S(t=2) = 2 \cdot 2 + \frac{10 \cdot 2^2}{2} = 24 \text{ м}.$$

Таким образом, за вторую секунду тело прошло путь

$$S = S_2 - S_1 = 17 \text{ м}.$$

Ответ: 17.

9.1.3. Резисторы R_2 и R_3 соединены последовательно, они вместе соединены параллельно с резистором R_1. А резистор R_4 соединен последовательно со всем предыдущим участком цепи. Таким образом, для того, чтобы найти мощность на R_4, необходимо воспользоваться формулой

$$P = I^2 \cdot R_4.$$

Сила тока I в резисторе R_4 равна:

$$I = \frac{U}{R_{\text{общ}}}.$$

Для того, чтобы выразить общее сопротивление $R_{\text{общ}}$, необходимо рассмотреть все участки цепи по порядку. Сопротивление на участке, где расположены резисторы R_1, R_2 и R_3:

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}.$$

Тогда $R_{123} = 1$ Ом. Общее сопротивление:

$$R_{\text{общ}} = R_{123} + R_4 = 2 \text{ Ом}.$$

Тогда сила тока: $I = \frac{10}{2} = 5$ А. В этом случае мощность, выделяемая четвертым резистором:

$$P = 5^2 \cdot 1 = 25 \text{ Вт}.$$

Ответ: 25.

9.1.4. Следует заметить, что для решения задачи необходимо рассмотреть моменты сил, действующие на первый и второй грузы.

1) Рассчитаем такую максимально возможную длину левого плеча, чтобы система все еще оставалась в состоянии покоя, то есть $M_1 = M_2$, где момент силы в общем случае $M = Fl$. За ось вращения необходимо взять левый край стола. Тогда для первого груза плечом будет являться расстояние l_1, а для второго $l_2 + l_3$. Сила F, действующая на оба груза — это сила тяжести. Таким образом, расписывая моменты, получаем:

$$m_1 g l_1 = m_2 g (l_2 + l_3).$$

Выражая l_1 получаем

$$l_1 = \frac{m_2(l_2 + l_3)}{m_1} = \frac{2(50 + 70)}{1} = 240 \text{ см}.$$

2) Аналогичным образом для случая, когда второй груз почти перевешивает первый, за ось вращения берется правый край стола и $M_1 = M_2$. Тогда

$$m_1 g(l_1 + l_3) = m_2 g l_2.$$

Выражая l_1 получаем

$$l_1 = \frac{m_2 l_2 - m_1 l_3}{m_1} = \frac{2 \cdot 50 - 1 \cdot 70}{1} = 30 \text{ см}.$$

Ответ: 24030.

9.1.5. Движение двух вершин треугольника вокруг третьей закрепленной вершины является движением по окружностям с разными радиусами. По теореме Пифагора длина длинного катета равна 4 см. Обозначим его за $R_1 = 4$ см и короткий катет за $R_2 = 3$ см, а также скорость движения вершины на расстоянии R_1 за $V_1 = 12$ см. При движении по окружности с разными радиусами относительно одного центра угловые скорости вершин треугольника равны:

$$\omega_1 = \omega_2.$$

Тогда

$$\frac{v_1}{R_1} = \frac{v_2}{R_2}.$$

Исходя из этого можно выразить скорость вершины короткого катета:

$$V_1 = \frac{12 \cdot 3}{4} = 9 \text{ м/с}.$$

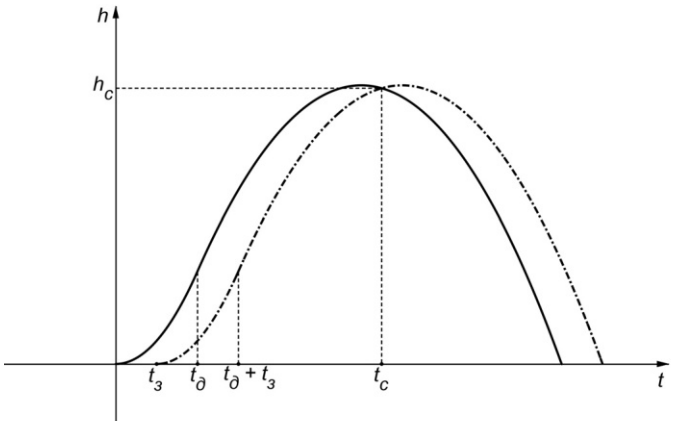
Ответ: 9.

9.1.6. Мощность, выделяемая на нелинейном элементе, равна:

$$P = IU = 3 \cdot 20 = 60 \text{ Вт}.$$

Ответ: 60.

9.1.7. 1) Изобразим схематично графики зависимости высоты от времени для ракеты 1 (непрерывная кривая) и для ракеты 2 (пунктирная кривая). Вторая кривая повторяет первую со сдвигом по времени на $t_з = 2$ с. Точка пересечения графиков определяет высоту $h_с$ и время $t_с$ столкновения. Очевидно, что столкновение произойдет после набора первой ракетой максимальной высоты.



2) Первая ракета наберет максимальную высоту, когда ее скорость будет равна нулю. Это произойдет через время

$$t_{\max} = t_д + \frac{t_д \cdot a}{g} = 16 \text{ с},$$

где $t_д$ — время работы двигателя, a — ускорение ракеты при работающем двигателе. К этому времени у второй ракеты тоже закончится топливо, и она будет двигаться с ускорением $-g$.

В результате высоты нахождения ракет в момент столкновения можно выразить сходным образом:

$$h_1 = \frac{at_д^2}{2} + at_д(t_с - t_д) - \frac{g(t_с - t_д)^2}{2},$$

$$h_2 = \frac{at_д^2}{2} + at_д(t_с - t_д - t_з) - \frac{g(t_с - t_д - t_з)^2}{2}.$$

3) В момент столкновения $h_1 = h_2$. Решая уравнение $h_1 = h_2$ относительно $t_с$, получаем

$$t_с = \frac{at_д}{g} + t_д + \frac{t_з}{2} = 17 \text{ с}.$$

4) Высоту столкновения получаем подстановкой $t_с$ в выражение для h_1:

$$h_с = h_1(t_с) = \frac{at_д^2}{2} + at_д\left(\frac{at_д}{g} + t_д + \frac{t_з}{2} - t_д\right) -$$
$$-\frac{1}{2}g\left(\frac{at_д}{g} + at_д + \frac{at_з}{2} - at_д\right)^2;$$

$$h_с = \frac{1}{2}at_д^2(1 + a/g) - \frac{gt_з^2}{8} = 955 \text{ м}.$$

Ответ: 955 м.

9.1.8. Нагрев проволоки происходит из-за выделения в ней тепла при протекании тока. Согласно закону Джоуля — Ленца тепловая мощность тока равна

$$P = \frac{U^2}{R},$$

где $R = \rho_с l/S$. За время t в проводнике выделится количество теплоты

$$Q = \frac{U^2St}{\rho_с l},$$

в результате чего проводник нагреется на температуру

$$\Delta T = \frac{Q}{mc},$$

где $m = \rho_п lS$. В итоге получаем

$$\Delta T = \frac{U^2St}{\rho_п lS\rho_с l} = \frac{U^2t}{\rho_п l^2\rho_с} = 2.3 \text{ К}.$$

Важно не забыть перевести удельное сопротивление в Ом $\cdot$ м.

Ответ: 2.3 К.

Вариант 9.2

9.2.1. В состоянии равновесия сила тяжести должна уравновешиваться силой Архимеда и силой натяжения нити. Таким образом:

$$F_{\text{А}} + T = m_{\text{к}} g,$$

где $m_{\text{к}} = \rho_{\text{п}} l^3 = 2.7$ кг — масса кубика, T — сила натяжения нити. Выражая T и подставляя выражение для силы Архимеда $F_{\text{А}} = \rho_{\text{в}} g V_{\text{к}}$ и массу кубика можем записать:

$$T = m_{\text{к}} g - \rho_{\text{в}} g V_{\text{к}} = 2.7 \cdot 10 - 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 17 \text{ Н}.$$

Ответ: 17.

9.2.2. Путь, который пролетело тело, можно описать следующей формулой:

$$S = V_0 t + \frac{gt^2}{2},$$

тогда зная, что за первые две секунды тело пролетело $S_1 = 24$ м, можно выразить начальную скорость $V_0 = 2$ м/с. Таким образом, глубина ямы равна пути, который пролетело тело за 3 с:

$$S(t = 3) = 2 \cdot 3 + \frac{10 \cdot 3^2}{2} = 51 \text{ м}.$$

Ответ: 51.

9.2.3. Из рисунка можно заметить, что через резисторы R_3 и R_4 ток идти не будет, так как они соединены параллельно с проводом, сопротивлением которого можно пренебречь. Тогда мы можем сделать вывод, что резисторы R_1 и R_2 соединены параллельно друг с другом и они вместе соединены последовательно с резистором R_5.

Таким образом, для того, чтобы найти мощность на R_5, необходимо воспользоваться формулой

$$P = I^2 \cdot R_5,$$

Сила тока I в резисторе R_5 равна

$$I = \frac{U}{R_{\text{общ}}}.$$

Для того, чтобы выразить общее сопротивление $R_{\text{общ}}$, необходимо рассмотреть все участки цепи по порядку. Сопротивление на участке, где расположены резисторы R_1 и R_2:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Тогда $R_{12} = 2$ Ом. Общее сопротивление:

$$R_{\text{общ}} = R_{12} + R_5 = 5 \text{ Ом}.$$

Тогда сила тока: $I = \frac{10}{5} = 2$ А. В этом случае мощность, выделяемая пятым резистором:

$$P = 2^2 \cdot 3 = 12 \text{ Вт}.$$

Ответ: 12.

9.2.4. Следует заметить, что для решения задачи необходимо рассмотреть моменты сил, действующие на первый и второй грузы.

1) Рассчитаем максимальное количество песка, которое можно засыпать в левую чашу, чтобы система все еще оставалась в состоянии покоя, то есть $M_1 = M_2$, где момент силы в общем случае $M = Fl$. За ось вращения необходимо взять левый край стола. Тогда для первого груза плечом будет являться расстояние l_1, а для второго $l_2 + l_3$. Сила F, действующая на оба груза — это сила тяжести. Массу досыпанного песка обозначим за $m_{\text{п}}$. Приравнивая моменты, получаем:

$$(m_1 + m_{\text{п}})gl_1 = m_2 g(l_2 + l_3).$$

Выражая $m_{\text{п}}$, получаем

$$m_{\text{п}} = \frac{m_2(l_2 + l_3) - m_1 l_1}{l_1} = \frac{2(50 + 70) - 1 \cdot 40}{40} = 5 \text{ кг} = 5000 \text{ г}.$$

2) Аналогичным образом для случая, когда второй груз почти перевешивает первый, за ось вращения берется правый край стола и $M_1 = M_2$. Тогда

$$m_1 g(l_1 + l_3) = (m_2 + m_{\text{п}})gl_2.$$

Выражая $m_{\text{п}}$, получаем

$$m_{\text{п}} = \frac{m_1(l_1 + l_3) - m_2 l_2}{l_2} = \frac{1(40 + 70) - 2 * 50}{50} = 0.2 \text{ кг} = 200 \text{ г}.$$

Ответ: 5000200.

9.2.5. Движение двух вершин треугольника вокруг третьей закрепленной вершины является движением по окружностям с разными радиусами. По теореме Пифагора длина катета, соединяющего прямой угол и центр, вокруг которого крутится треугольник, равна 4 см. Обозначим его за $R_1 = 4$ см и гипотенузу за $R_2 = 5$ см, а также скорость движения вершины на расстоянии R_2 за $V_2 = 12$ см. При движении по окружности с разными радиусами относительно одного центра угловые скорости вершин треугольника равны:

$$\omega_1 = \omega_2.$$

Тогда

$$\frac{v_1}{R_1} = \frac{v_2}{R_2}.$$

Исходя из этого можно выразить скорость вершины короткого катета:

$$V_2 = \frac{10 \cdot 4}{5} = 8 \text{ м/с}.$$

Ответ: 8.

9.2.6. Мощность, выделяемая на нелинейном элементе, равна:

$$P = IU = 3 \cdot 40 = 120 \text{ Вт}.$$

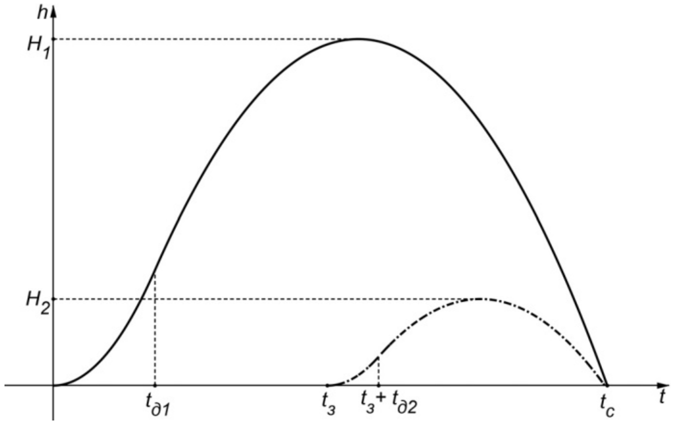
Ответ: 120.

9.2.7. 1) Очевидно, что вторая ракета не сможет догнать первую на этапе подъема первой ракеты, поскольку стартует она позже, а двигатель работает меньшее время. Значит, столкновение может произойти только на участке падения первой ракеты.

2) Из рисунка видно, что минимальное время запуска второй ракеты после запуска первой будет реализовано, только если вторая ракета догонит первую в момент их удара о землю.

3) Вычислим время полета первой ракеты $t_{\text{с}}$. Оно складывается из времени работы двигателя $t_{\text{д}1}$, времени ее полета до максимальной высоты и времени свободного падения с этой высоты:

$$t_{\text{с}} = t_{\text{д}1} + \frac{t_{\text{д}1}a}{g} + \left(\frac{2H_1}{g}\right)^{\frac{1}{2}},$$



где H_1 — высота полета, которая равна

$$H_1 = \frac{at_{\text{д}1}^2}{2} + g\frac{1}{2}\frac{(at_{\text{д}1})^2}{g} = \frac{1}{2}(at_{\text{д}1})^2 1 + \frac{a}{g}.$$

Подставив это выражение в предыдущее, после упрощения получаем:

$$t_{\text{с}} = t_{\text{д}1}\left(1 + \frac{a}{g} + \left(\frac{a(1+a/g)}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

4. Время полета второй ракеты находится аналогичным образом.

5. Минимальное время запуска второй ракеты после первой будет равно разности этих времен:

$$t_3 = (t_{д1} - t_{д2}) \left(1 + \frac{a}{g} + \frac{a(1 + a/g)}{g}\right)^{\frac{1}{2}} = 11.2 \text{ с.}$$

Ответ: 11.2 с.

9.2.8. Нагрев проволоки происходит из-за выделения в ней тепла при протекании тока. Согласно закону Джоуля — Ленца тепловая мощность тока равна

$$P = \frac{U^2}{R},$$

где $R = \rho_с l/S$. За время t в проводнике выделится количество теплоты

$$Q = \frac{U^2 St}{\rho_с l},$$

в результате чего проводник нагреется на температуру

$$\Delta T = \frac{Q}{mc},$$

где $m = \rho_п lS$. В итоге получаем

$$\Delta T = \frac{U^2 St}{\rho_п lSc\rho_с l} = \frac{U^2 t}{c\rho_п l^2 \rho_с} = 2.8 \text{ К.}$$

Важно не забыть перевести удельное сопротивление в Ом · м.
Ответ: 2.8 К.

Вариант 9.3

9.3.1. Выражение для силы Архимеда выглядит следующим образом:

$$F_А = \rho_в g V_к,$$

где $V_к = \frac{l^3}{2} = 32 \cdot 10^{-6}$ м^3 — объем части кубика, погруженной в воду. Тогда сила Архимеда

$$F_А = 1000 \cdot 10 \cdot 32 \cdot 10^{-6} = 320 \text{ мН.}$$

Ответ: 320.

9.3.2. Путь, который пролетело тело, можно описать следующей формулой:

$$S = V_0 t + \frac{gt^2}{2},$$

тогда зная, что за три секунды тело пролетело $S_1 = 51$ м, можно выразить начальную скорость:

$$V_0 = \frac{S}{t} - \frac{gt^2}{2} = 2 \text{ м/с}.$$

Ответ: 2.

9.3.3. Резисторы R_1 и R_2 соединены параллельно, R_3 и R_4 тоже соединены параллельно. Вместе две пары резисторов соединены последовательно. Таким образом, для того, чтобы найти мощность, выделяемую на R_4, необходимо воспользоваться формулой

$$P = \frac{U^2}{R_4}.$$

Сопротивление на участке, где расположены резисторы R_3 и R_4:

$$\frac{1}{R_{34}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}.$$

Тогда $R_{34} = 3$ Ом, аналогично $R_{12} = 2$ Ом. Так как участки цепи с резисторами 1, 2 и 3, 4 соединены последовательно, то общая сила тока $I = I_{12} = I_{34} = \frac{U}{R_{\text{общ}}}$, где $R_{\text{общ}} = R_{12} + R_{34} = 5$ Ом – общее сопротивление. Тогда

$$I_{34} = \frac{10}{5} = 2 \text{ А}.$$

Напряжение на участке цепи с R_3 и R_4:

$$U(R_{34}) = U(R_4) = U(R_3) = I_{34} R_{34} = 6 \text{ В}.$$

В этом случае мощность, выделяемая четвертым резистором:

$$P = \frac{6^2}{6} = 6 \text{ Вт}.$$

Ответ: 6.

9.3.4. Следует заметить, что для решения задачи необходимо рассмотреть моменты сил, действующие на первый и второй грузы.

1) Рассчитаем максимальное количество песка, которое можно убрать из правой чаши, чтобы система все еще оставалась в состоянии покоя, то есть $M_1 = M_2$, где момент силы в общем случае $M = Fl$. За ось вращения необходимо взять левый край стола. Тогда для первого груза плечом будет являться расстояние l_1, а для второго $l_2 + l_3$. Сила F, действующая на оба груза — это сила тяжести. Массу убранного песка обозначим за $m_{п}$. Приравнивая моменты, получаем:

$$m_1 g l_1 = (m_2 - m_{п}) g (l_2 + l_3).$$

Выражая $m_{п}$, получаем

$$m_{п} = \frac{m_2(l_2 + l_3) - m_1 l_1}{l_2 + l_3} = \frac{2(50 + 70) - 1 \cdot 180}{50 + 70} = 0.5 \text{ кг} = 500 \text{ г}.$$

2) Аналогичным образом для случая, когда отсыпают песок из левой чаши, и второй груз почти перевешивает первый, за ось вращения берется правый край стола и $M_1 = M_2$. Тогда

$$(m_1 - +m_{п}) g (l_1 + l_3) = m_2 g l_2.$$

Выражая $m_{п}$, получаем

$$m_{п} = \frac{m_1(l_1 + l_3) - m_2 l_2}{l_1 + l_3} = \frac{1(180 + 70) - 2 \cdot 50}{180 + 70} = 0.6 \text{ кг} = 600 \text{ г}.$$

Ответ: 600500.

9.3.5. Введем следующие обозначения: $\omega_{в}$, $V_{в} = 10$ м/с и $R_{в}$ — угловая скорость, линейная скорость вершины квадрата и расстояние от центра кручения до вершины квадрата. Для стороны квадрата, соответственно: $\omega_{с}$, $V_{с}$ и $R_{с}$. Расстояние $R_{в}$ является половиной диагонали квадрата. А диагональ можно найти по теореме Пифагора. Тогда:

$$R_{в} = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2} \text{ см}.$$

Расстояние от центра кручения до середины стороны равно половине стороны квадрата, то есть $R_с = 1$ см. Движение двух точек вокруг третьей закрепленной точки является движением по окружностям с разными радиусами. При движении по окружности с разными радиусами относительно одного центра угловые скорости вершины и середины стороны:

$$\omega_1 = \omega_2.$$

Тогда

$$\frac{V_с}{R_с} = \frac{V_в}{R_в}.$$

Исходя из этого можно выразить скорость середины стороны:

$$V_с = \frac{7 \cdot 1}{\sqrt{2}} \approx 5 \text{ м/с}.$$

Ответ: 5.

9.3.6. Мощность, выделяемая на нелинейном элементе, равна:

$$P = IU = 6 \cdot 40 = 240 \text{ Вт}.$$

Ответ: 240.

9.3.7. Ускорение ракеты, летящей вниз, $a_{вн}$ будет больше ускорения такой же ракеты, летящей вверх $a_{вв}$ на величину $2g$, поскольку ускорение летящей вверх ракеты будет на величину g меньше, чем у свободно летящей (без гравитации), а у летящей вниз на величину g больше. К этому выводу можно прийти также, используя законы динамики. Таким образом:

$$a_{вн} = a_{вв} + 2g.$$

Поскольку ракеты проходят расстояние H, то

$$H = \frac{a_{вв} t_1^2}{2} = \frac{a_{вн} t_2^2}{2} = \frac{(a_{вв} + 2g) t_2^2}{2}.$$

Откуда получаем

$$t_1 = t_2 \left(1 + \frac{2g}{a_{вв}}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.4 \text{ с}.$$

Ответ: 1.4 с.

9.3.8. Нагрев проволоки происходит из-за выделения в ней тепла при протекании тока. Согласно закону Джоуля — Ленца тепловая мощность тока равна

$$P = \frac{U^2}{R},$$

где $R = \rho_{\text{с}} l/S$. За время t в проводнике выделится количество теплоты

$$Q = \frac{U^2 S t}{\rho_{\text{с}} l},$$

в результате чего проводник нагреется на температуру

$$\Delta T = \frac{Q}{mc},$$

где $m = \rho_{\text{п}} l S$. В итоге получаем

$$\Delta T = \frac{U^2 S t}{\rho_{\text{п}} l S c \rho_{\text{с}} l} = \frac{U^2 t}{c \rho_{\text{п}} l^2 \rho_{\text{с}}} = 2.0 \text{ К}.$$

Важно не забыть перевести удельное сопротивление в Ом · м.
Ответ: 2.0 К.

ЗАДАЧИ ДЛЯ 10 КЛАССА

Вариант 10.1

10.1.1. Направим ось x вдоль направления движения Гены. Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось x:

$$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)v.$$

Здесь m_1 и v_1, m_2 и v_2 — массы и скорости Гены и вагона, соответственно, v — проекция на ось x скорости вагона с Геной. Отсюда

$$|v| = \left|\frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}\right| \approx 2 \text{ м/с}.$$

Ответ: 2.

10.1.2. Направим ось y вертикально вниз. Запишем II закон Ньютона для грузов с массами m_1 и m_2 в проекции на ось y:

$$-m_1a_1 = m_1g - T,$$

$$m_2a_2 = m_2g - T.$$

Общее выражение для ускорений $|a_1| = |a_2| = a$.
Из системы уравнений получаем:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g = 5 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: 5.

10.1.3. Резисторы R_2 и R_3 соединены последовательно, они вместе соединены параллельно с резистором R_1. А резистор R_4 соединен последовательно со всем предыдущим участком цепи. Таким образом, для того, чтобы найти мощность на R_4, необходимо воспользоваться формулой

$$P = I^2 \cdot R_4.$$

Сила тока I в резисторе R_4 равна силе тока во всем участке цепи:

$$I = \frac{U}{R_{\text{общ}}}.$$

Для того, чтобы выразить общее сопротивление $R_{\text{общ}}$, необходимо рассмотреть все участки цепи по порядку. Сопротивление на участке, где расположены резисторы R_1, R_2 и R_3:

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}.$$

Тогда $R_{123} = 1$ Ом. Общее сопротивление:

$$R_{\text{общ}} = R_{123} + R_4 = 2 \text{ Ом}.$$

Тогда сила тока: $I = \frac{10}{2} = 5$ А. В этом случае мощность, выделяемая четвертым резистором:

$$P = 5^2 \cdot 1 = 25 \text{ Вт}.$$

Ответ: 25.

10.1.4. Количество тепла, необходимое для нагрева воды: $Q_{\text{нагр}} = cm(T_2 - T_1)$, где T_2 — температура кипения воды, T_1 — температура плавления льда.
Для выкипания 10% воды ей необходимо дополнительно передать количество теплоты $Q_{\text{пар}} = 0,1Lm$.
Мощность кипятильника равна $N = \Delta Q/\Delta t$. Считая, что мощность постоянна, составим пропорцию:

$$\frac{Q_{\text{нагр}}}{t_1} = \frac{Q_{\text{пар}}}{t_2}.$$

Отсюда получаем время, потраченное на выкипания 10% воды:

$$t_2 = \frac{0,1Lt_1}{c(T_2 - T_1)} = 403 \text{ с}.$$

Ответ: 403.

10.1.5. На шарик действуют сила тяжести mg и силы Архимеда со стороны двух жидкостей $\rho_1 g V_1$ и $\rho_2 g V_2$. По второму закону Ньютона:

$$mg - \rho_1 g V_1 - \rho_2 g V_2 = 0.$$

Пусть ρ_0 и V — плотность шарика и его объём, соответственно. Тогда $m = \rho_0 V$, $V = V_1 + V_2$, и уравнение можно привести к виду

$$\rho_0 V = \rho_1 V_1 + \rho_2 (V - V_1).$$

Из условия задачи мы знаем, что в керосин погружена 1/8 шарика, то есть $V_1/V = 1/8$. Используя уравнение, выразим отношение V_2 к V через плотности:

$$\frac{1}{8} = \frac{V_2}{V} = \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}.$$

Отсюда находим ρ_0:

$$\rho_0 = \frac{\rho_2 - \rho_1 + 8\rho_1}{8} = 975\ \text{кг/м}^3.$$

Ответ: 975.

10.1.6. Следует заметить, что для решения задачи необходимо рассмотреть моменты сил, действующие на первый и второй грузы.

1) Рассчитаем такую максимально возможную длину левого плеча, чтобы система все еще оставалась в состоянии покоя, то есть $M_1 = M_2$, где момент силы в общем случае $M = Fl$. За ось вращения необходимо взять левый край стола. Тогда для первого груза плечом будет являться расстояние l_1, а для второго $l_2 + l_3$. Сила F, действующая на оба груза — это сила тяжести. Таким образом, расписывая моменты, получаем:

$$m_1 g l_1 = m_2 g (l_2 + l_3).$$

Выражая l_1 получаем

$$l_1 = \frac{m_2(l_2 + l_3)}{m_1} = \frac{2(50 + 70)}{1} = 240\ \text{см}.$$

2) Аналогичным образом для случая, когда второй груз почти перевешивает первый, за ось вращения берется правый край стола и $M_1 = M_2$. Тогда

$$m_1 g (l_1 + l_3) = m_2 g l_2.$$

Выражая l_1 получаем

$$l_1 = \frac{m_2 l_2 - m_1 l_3}{m_1} = \frac{2 \cdot 50 - 1 \cdot 70}{1} = 30 \text{ см.}$$

Ответ: 24030.

10.1.7. Потенциальная энергия сжатой пружины

$$E = \frac{k(\Delta x)^2}{2}, \text{где } \Delta x = l/n.$$

После пережигания нити потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию грузов

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

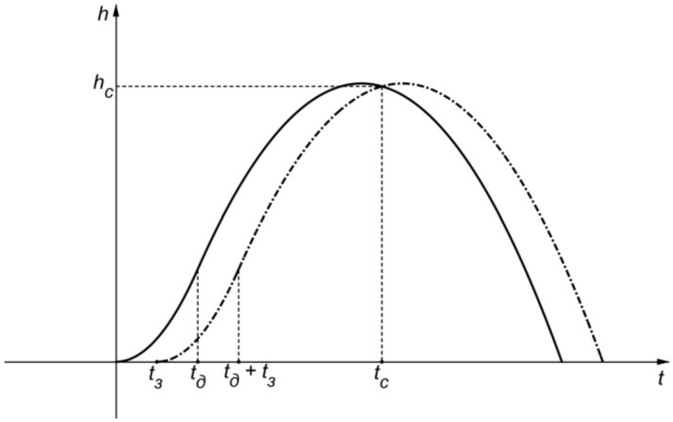
Учтем закон сохранения импульса (импульс системы до пережигания был равен нулю): $m_1 v_1 = m_2 v_2$. Решая совместно уравнения, полученные из ЗСИ и ЗСЭ, найдем выражения для скоростей:

$$v_2^2 = \frac{m_1 k (l/n)^2}{m_2(m_1 + m_2)},$$

$$v_1^2 = \frac{m_2 k (l/n)^2}{m_1(m_1 + m_2)}.$$

Ответ: $v_2 = 2/3$ м/с ≈ 0.7 м/с, $v_1 = 6.0$ м/с.

10.1.8. 1) Изобразим схематично графики зависимости высоты от времени для ракеты 1 (непрерывная кривая) и для ракеты 2 (пунктирная кривая). Вторая кривая повторяет первую со сдвигом по времени на $t_з = 2$ с. Точка пересечения графиков определяет высоту $h_с$ и время $t_с$ столкновения. Очевидно, что столкновение произойдет после набора первой ракетой максимальной высоты.



Первая ракета наберет максимальную высоту, когда ее скорость будет равна нулю. Это произойдет через время

$$t_{\max} = t_{\text{д}} + \frac{t_{\text{д}} \cdot a}{g} = 16 \text{ с},$$

где $t_{\text{д}}$ — время работы двигателя, a — ускорение ракеты при работающем двигателе. К этому времени у второй ракеты тоже закончится топливо, и она будет двигаться с ускорением $-g$. В результате высоты нахождения ракет в момент столкновения можно выразить сходным образом:

$$h_1 = \frac{at_{\text{д}}^2}{2} + at_{\text{д}}(t_{\text{с}} - t_{\text{д}}) - \frac{g(t_{\text{с}} - t_{\text{д}})^2}{2},$$

$$h_2 = \frac{at_{\text{д}}^2}{2} + at_{\text{д}}(t_{\text{с}} - t_{\text{д}} - t_{\text{з}}) - \frac{g(t_{\text{с}} - t_{\text{д}} - t_{\text{з}})^2}{2}.$$

3) В момент столкновения $h_1 = h_2$. Решая уравнение $h_1 = h_2$ относительно $t_{\text{с}}$, получаем

$$t_{\text{с}} = \frac{at_{\text{д}}}{g} + t_{\text{д}} + \frac{t_{\text{з}}}{2} = 17 \text{ с}.$$

4) Высоту столкновения получаем подстановкой $t_{\text{с}}$ в выражение для h_1:

$$h_{\text{с}} = h_1(t_{\text{с}}) = \frac{at_{\text{д}}^2}{2} + at_{\text{д}}\left(\frac{at_{\text{д}}}{g} + t_{\text{д}} + \frac{t_{\text{з}}}{2} - t_{\text{д}}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{at_{\text{д}}}{g} + at_{\text{д}} + \frac{at_{\text{з}}}{2} - at_{\text{д}}\right)^2;$$

$$h_с = \frac{1}{2} a t_д^2 (1 + a/g) - \frac{g t_з^2}{8} = 955 \text{ м}.$$

Ответ: 955 м.

Вариант 10.2

10.2.1. Первое тело движется с постоянной скоростью, следовательно путь, пройденный первом телом за время t, равняется $S_1 = v_1 t$. Второе тело, двигаясь с постоянным ускорением, прошло путь за время t: $S_2 = \frac{a_2 t^2}{2}$.
Тела двигаются под углом 90° друг относительно друга. По теореме Пифагора найдем расстояние между телами:

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2.$$

Подставляем выражения для S_1 и S_2 в общее уравнение. Получаем, что расстояние между телами составляет:

$$S = \sqrt{(v_1 t)^2 + \left(\frac{a_2 t^2}{2}\right)^2} \approx 16 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: 16.

10.2.2. Направим ось y вертикально вниз. Запишем II закон Ньютона для грузов с массами m_1 и m_2 в проекции на ось y:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T,$$

$$-m_2 a_2 = m_2 g - 2T,$$

Общее выражение для ускорений $|a_1| = 2|a_2|$.
Из системы получаем:

$$a = \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2} g = 2 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: 2.

10.2.3. Из рисунка можно заметить, что через резисторы R_3 и R_4 ток идти не будет, так как они соединены параллельно с проводом, сопротивлением которого можно пренебречь. Тогда мы можем сделать вывод, что резисторы R_1 и R_2 соединены параллельно друг с другом и они вместе соединены последовательно с резистором R_5. Таким образом, для того, чтобы найти мощность на R_5, необходимо воспользоваться формулой

$$P = I^2 \cdot R_5,$$

Сила тока I в резисторе R_5 равна силе тока во всем участке цепи:

$$I = \frac{U}{R_{\text{общ}}}.$$

Для того, чтобы выразить общее сопротивление $R_{\text{общ}}$, необходимо рассмотреть все участки цепи по порядку. Сопротивление на участке, где расположены резисторы R_1 и R_2:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Тогда $R_{12} = 2$ Ом. Общее сопротивление:

$$R_{\text{общ}} = R_{12} + R_5 = 5 \text{ Ом}.$$

Тогда сила тока: $I = \frac{10}{5} = 2$ А. В этом случае мощность, выделяемая пятым резистором:

$$P = 2^2 \cdot 3 = 12 \text{ Вт}.$$

Ответ: 12.

10.2.4. Количество тепла, ушедшее на плавление льда, равно $Q_{\text{плав}} = \lambda m$, а на нагрев получившейся воды $Q_{\text{нагр}} = cm(T_2 - T_1)$, где T_2 — температура кипения воды, T_1 — температура плавления льда. Эти процессы происходили в течение времени t_1.

Пусть после этого за время $2t_1$ выкипело $n\%$ воды, тогда теплота парообразования равна $Q_{\text{пар}} = nLm$.

Мощность кипятильника равна $N = \Delta Q/\Delta t$. Считая мощность постоянной, составим пропорцию:

$$\frac{Q_{\text{плав}} + Q_{\text{нагр}}}{t_1} = \frac{Q_{\text{пар}}}{2t_1}.$$

Отсюда находим, сколько выкипит воды за время $2t_1$:

$$n = \frac{2(\lambda + c(T_2 - T_1))}{L} \approx 0.66 = 66\%.$$

Ответ: 66.

10.2.5. На кубик действуют сила тяжести mg и силы Архимеда со стороны двух жидкостей $\rho_1 g V_1$ и $\rho_2 g V_2$. По второму закону Ньютона:

$$mg - \rho_1 g V_1 - \rho_2 g V_2 = 0.$$

Пусть V — объём кубика. Тогда $m = \rho_0 V$, $V = V_1 + V_2$, и уравнение можно привести к виду

$$\rho_0 V = \rho_1 V_1 + \rho_2 (V - V_1).$$

Отсюда выразим отношение V_1 к V:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_2 - \rho_1} = 0.25 = 25\%.$$

Ответ: 25.

10.2.6. Следует заметить, что для решения задачи необходимо рассмотреть моменты сил, действующие на первый и второй грузы.

1) Рассчитаем максимальное количество песка, которое можно засыпать в левую чашу, чтобы система все еще оставалась в состоянии покоя, то есть $M_1 = M_2$, где момент силы в общем случае $M = Fl$. За ось вращения необходимо взять левый край стола. Тогда для первого груза плечом будет являться расстояние l_1, а для второго $l_2 + l_3$. Сила F, действующая на оба груза — это сила тяжести. Массу досыпанного песка обозначим за $m_п$. Таким образом, расписывая моменты, получаем:

$$(m_1 + m_п) g l_1 = m_2 g (l_2 + l_3).$$

Выражая $m_п$, получаем

$$m_п = \frac{m_2(l_2 + l_3) - m_1 l_1}{l_1} = \frac{2(50 + 70) - 1 \cdot 40}{40} = 5 \text{ кг} = 5000 \text{ г}.$$

2) Аналогичным образом для случая, когда второй груз почти перевешивает первый, за ось вращения берется правый край стола и $M_1 = M_2$. Тогда

$$m_1 g(l_1 + l_3) = (m_2 + m_п) g l_2.$$

Выражая $m_п$, получаем

$$m_п = \frac{m_1(l_1 + l_3) - m_2 l_2}{l_2} = \frac{1(40 + 70) - 2 * 50}{50} = 0.2 \text{ кг} = 200 \text{ г}.$$

Ответ: 5000200.

10.2.7. Потенциальная энергия сжатой пружины

$$E = \frac{k(\Delta x)^2}{2}, \text{ где } \Delta x = l/4.$$

После пережигания нити потенциальная энергия становится равной

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Учтем закон сохранения импульса

$$m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

Из этих уравнений получаем

$$v_2^2 = \frac{m_1 k(l/4)^2}{m_2(m_1 + m_2)},$$

$$v_1^2 = \frac{m_2 k(l/4)^2}{m_1(m_1 + m_2)}.$$

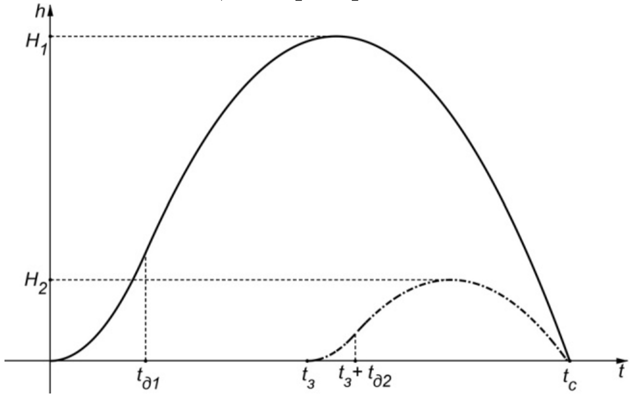
Ответ: $v_2 = 0.1$ м/с, $v_1 = 0.4$ м/с.

10.2.8. 1) Очевидно, что вторая ракета не сможет догнать первую на этапе подъема первой ракеты, поскольку стартует она позже, а двигатель работает меньшее время. Значит, столкновение может произойти только на участке падения первой ракеты.

2) Из рисунка видно, что минимальное время запуска второй ракеты после запуска первой будет реализовано, только если вторая ракета догонит первую в момент их удара о землю.
3) Вычислим время полета первой ракеты $t_{\text{с}}$. Оно складывается из времени работы двигателя $t_{\text{д}1}$, времени ее полета до максимальной высоты и времени свободного падения с этой высоты:

$$t_{\text{с}} = t_{\text{д}1} + \frac{t_{\text{д}1} a}{g} + \left(\frac{2H_1}{g}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где H_1 — высота полета, которая равна



$$H_1 = \frac{a t_{\text{д}1}^2}{2} + g\frac{1}{2}\frac{(a t_{\text{д}1})^2}{g} = \frac{1}{2}(a t_{\text{д}1})^2 1 + \frac{a}{g}.$$

Подставив это выражение в предыдущее, после упрощения получаем:

$$t_{\text{с}} = t_{\text{д}1}\left(1 + \frac{a}{g} + \left(\frac{a(1 + a/g)}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

4. Время полета второй ракеты находится аналогичным образом.
5. Минимальное время запуска второй ракеты после первой будет равно разности этих времен:

$$t_3 = (t_{\text{д}1} - t_{\text{д}2})\left(1 + \frac{a}{g} + \frac{a(1 + a/g)}{g}\right)^{\frac{1}{2}} = 11.2 \text{ с}.$$

Ответ: 11.2 с.

Вариант 10.3

10.3.1. Шар, свободно падая, проходит путь равный $S_1 = \frac{a_1 t^2}{2}$, где a_1 равно ускорению свободного падения, т. е. $a_1 = g$. Время, за которое шар падает на землю, составляет 6 секунд.
Коробка движется с ускорением меньшим в 1.5 раза, таким образом, ускорение коробки $a_2 = g/1.5$. Время, за которое коробка достигнет земли, составит около 7 секунд. Значит, за 6 секунд коробка пройдет путь равный

$$S_2 = \frac{a_2 t^2}{2} = \frac{gt^2}{1.5 \cdot 2}.$$

Расстояние между коробкой и шаром составит:

$$S = S_1 - S_2 = \frac{gt^2}{2} - \frac{gt^2}{1.5 \cdot 2} = 60 \text{ м}.$$

Ответ: 60.

10.3.2. Направим ось y вертикально вниз. Запишем II закон Ньютона для грузов с массами m_1 и m_2 в проекции на ось y:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T,$$

$$-m_2 a_2 = m_2 g - 4T.$$

Общее выражение для ускорений $|a_1| = 4|a_2|$.
Из системы получаем:

$$a_1 = \frac{16m_1 - 4m_2}{16m_1 + m_2} g = 0 \text{ м/с}^2.$$

Результирующая сила, действующая на груз m_1, равна: $F = m_1 a_1 = 0$ Н.
Ответ: 0.

10.3.3. Резисторы R_1 и R_2 соединены параллельно, R_3 и R_4 тоже соединены параллельно. Вместе две пары резисторов соединены последовательно. Таким образом, для того, чтобы найти мощность, выделяемую на R_4, необходимо воспользоваться формулой

$$P = \frac{U^2}{R_4}.$$

Сопротивление на участке, где расположены резисторы R_3 и R_4:

$$\frac{1}{R_{34}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}.$$

Тогда $R_{34} = 3$ Ом, аналогично $R_{12} = 2$ Ом. Так как участки цепи с резисторами 1, 2 и 3, 4 соединены последовательно, то общая сила тока $I = I_{12} = I_{34} = \frac{U}{R_{\text{общ}}}$, где $R_{\text{общ}} = R_{12} + R_{34} = 5$ Ом — общее сопротивление. Тогда

$$I_{34} = \frac{10}{5} = 2 \text{ Ом}.$$

Напряжение на участке цепи с R_3 и R_4:

$$U(R_{34}) = U(R_4) = U(R_3) = I_{34}R_{34} = 6 \text{ В}.$$

В этом случае мощность, выделяемая четвертым резистором:

$$P = \frac{6^2}{6} = 6 \text{ Вт}.$$

Ответ: 6.

10.3.4. Количество тепла, ушедшее на плавление льда, равно $Q_{\text{плав}} = \lambda m$, а на нагрев получившейся воды $Q_{\text{нагр}} = cm(T_2 - T_1)$, где T_2 — температура воды через 6 минут, T_1 — температура плавления льда. Процесс плавления совершен за время t_1.

Мощность кипятильника равна $N = \Delta Q/\Delta t$. Считая мощность постоянной, составим пропорцию:

$$\frac{Q_{\text{плав}}}{t_1} = \frac{Q_{\text{нагр}}}{t_2}.$$

Отсюда

$$T_2 = T_1 + \frac{\lambda t_2}{ct_1} = 47^\circ\text{C}.$$

Ответ: 47.

10.3.5. Вес шарика, опущенного в масло, равен $P_1 = mg - \rho_1 gV$, где $m = \rho_0 V$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Следовательно,

$$P_1 = \frac{4}{3}\pi g(\rho_0 - \rho_1)R^3.$$

Если уменьшить радиус шарика в 2 раза, то его вес станет равным

$$P_2 = \frac{4}{3}\pi g(\rho_0 - \rho_1)\left(\frac{R}{2}\right)^3.$$

Найдем отношение P_1 к P_2:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R^3}{(R/2)^3}.$$

Тогда $P_2 = \frac{P_1}{8} = 6.25$ Н.
Ответ: 6.25.

10.3.6. Следует заметить, что для решения задачи необходимо рассмотреть моменты сил, действующие на первый и второй грузы.
1) Рассчитаем максимальное количество песка, которое можно убрать из правой чаши, чтобы система все еще оставалась в состоянии покоя, то есть $M_1 = M_2$, где момент силы в общем случае $M = Fl$. За ось вращения необходимо взять левый край стола. Тогда для первого груза плечом будет являться расстояние l_1, а для второго $l_2 + l_3$. Сила F, действующая на оба груза — это сила тяжести. Массу убранного песка обозначим за $m_{\text{п}}$. Таким образом, расписывая моменты, получаем:

$$m_1 g l_1 = (m_2 - m_{\text{п}}) g (l_2 + l_3).$$

Выражая $m_{\text{п}}$, получаем

$$m_{\text{п}} = \frac{m_2(l_2 + l_3) - m_1 l_1}{l_2 + l_3} = \frac{2(50 + 70) - 1 \cdot 180}{50 + 70} = 0.5 \text{ кг} = 500 \text{ г}.$$

2) Аналогичным образом для случая, когда отсыпают песок из левой чаши, и второй груз почти перевешивает первый, за ось вращения берется правый край стола и $M_1 = M_2$. Тогда

$$(m_1 - m_{\text{п}}) g (l_1 + l_3) = m_2 g l_2.$$

Выражая $m_{\text{п}}$, получаем

$$m_{\text{п}} = \frac{m_1(l_1 + l_3) - m_2 l_2}{l_1 + l_3} = \frac{1(180 + 70) - 2 \cdot 50}{180 + 70} = 0.6 \text{ кг} = 600 \text{ г}.$$

Ответ: 600500.

10.3.7. Потенциальная энергия сжатой пружины

$$E = \frac{k(\Delta x)^2}{2}, \text{ где } \Delta x = l/n.$$

После пережигания нити потенциальная энергия становится равной

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Учтем закон сохранения импульса

$$m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

Из этих уравнений получаем

$$v_2^2 = \frac{m_1 k (l/n)^2}{m_2(m_1 + m_2)},$$

$$v_1^2 = \frac{m_2 k (l/n)^2}{m_1(m_1 + m_2)}.$$

Ответ: $v_2 = 0.5$ м/с, $v_1 = 2.0$ м/с.

10.3.8. Ускорение ракеты, летящей вниз, $a_{\text{вн}}$ будет больше ускорения такой же ракеты, летящей вверх $a_{\text{вв}}$ на величину $2g$, поскольку ускорение летящей вверх ракеты будет на величину g меньше, чем у свободно летящей (без гравитации), а у летящей вниз на величину g больше. К этому выводу можно прийти также, используя законы динамики. Таким образом:

$$a_{\text{вн}} = a_{\text{вв}} + 2g.$$

Поскольку ракеты проходят расстояние H, то

$$H = \frac{a_{\text{вв}} t_1^2}{2} = \frac{a_{\text{вн}} t_2^2}{2} = \frac{(a_{\text{вв}} + 2g) t_2^2}{2}.$$

Откуда получаем

$$t_1 = t_2 \left(1 + \frac{2g}{a_{\text{вв}}}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.4 \text{ с.}$$

Ответ: 1.4 с.

ЗАДАЧИ ДЛЯ 11 КЛАССА

Вариант 11.1

11.1.1. Направим ось x вдоль направления движения Гены. Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось x:

$$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)v.$$

Здесь m_1 и v_1, m_2 и v_2 — массы и скорости Гены и вагона, соответственно, v — проекция на ось x скорости вагона с Геной. Отсюда

$$|v| = \left|\frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}\right| \approx 2 \text{ м/с}.$$

Ответ: 2.

11.1.2. Направим ось y вертикально вниз. Запишем II закон Ньютона для грузов с массами m_1 и m_2 в проекции на ось y:

$$-m_1a_1 = m_1g - T,$$

$$m_2a_2 = m_2g - T.$$

Общее выражение для ускорений $|a_1| = |a_2| = a$.
Из системы уравнений получаем:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g = 5 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: 5.

11.1.3. На заряд q_2 действует сила отталкивания со стороны заряда q_1 и сила притяжения со стороны заряда q_3. Найдем значения сил по закону Кулона:

$$F_1 = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}, \quad F_3 = k\frac{|q_3||q_2|}{r^2}.$$

Результирующая сила, приложенная ко второму заряду, равна $\vec{F}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_3$. Сложим $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$ по правилу параллелограмма. Равнодействующую F_2 найдем по теореме косинусов, угол между силами составляет 60°:

$$F_2^2 = F_1^2 + F_3^2 - 2F_1F_3\cos 60^\circ.$$

Подставляем значения для сил:

$$F_2 = \left(\left(k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}\right)^2 + \left(k\frac{|q_3||q_2|}{r^2}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - 2k^2\frac{|q_1||q_2|}{r^2}\frac{|q_3||q_2|}{r^2}\cos 60^\circ\right)^{1/2}.$$

После преобразований получаем:

$$F_2 = \frac{k|q_2|}{r^2}\sqrt{|q_1|^2 + |q_3|^2 - 2|q_1||q_3|\cos 60^\circ} = 3.6 \text{ мкН}.$$

Ответ: $F_2 = 3.6$ мкН.

11.1.4. Запишем уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева — Клапейрона) для обеих планет:

$$p_1V_1 = \frac{m_1}{\mu_1}RT_1, \quad p_2V_2 = \frac{m_2}{\mu_2}RT_2,$$

где $V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^3$ и $V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^3$.
Разделим формулы друг на друга и выразим отношение p_1 к p_2:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1T_1\mu_2d_2^3}{m_2T_2\mu_1d_1^3}.$$

По условию задачи молярные массы газов связаны соотношением $\mu_2 = 1.04\mu_1$. Подставим в уравнение и найдем отношение p_1/p_2:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1.04 \cdot m_1T_1d_2^3}{m_2T_2d_1^3} = 1.0.$$

Ответ: 1.0.

11.1.5. Следует заметить, что для решения задачи необходимо рассмотреть моменты сил, действующие на первый и второй грузы.
1) Рассчитаем такую максимально возможную длину левого плеча, чтобы система все еще оставалась в состоянии покоя, то есть $M_1 = M_2$, где момент силы в общем случае $M = Fl$. За ось вращения необходимо взять левый край стола. Тогда

для первого груза плечом будет являться расстояние l_1, а для второго $l_2 + l_3$. Сила F, действующая на оба груза — это сила тяжести. Таким образом, расписывая моменты, получаем:

$$m_1 g l_1 = m_2 g (l_2 + l_3).$$

Выражая l_1 получаем

$$l_1 = \frac{m_2(l_2 + l_3)}{m_1} = \frac{2(50 + 70)}{1} = 240 \text{ см}.$$

2) Аналогичным образом для случая, когда второй груз почти перевешивает первый, за ось вращения берется правый край стола и $M_1 = M_2$. Тогда

$$m_1 g (l_1 + l_3) = m_2 g l_2.$$

Выражая l_1 получаем

$$l_1 = \frac{m_2 l_2 - m_1 l_3}{m_1} = \frac{2 \cdot 50 - 1 \cdot 70}{1} = 30 \text{ см}.$$

Ответ: 24030.

11.1.6. Резисторы R_2 и R_3 соединены последовательно, они вместе соединены параллельно с резистором R_1. А резистор R_4 соединен последовательно со всем предыдущим участком цепи. Таким образом, для того, чтобы найти мощность на R_4, необходимо воспользоваться формулой

$$P = I^2 \cdot R_4.$$

Сила тока I в резисторе R_4 равна силе тока во всем участке цепи:

$$I = \frac{U}{R_{\text{общ}}}.$$

Для того, чтобы выразить общее сопротивление $R_{\text{общ}}$, необходимо рассмотреть все участки цепи по порядку. Сопротивление на участке, где расположены резисторы R_1, R_2 и R_3:

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}.$$

Тогда $R_{123} = 1$ Ом. Общее сопротивление:

$$R_{\text{общ}} = R_{123} + R_4 = 2 \text{ Ом}.$$

Тогда сила тока: $I = \frac{10}{2} = 5$ А. В этом случае мощность, выделяемая четвертым резистором:

$$P = 5^2 \cdot 1 = 25 \text{ Вт}.$$

Ответ: 25.

11.1.7. Исходно давление в сосуде $p_1 = p_{1\text{возд}} + \varphi p_o$, где $p_{1\text{возд}}$ — давление сухого воздуха, p_o — давление насыщенного пара воды при 100°C.
Поскольку после сжатия в 5 раз давление выросло всего в два раза, давление паров воды будет равно p_o. Итого после сжатия:

$$p_2 = p_{2\text{возд}} + p_o.$$

Давление сухого воздуха после сжатия увеличивается в 5 раз: $p_{2\text{возд}} = 5p_{1\text{возд}}$.
Полное давление увеличилось в 2 раза: $p_2 = 2p_1$.
Отсюда $5p_{1\text{возд}} + p_o = 2p_{1\text{возд}} + 2\varphi p_o$,

$$p_{1\text{возд}} = p_o(2\varphi - 1)/3,$$

$$p_1 = p_o(2\varphi - 1)/3 + \varphi p_o = p_o(5\varphi - 1)/3,$$
$$p_1 = (5 \cdot 0.6 - 1) \cdot 105/3 \approx 67 \text{ кПа}.$$

Ответ: 67 кПа.

11.1.8. Потенциальная энергия сжатой пружины

$$E = \frac{k(\Delta x)^2}{2}, \text{где } \Delta x = l/n.$$

После пережигания нити потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию грузов

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Учтем закон сохранения импульса (импульс системы до пережигания был равен нулю): $m_1v_1 = m_2v_2$. Решая совместно уравнения, полученные из ЗСИ и ЗСЭ, найдем выражения для скоростей:

$$v_2^2 = \frac{m_1k(l/n)^2}{m_2(m_1+m_2)},$$

$$v_1^2 = \frac{m_2k(l/n)^2}{m_1(m_1+m_2)}.$$

Ответ: $v_2 = 2/3$ м/с ≈ 0.7 м/с, $v_1 = 6.0$ м/с.

Вариант 11.2

11.2.1. Первое тело движется с постоянной скоростью, следовательно путь, пройденный первом телом за время t, равняется $S_1 = v_1t$. Второе тело, двигаясь с постоянным ускорением, прошло путь за время t: $S_2 = \frac{a_2t^2}{2}$.

Тела двигаются под углом 90° друг относительно друга. По теореме Пифагора найдем расстояние между телами:

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2.$$

Подставляем выражения для S_1 и S_2 в общее уравнение. Получаем, что расстояние между телами составляет:

$$S = \sqrt{(v_1t)^2 + \left(\frac{a_2t^2}{2}\right)^2} \approx 16 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: 16.

11.2.2. Направим ось y вертикально вниз. Запишем II закон Ньютона для грузов с массами m_1 и m_2 в проекции на ось y:

$$m_1a_1 = m_1g - T, \qquad -m_2a_2 = m_2g - 2T,$$

Общее выражение для ускорений $|a_1| = 2|a_2|$.
Из системы получаем:

$$a = \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}g = 2 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: 2.

11.2.3. На заряд q_2 действует сила отталкивания со стороны заряда q_1 и сила притяжения со стороны заряда q_3. Найдем значения сил по закону Кулона:

$$F_1 = k\frac{|q_1||q_2|}{r_1^2}, \quad F_3 = k\frac{|q_3||q_2|}{r_3^2}.$$

Результирующая сила, приложенная ко второму заряду равна $\vec{F}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_3$. Сложим $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$ по правилу параллелограмма. Равнодействующую F_2 найдем по теореме косинусов, угол между силами составляет 60°:

$$F_2^2 = F_1^2 + F_3^2 - 2F_1F_3\cos 60°.$$

Подставляем значения для сил:

$$F_2 = \left(\left(k\frac{|q_1||q_2|}{r_1^2}\right)^2 + \left(k\frac{|q_3||q_2|}{r_3^2}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - 2k^2\frac{|q_1||q_2|}{r_1^2}\frac{|q_3||q_2|}{r_3^2}\cos 60°\right)^{1/2}.$$

После преобразований уравнения получаем, что

$$F_2 = k|q_2|\sqrt{\left(\frac{|q_1|}{r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{|q_3|}{r_3^2}\right)^2 + 2\left(\frac{|q_1|}{r_1^2}\right)\left(\frac{|q_1|}{r_1^2}\right)\cos 60°} =$$

$$= 13 \text{ мкН}.$$

Ответ: 13.

11.2.4. Запишем уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева — Клапейрона) для обеих планет:

$$p_1V_1 = \frac{m_1}{\mu_1}RT_1, \quad p_2V_2 = \frac{m_2}{\mu_2}RT_2,$$

где $V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^3$ и $V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^3$. Разделим формулы друг на друга и выразим отношение μ_1 к μ_2:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{m_1T_1p_2d_2^3}{m_2T_2p_1d_1^3}.$$

По условию задачи молярные массы газов связаны соотношением $p_1 = 5p_2$. Подставим в уравнение и найдем отношение μ_1/μ_2:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{m_1 T_1 d_2^3}{5 \cdot m_2 T_2 d_1^3} = 0.10267... \approx 0.103.$$

Ответ: 0.103.

11.2.5. Следует заметить, что для решения задачи необходимо рассмотреть моменты сил, действующие на первый и второй грузы.

1) Рассчитаем максимальное количество песка, которое можно засыпать в левую чашу, чтобы система все еще оставалась в состоянии покоя, то есть $M_1 = M_2$, где момент силы в общем случае $M = Fl$. За ось вращения необходимо взять левый край стола. Тогда для первого груза плечом будет являться расстояние l_1, а для второго $l_2 + l_3$. Сила F, действующая на оба груза — это сила тяжести. Массу досыпанного песка обозначим за $m_п$. Таким образом, расписывая моменты, получаем:

$$(m_1 + m_п)gl_1 = m_2 g(l_2 + l_3).$$

Выражая $m_п$, получаем

$$m_п = \frac{m_2(l_2 + l_3) - m_1 l_1}{l_1} = \frac{2(50 + 70) - 1 \cdot 40}{40} = 5 \text{ кг} = 5000 \text{ г}.$$

2) Аналогичным образом для случая, когда второй груз почти перевешивает первый, за ось вращения берется правый край стола и $M_1 = M_2$. Тогда

$$m_1 g(l_1 + l_3) = (m_2 + m_п)gl_2.$$

Выражая $m_п$, получаем

$$m_п = \frac{m_1(l_1 + l_3) - m_2 l_2}{l_2} = \frac{1(40 + 70) - 2 * 50}{50} = 0.2 \text{ кг} = 200 \text{ г}.$$

Ответ: 5000200.

11.2.6. Из рисунка можно заметить, что через резисторы R_3 и R_4 ток идти не будет, так как они соединены параллельно с проводом, сопротивлением которого можно пренебречь. Тогда мы можем сделать вывод, что резисторы R_1 и R_2 соединены параллельно друг с другом и они вместе соединены последовательно с резистором R_5.

Таким образом, для того, чтобы найти мощность на R_5, необходимо воспользоваться формулой

$$P = I^2 \cdot R_5,$$

Сила тока I в резисторе R_5 равна силе тока во всем участке цепи:

$$I = \frac{U}{R_{\text{общ}}}.$$

Для того, чтобы выразить общее сопротивление $R_{\text{общ}}$, необходимо рассмотреть все участки цепи по порядку. Сопротивление на участке, где расположены резисторы R_1 и R_2:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Тогда $R_{12} = 2$ Ом. Общее сопротивление:

$$R_{\text{общ}} = R_{12} + R_5 = 5 \text{ Ом}.$$

Тогда сила тока: $I = \frac{10}{5} = 2$ А. В этом случае мощность, выделяемая пятым резистором:

$$P = 2^2 \cdot 3 = 12 \text{ Вт}.$$

Ответ: 12.

11.2.7. Исходно давление в сосуде $p_1 = p_{1\text{возд}} + \varphi p_o$, где $p_{1\text{возд}}$ — давление сухого воздуха, p_o — давление насыщенного пара воды при 100°C.

Поскольку после сжатия в 5 раз давление выросло всего в 2 раза, давление паров воды будет равно p_o. Итого после сжатия:

$$p_2 = p_{2\text{возд}} + p_o.$$

Давление сухого воздуха после сжатия увеличивается в 5 раз:

$$p_{2\text{возд}} = 5p_{1\text{возд}}.$$

Полное давление увеличилось в 2 раза: $p_2 = 2p_1$.
Отсюда

$$5p_{1\text{возд}} + p_o = 2p_{1\text{возд}} + 2\varphi p_o.$$

Тогда давление сухого воздуха:

$$p_{1\text{возд}} = p_o(2\varphi - 1)/3 \approx 7 \text{ кПа}.$$

Ответ: 7 кПа.

11.2.8. Потенциальная энергия сжатой пружины

$$E = \frac{k(\Delta x)^2}{2}, \text{ где } \Delta x = l/4.$$

После пережигания нити потенциальная энергия становится равной

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Учтем закон сохранения импульса

$$m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

Из этих уравнений получаем

$$v_2^2 = \frac{m_1 k(l/4)^2}{m_2(m_1 + m_2)},$$

$$v_1^2 = \frac{m_2 k(l/4)^2}{m_1(m_1 + m_2)}.$$

Ответ: $v_2 = 0.1$ м/с, $v_1 = 0.4$ м/с.

Вариант 11.3

11.3.1. Шар, свободно падая, проходит путь равный $S_1 = \frac{a_1 t^2}{2}$, где a_1 равно ускорению свободного падения, т. е. $a_1 = g$. Время, за которое шар падает на землю, составляет 6 секунд.
Коробка движется с ускорением меньшим в 1.5 раза, таким образом, ускорение коробки $a_2 = g/1.5$. Время, за которое коробка достигнет земли, составит около 7 секунд. Значит, за 6 секунд коробка пройдет путь равный

$$S_2 = \frac{a_2 t^2}{2} = \frac{g t^2}{1.5 \cdot 2}.$$

Расстояние между коробкой и шаром составит:

$$S = S_1 - S_2 = \frac{g t^2}{2} - \frac{g t^2}{1.5 \cdot 2} = 60 \text{ м}.$$

Ответ: 60.

11.3.2. Направим ось y вертикально вниз. Запишем II закон Ньютона для грузов с массами m_1 и m_2 в проекции на ось y:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T,$$

$$-m_2 a_2 = m_2 g - 4T.$$

Общее выражение для ускорений $|a_1| = 4|a_2|$.
Из системы получаем:

$$a_1 = \frac{16 m_1 - 4 m_2}{16 m_1 + m_2} g = 0 \text{ м/с}^2.$$

Результирующая сила, действующая на груз m_1, равна: $F = m_1 a_1 = 0$ Н.
Ответ: 0.

11.3.3. На заряд q_2 действует сила отталкивания со стороны заряда q_1 и сила притяжения со стороны заряда q_3. Найдем значения сил по закону Кулона:

$$F_1 = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}, \quad F_3 = k \frac{|q_3||q_2|}{r^2}.$$

Результирующая сила, приложенная ко второму заряду равна $\vec{F}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_3$. Сложим $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$ по правилу параллелограмма. Равнодействующую F_2 найдем по теореме косинусов, угол между силами составляет $120°$:

$$F_2^2 = F_1^2 + F_3^2 - 2F_1F_3\cos 120°.$$

Подставляем значения для сил:

$$F_2 = \left(\left(k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}\right)^2 + \left(k\frac{|q_3||q_2|}{r^2}\right)^2 - \right.$$

$$\left. -2k^2\frac{|q_1||q_2|}{r^2}\frac{|q_3||q_2|}{r^2}\cos 120°\right)^{1/2}.$$

Воспользуемся формулой приведения: $\cos 120° = -\sin 30°$. После преобразований уравнения получаем, что

$$F_2 = \frac{k|q_2|}{r^2}\sqrt{|q_1|^2 + |q_3|^2 + 2|q_1||q_3|\sin 30°} \approx 6,2 \text{ мкН}.$$

Ответ: 6.2.

11.3.4. Запишем уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева — Клапейрона) для обоих спутников:

$$p_1V_1 = \frac{m_1}{\mu_1}RT_1, \quad p_2V_2 = \frac{m_2}{\mu_2}RT_2,$$

где $V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^3$ и $V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^3$.
Разделим формулы друг на друга и выразим отношение μ_2 к μ_1:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{m_2T_2p_1d_1^3}{m_1T_1p_2d_2^3} \approx 0.06.$$

Ответ: 0.06.

11.3.5. Следует заметить, что для решения задачи необходимо рассмотреть моменты сил, действующие на первый и второй грузы.
1) Рассчитаем максимальное количество песка, которое можно убрать из правой чаши, чтобы система все еще оставалась в

состоянии покоя, то есть $M_1 = M_2$, где момент силы в общем случае $M = Fl$. За ось вращения необходимо взять левый край стола. Тогда для первого груза плечом будет являться расстояние l_1, а для второго $l_2 + l_3$. Сила F, действующая на оба груза — это сила тяжести. Массу убранного песка обозначим за $m_п$. Таким образом, расписывая моменты, получаем:

$$m_1 g l_1 = (m_2 - m_п) g (l_2 + l_3).$$

Выражая $m_п$, получаем

$$m_п = \frac{m_2(l_2 + l_3) - m_1 l_1}{l_2 + l_3} = \frac{2(50 + 70) - 1 \cdot 180}{50 + 70} = 0.5 \text{ кг} = 500 \text{ г}.$$

2) Аналогичным образом для случая, когда отсыпают песок из левой чаши, и второй груз почти перевешивает первый, за ось вращения берется правый край стола и $M_1 = M_2$. Тогда

$$(m_1 - +m_п) g (l_1 + l_3) = m_2 g l_2.$$

Выражая $m_п$, получаем

$$m_п = \frac{m_1(l_1 + l_3) - m_2 l_2}{l_1 + l_3} = \frac{1(180 + 70) - 2 \cdot 50}{180 + 70} = 0.6 \text{ кг} = 600 \text{ г}.$$

Ответ: 600500.

11.3.6. Резисторы R_1 и R_2 соединены параллельно, R_3 и R_4 тоже соединены параллельно. Вместе две пары резисторов соединены последовательно. Таким образом, для того, чтобы найти мощность, выделяемую на R_4, необходимо воспользоваться формулой

$$P = \frac{U^2}{R_4}.$$

Сопротивление на участке, где расположены резисторы R_3 и R_4:

$$\frac{1}{R_{34}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}.$$

Тогда $R_{34} = 3$ Ом, аналогично $R_{12} = 2$ Ом. Так как участки цепи с резисторами 1, 2 и 3, 4 соединены последовательно, то общая сила тока $I = I_{12} = I_{34} = \frac{U}{R_{\text{общ}}}$, где $R_{\text{общ}} = R_{12} + R_{34} = 5$ Ом — общее сопротивление. Тогда

$$I_{34} = \frac{10}{5} = 2 \text{ Ом}.$$

Напряжение на участке цепи с R_3 и R_4:

$$U(R_{34}) = U(R_4) = U(R_3) = I_{34}R_{34} = 6 \text{ В}.$$

В этом случае мощность, выделяемая четвертым резистором:

$$P = \frac{6^2}{6} = 6 \text{ Вт}.$$

Ответ: 6.

11.3.7. Исходно давление в сосуде $p_1 = p_{1\text{возд}} + \varphi p_o$, где $p_{1\text{возд}}$ — давление сухого воздуха, p_o — давление насыщенного пара воды при 100°C.
Поскольку после сжатия в 3 раза давление выросло всего в 1.5 раза, давление паров воды будет равно p_o. Итого после сжатия:

$$p_2 = p_{2\text{возд}} + p_o.$$

Давление сухого воздуха после сжатия увеличивается в 3 раза:

$$p_{2\text{возд}} = 3p_{1\text{возд}}.$$

Полное давление увеличилось в 1.5 раза: $p_2 = 1.5p_1$.
Отсюда

$$3p_{1\text{возд}} + p_o = 1.5p_{1\text{возд}} + 1.5\varphi p_o.$$

Тогда давление сухого воздуха:

$$p_{1\text{возд}} = p_o(1.5\varphi - 1)/1.5 \approx 3 \text{ кПа}.$$

Ответ: 3 кПа.

11.3.8. Потенциальная энергия сжатой пружины

$$E = \frac{k(\Delta x)^2}{2}, \text{ где } \Delta x = l/n.$$

После пережигания нити потенциальная энергия становится равной

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Учтем закон сохранения импульса

$$m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

Из этих уравнений получаем

$$v_2^2 = \frac{m_1 k (l/n)^2}{m_2 (m_1 + m_2)},$$

$$v_1^2 = \frac{m_2 k (l/n)^2}{m_1 (m_1 + m_2)}.$$

Ответ: $v_2 = 0.5$ м/с, $v_1 = 2.0$ м/с.

Заключительный тур

ЗАДАЧИ ДЛЯ 7 КЛАССА

Вариант 7.1

7.1.1. Пусть l м — длина кабеля, $m_{\text{общ}}$ — его масса. Согласно определению линейной плотности однородного тела:

$$\rho_{\text{лин}} = \frac{m_{\text{общ}}}{l},$$

$$m_{\text{общ}} = m_1 + m_2 + m_3 + m_{\text{п}}.$$

m_1 — масса меди, m_2 — масса нихрома, m_3 — масса алюминия, $m_{\text{п}}$ — масса полиэтилена.
$n_1 = 3,\ n_2 = 3,\ n_3 = 6$ — число медных, нихромовых и алюминиевых жил соответственно.
$r_1 = 1$ см, $r_2 = 0.5$ см, $r_3 = 0.2$ см — радиусы медных, нихромовых и алюминиевых жил соответственно; $r = 3$ см — радиус кабеля.

$$m_i = n_i \rho_i l \pi r_i^2,\ i = 1, 2, 3.$$

$$m_{\text{п}} = \rho_0 \pi l (r^2 - \sum_{i=1}^{3} n_i r_i^2).$$

Масса меди:

$$m_1 = 3 \cdot 8900 \text{ кг/м}^3 \cdot l \text{ м} \cdot 3.14 \cdot (0.01)^2 \text{ м}^2 \approx 8.38 l \text{ кг}.$$

Масса нихрома:

$$m_2 = 3 \cdot 8200 \text{ кг/м}^3 \cdot l \text{ м} \cdot 3.14 \cdot (0.005)^2 \text{ м}^2 \approx 1.93 l \text{ кг}.$$

Масса алюминия:

$$m_3 = 6 \cdot 2700 \text{ кг/м}^3 \cdot l \text{ м} \cdot 3.14 \cdot (0.002)^2 \text{ м}^2 \approx 0.20 l \text{ кг}.$$

Масса полиэтилена:

$$m_{\text{п}} = 940 \text{ кг/м}^3 \cdot 3.14 \cdot l \text{ м} \times$$

$$\times((0.03)^2 - 3 \cdot (0.01)^2 - 3 \cdot (0.005)^2 - 6 \cdot (0.002)^2) \text{ м}^2 \approx 1.48 l \text{ кг}.$$

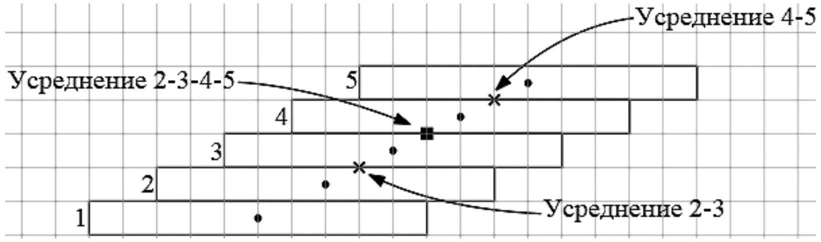
Тогда линейная плотность кабеля выражается следующим образом:

$$\rho_{\text{лин}} = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_{\text{п}}}{l} \approx$$

$$\approx \frac{(8.38l + 1.93l + 0.20l + 1.48l)\ \text{кг}}{l\ \text{м}} \approx 12\ \text{кг/м}.$$

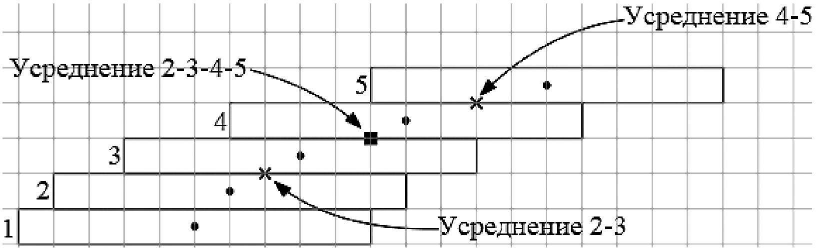
Ответ: 12 кг/м.

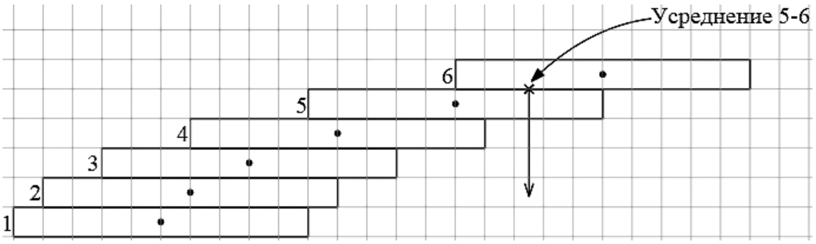
7.1.2. Вопрос 1:
Для того, чтобы новая карта не упала, точка приложения действующей на нее силы тяжести должна находиться над площадью опоры. Поэтому при добавлении карты верхняя упадет в том и только в том случае, когда больше ее половины будет находиться в воздухе (карты складывают одна на другую аккуратно, поэтому будем считать, что при перекрытии 50% верхняя карта находится в равновесии).
Допустим, что конструкция из N карт устойчива, а из $N+1$ — нет. Заметим, что разрушение начнется между 1 и 2 картой, а не между N и $N+1$ картами, как могло бы показаться. Это связано с тем, что конструкция с 2 по $N+1$ карту содержит N карт, а про такую конструкцию известно, что она устойчива.
Рассмотрим последовательное добавление карт одна за одной на примере пяти карт: усредненные точки приложения силы тяжести для карт 2-3 и 4-5 показаны на рисунке (карты одинаковые, поэтому точки находятся на середине отрезка, соединяющего центры карт). Аналогично (как середину отрезка, соединяющего точки) находим усредненную точку приложения силы тяжести для карт 2-3-4-5 и видим, что она находится ровно над краем нижней карты. Добавление еще одной карты, очевидно, сместит ее правее, и конструкция обрушится.



Еще раз отметим, что нарушение равновесия произойдет между картами 1-2, а не 5-6, как могло бы показаться.

Вопрос 2:
Рассмотрим этот вопрос аналогично вопросу 1. Найдем усредненные точки приложения силы тяжести для конструкций из карт 2-3 и 4-5, затем для 2-3-4-5, и увидим, что эта точка находится над краем нижней карты. (см. рисунок). Видим, что разрушение произойдет при добавлении 6 карты, причем упадет не 6 карта с 5, а 5 и 6 карты с карты 4.





Ответ: 1. Шестая карта разрушит, между первой и второй; 2. Шестая карта разрушит.

7.1.3. 1. Пусть T — сила натяжения нити. Напишем второй закон Ньютона для грузов m_1 и m_2 и учтем, что система находится в равновесии:

$$m_1 g - 2T = 0,$$

$$m_2 g - T = 0.$$

Выразив T из второго уравнения и подставив его в первое, получим $m_1 = 2m_2 = 200$ г.
2. Напишем второй закон Ньютона для первой и второй пружины:

$$k_1 \Delta l_1 = T,$$

$$k_2\Delta l_2 = 2T.$$

Из пункта 1 известно, что $T = m_2 g$, тогда

$$\Delta l_1 = \frac{m_2 g}{k_1} = \frac{0,1 \cdot 10}{40} = 0.025 \text{ м} = 2.5 \text{ см},$$

$$\Delta l_2 = \frac{2m_2 g}{k_2} = \frac{2 \cdot 0,1 \cdot 10}{100} = 0.05 \text{ м} = 2 \text{ см}.$$

3. Пусть Δh — высота, на которую опустился груз M_1. Массы обоих грузов увеличились в два раза, следовательно, растяжения пружин тоже увеличились в два раза. Так как груз M_2 не двигается, а вторая пружина растянулась, длина нити справа от второго блока уменьшилась на величину $\Delta l_2 = 2$ см, соответственно, длина нити слева от него увеличилась на величину $2\Delta l_2 = 4$ см. Учитывая, что первая пружина растянулась на $\Delta l_1 = 2.5$ см, получаем

$$\Delta h = \frac{2\Delta l_2 + \Delta l_1}{2} = \frac{4 + 2.5}{2} = 3.25 \text{ см}.$$

Ответ: 1. 200 г; 2. 2.5 см и 2 см; 3. 3.25 см.

7.1.4. Введем обозначения для используемых величин:
$\rho_0 = 1000$ кг/м^3 — плотность воды;
ρ_1 — плотность пластика; $\rho_2 = 800$ кг/м^3 — плотность дерева;
h_1, h_2 — высоты пластикого и деревянного параллелипипедов соответственно.
1) Заметим, что сила Архимеда, действующая на кубик, не будет зависеть от того, какой стороной он повернут, так как в обоих случаях она равна по модулю силе тяжести кубика.
Сила Архимеда, действующая на кубик, в случае, когда он повернут деревом вниз:

$$F_a = \rho_0 g a^2 \left(h_2 + \frac{h_1}{3}\right).$$

Сила Архимеда, действующая на кубик, в случае, когда он повернут пластиком вниз:

$$F_a = \rho_0 g a^2 \left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right).$$

Приравнивая эти выражения, получаем:

$$h_2 + \frac{h_1}{3} = h_1 + \frac{h_2}{2},$$

$$\frac{2h_1}{3} = \frac{h_2}{2},$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{4}.$$

Кроме того, можем непосредственно вычислить эти высоты из условия $h_1 + h_2 = a$

$$h_1 = \frac{3a}{7} = \frac{9}{7} \text{ см},$$

$$h_2 = \frac{4a}{7} = \frac{12}{7} \text{ см}.$$

2) Для того чтобы вычислить перемещение кубика x, нужно учесть перемещение воды следующим образом: $x = x_1 - x_2$, где x_1 — высота части кубика, выступающей из воды, x_2 — изменение уровня воды.

$$x_1 = \frac{h_2}{2} = \frac{6}{7} \text{ см}.$$

Объем погруженной части кубика равен объему вытесненной воды. Таким образом можем найти изменение уровня воды:

$$a^2 x = (S_0 - a^2)x_2,$$

$$a^2 x_1 = S_0 x_2,$$

$$x_2 = \frac{a^2 x_1}{S_0} = \frac{9 \text{ см}^2 \cdot 6/7 \text{ см}}{30 \text{ см}^2} = \frac{9}{35} \text{ см}.$$

Тогда перемещение кубика окажется равным:

$$x = x_1 - x_2 = \left(\frac{6}{7} - \frac{9}{35}\right) \text{ см} = 0.6 \text{ см}.$$

3) Запишем условие плавания кубика в том случае, когда он повернут деревом вниз:

$$\rho_0 g a^2 \left(h_2 + \frac{h_1}{3}\right) = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) g a^2,$$

$$\rho_1 h_1 = \rho_0 h_2 + \frac{\rho_0 h_1}{3} - \rho_2 h_2,$$

$$\rho_1 = \frac{h_2}{h_1}(\rho_0 - \rho_2) + \frac{\rho_0}{3} =$$

$$= \frac{4}{3}(1000 - 800)\ \text{кг/м}^3 + \frac{1000}{3}\ \text{кг/м}^3 = 600\ \text{кг/м}^3.$$

Ответ: 1) 3 : 4 ; 2) 0.6 см ; 3) 600 кг/м^3.

7.1.5. 1. Пусть t_1 — время, прошедшее с момента выхода из деревни А до первой встречи мальчика и собаки. За это время мальчик пройдет путь vt_1, а собака — $2vt_1$. Собака, добежав до деревни, пройдет путь AB. От момента, когда собака добежала до деревни до момента встречи мальчик и собака в сумме тоже должны пройти путь AB, значит:

$$vt_1 + 2vt_1 = 2AB,$$

$$t_1 = \frac{2AB}{3v} = \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 5} = \frac{4}{3}\ \text{ч} = 80\ \text{мин}.$$

2. Пусть t — время, за которое мальчик дошел до деревни. За это время собака пробежит расстояние $L = 2vt$. Время найдем по формуле:

$$t = \frac{AB}{v}.$$

Тогда

$$L = 2AB = 20\ \text{км}.$$

3. Пусть t_n — время между встречами под номерами n и $n-1$, S_n — расстояние от мальчика до деревни во время $n-1$ встречи (то есть расстояние, которая должна пробежать собака от мальчика до деревни в промежутке между встречами n и $n-1$). Аналогично пункту 1, получаем:

$$vt_n + 2vt_n = 2S_n.$$

Теперь рассмотрим промежуток от n до $n+1$ встречи. Для него так же выполнено:

$$vt_{n+1} + 2vt_{n+1} = 2S_{n+1}.$$

С другой стороны, ясно, что расстояние S_{n+1} будет меньше, чем S_n на величину пути, который мальчик прошел по направлению к деревне, то есть:

$$S_{n+1} + vt_n = S_n.$$

Из этих условий мы можем найти связь между t_{n+1} и t_n:

$$3vt_n = 2(S_{n+1} + vt_n),$$

$$vt_n = 3vt_{n+1},$$

$$t_{n+1} = \frac{t_n}{3}.$$

Выразим t_{n+1} через t_1:

$$t_{n+1} = \frac{t_n}{3} = \frac{t_{n-1}}{3 \cdot 3} = ... = \frac{t_1}{3^n}.$$

В нашем случае $n = 4$, поэтому:

$$t_5 = \frac{t_1}{3^4} = \frac{80}{81} \text{ мин} \approx 1 \text{ мин}.$$

Ответ: 1. 80 мин; 2. 20 км; 3. $\frac{80}{81}$ мин ≈ 1 мин.

Вариант 7.2

7.2.1. Для начала вычислим количество прутьев в данной плите. Вширь и вдоль помещается по 14 прутьев. В высоту укладывается 3 сетки, следовательно, всего 84 прута длиной $l = 3$ м. Объем одного прута ($r = 0.01$ м — радиус прута, S_0 — площадь перпендикулярного сечения прута):

$$V_0 = S_0 l = \pi r^2 l = 3.14 \cdot (0.01)^2 \text{ м}^2 \cdot 3 \text{ м} \approx 0.0009 \text{ м}^3.$$

Суммарный объем железа:

$$V_1 = 84V_0 \approx 0.08 \text{ м}^3.$$

Масса железа ($\rho_1 = 7800$ кг/м^3):

$$m_1 = \rho_1 V_1 \approx 7800 \text{ кг/м}^3 \cdot 0.08 \text{ м}^3 \approx 620 \text{ кг}$$

Весь оставшийся объем плиты залит бетоном. Вычислим его объем ($b = 0.4$ м — толщина плиты):

$$V_2 = l^2 b - V_1 \approx (3^2 \cdot 0.4 - 0.08)\ \text{м}^3 \approx 3.52\ \text{м}^3.$$

Масса бетона ($\rho_2 = 2500$ кг/м^3):

$$m_2 = \rho_2 V_2 \approx 2500\ \text{кг/м}^3 \cdot 3.52\ \text{м}^3 \approx 8800\ \text{кг}.$$

Тогда среднее давление данной плиты на грунт вычисляется следующим образом (S — площадь поверхности плиты):

$$p = \frac{F_{\text{тяж}}}{S} = \frac{(m_1 + m_2)g}{l^2} \approx$$

$$\approx \frac{(620 + 8800)\ \text{кг} \cdot 10\ \text{м/с}^2}{3^2\ \text{м}^2} \approx 10470\ \text{Па} \approx 10.5\ \text{кПа}.$$

Ответ: 10.5 кПа

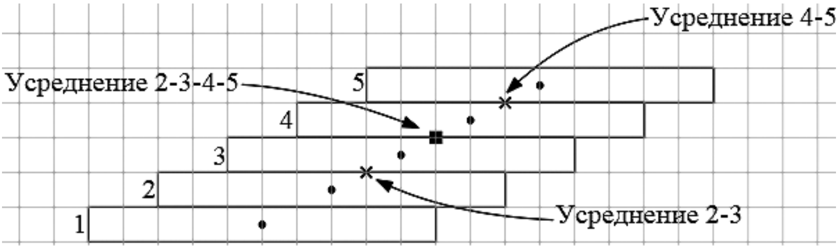
7.2.2. Вопрос 1:

Для того, чтобы новая карта не упала, точка приложения действующей на нее силы тяжести должна находиться над площадью опоры. Поэтому при добавлении карты верхняя упадет в том и только в том случае, когда больше ее половины будет находиться в воздухе (карты складывают одна на другую аккуратно, поэтому будем считать, что при перекрытии 50% верхняя карта находится в равновесии).

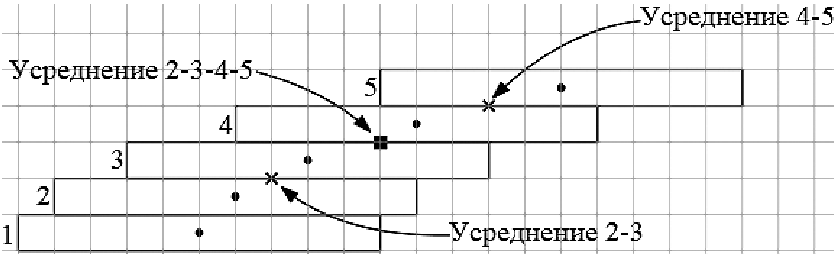
Допустим, что конструкция из N карт устойчива, а из $N+1$ — нет. Заметим, что разрушение начнется между 1 и 2 картой, а не между N и $N+1$ картами, как могло бы показаться. Это связано с тем, что конструкция с 2 по $N+1$ карту содержит N карт, а про такую конструкцию известно, что она устойчива.

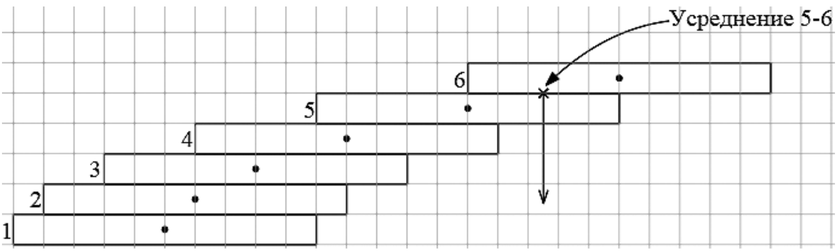
Рассмотрим последовательное добавление карт одна за одной на примере пяти карт: усредненные точки приложения силы тяжести для карт 2-3 и 4-5 показаны на рисунке (карты одинаковые, поэтому точки находятся на середине отрезка, соединяющего центры карт). Аналогично (как середину отрезка, соединяющего точки) находим усредненную точку приложения силы тяжести для карт 2-3-4-5 и видим, что она находится ровно над

краем нижней карты. Добавление еще одной карты, очевидно, сместит ее правее, и конструкция обрушится.
Еще раз отметим, что нарушение равновесия произойдет между картами 1-2, а не 5-6, как могло бы показаться.



Вопрос 2:
Рассмотрим этот вопрос аналогично вопросу 1. Найдем усредненные точки приложения силы тяжести для конструкций из карт 2-3 и 4-5, затем для 2-3-4-5, и увидим, что эта точка находится над краем нижней карты. (см. рисунок). Видим, что разрушение произойдет при добавлении 6 карты, причем упадет не 6 карта с 5, а 5 и 6 карты с карты 4.





Ответ: 1. Шестая карта разрушит, между первой и второй; 2. Шестая карта разрушит.

7.2.3. 1. Пусть T — сила натяжения нити. Напишем второй закон Ньютона для грузов m_1 и m_2 и учтем, что система находится в равновесии:

$$m_1g - 2T = 0,$$

$$m_2g - T = 0.$$

Выразив T из второго уравнения и подставив его в первое, получим $m_1 = 2m_2 = 200$ г.
2. Напишем второй закон Ньютона для первой и второй пружины:

$$k_1\Delta l_1 = T,$$

$$k_2\Delta l_2 = 2T.$$

Из пункта 1 известно, что $T = m_2g$, тогда

$$\Delta l_1 = \frac{m_2g}{k_1} = \frac{0,1 \cdot 10}{40} = 0.025 \text{ м} = 2.5 \text{ см},$$

$$\Delta l_2 = \frac{2m_2g}{k_2} = \frac{2 \cdot 0,1 \cdot 10}{100} = 0.02 \text{ м} = 2 \text{ см}.$$

3. Пусть Δh — высота, на которую опустился груз M_2. Массы обоих грузов увеличились в два раза, следовательно, растяжения пружин тоже увеличились в два раза. Так как груз M_1 не двигается, а первая пружина растянулась, длина нити слева от первого блока уменьшилась на величину $\Delta l_1 = 2.5$ см, соответственно, длина нити справа от него увеличилась на ту же величину. Вторая пружина растянулась на $\Delta l_2 = 2$ см, значит, второй блок опустился на эту же величину. За счет того, что нить между блоками должна быть натянута, изменение высоты второго груза составит:

$$\Delta h = 2\Delta l_2 + \Delta l_1 = 4 + 2.5 = 6.5 \text{ см}.$$

Ответ: 1. 200 г; 2. 2.5 см и 2 см; 3. 6.5 см.

7.2.4. Обозначения:
$\rho_0 = 1000$ кг/м^3 — плотность воды; $\rho = 800$ кг/м^3 — плотность дерева;
M_1, M_2 — массы большего и меньшего поршня, соответственно;
m_1, m_2 — массы тела 1 и тела 2, соответственно;

S_1, S_2 — площади большего и меньшего поршня, соответственно;
v_1, v_2 — объемы тел 1 и 2, соответственно.
1) Рассмотрим ситуацию, когда уровень воды в левом и правом коленах равны (на поршнях грузов нет). Запишем условия равенства давлений в жидкости на уровне поршней:

$$\frac{M_1 g}{S_1} = \frac{M_2 g}{S_2},$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{M_1}{M_2} = 4.$$

2) Рассмотрим ситуацию, когда на больший поршень положили тело 1. Запишем условие равенства давлений в жидкости на уровне большего поршня:

$$\frac{M_1 g + m_1 g}{S_1} = \frac{M_2 g}{S_2} + \rho_0 g x_1,$$

$$\frac{m_1}{S_1} = \rho_0 x_1.$$

3) Рассмотрим ситуацию, когда на большем поршне лежит тело 1, на меньшем — тело 2, и уровень жидкости в коленах одинаков. Запишем условие равенства давлений в жидкости на уровне поршней:

$$\frac{M_1 g + m_1 g}{S_1} = \frac{M_2 g + m_2 g}{S_2},$$

$$\frac{m_1}{S_1} = \frac{m_2}{S_2}.$$

Заметим, что из отношения масс мы можем выразить отношение объемов:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho v_1}{\rho v_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_1}{S_2} = 4.$$

Итак, мы получили искомое отношение объемов тел (1 к 2):

$$\frac{v_1}{v_2} = 4.$$

4) Рассмотрим ситуацию, когда тела 1 и 2 сняли с поршней и под меньший поршень поместили тело 2. Запишем условие равенства давлений в жидкости на уровне большего поршня: x_2 — расстояние между поршнями

$$\frac{M_1 g}{S_1} = \frac{M_2 g}{S_2} + \rho_0 g x_2 + \frac{m_2 g - \rho_0 g v_2}{S_2},$$

$$\rho_0 x_2 + \frac{(\rho - \rho_0) v_2}{S_2} = 0,$$

$$x_2 = \frac{(\rho_0 - \rho) v_2}{\rho_0 S_2} = \frac{v_2}{S_2} - \frac{m_2}{\rho_0 S_2}.$$

Используем известные нам соотношения, чтобы преобразовать полученное выражение.

$$\frac{m_2}{\rho_0 S_2} = \frac{m_1}{\rho_0 S_1} = \frac{\rho_0 x_1}{\rho_0} = x_1,$$

$$\frac{v_2}{S_2} = \frac{m_2}{\rho S_2} = \frac{m_1}{\rho S_1} = \frac{\rho_0 x_1}{\rho}.$$

Вычислим расстояние между поршнями:

$$x_2 = \frac{\rho_0 x_1}{\rho} - x_1 = x_1 \cdot \frac{(\rho_0 - \rho)}{\rho} = 10\text{ см} \cdot \frac{(1000 - 800)\text{ кг/м}^3}{800\text{ кг/м}^3} = 2.5\text{ см}.$$

Перемещение меньшего поршня (изменение уровня воды в меньшем колене) однозначно связано с расстоянием между поршнями: расстояние между поршнями равно сумме перемещений обоих поршней. Пусть Δx — перемещение меньшего поршня. Тогда перемещение большего поршня будет равно $\Delta x \frac{S_2}{S_1} = \frac{\Delta x}{4}$.

$$\Delta x + \frac{\Delta x}{4} = x_2,$$

$$\Delta x = 0.8 x_2 = 0.8 \cdot 2.5\text{ см} = 2\text{ см}.$$

Ответ: 1) 4; 2) 2 см.

7.2.5. 1. Пусть t_1 — время, прошедшее с момента выхода мальчика из деревни А до первой встречи мальчика и собаки, t_2 — от первой встречи мальчика до второй. За время t_1 мальчик пройдет путь vt_1, а собака — $2vt_1$. От момента, когда собака добежала до деревни, до момента встречи мальчик и собака в сумме должны пройти путь AB, значит:

$$vt_1 + 2vt_1 = AB,$$

$$t_1 = \frac{AB}{3v}.$$

В момент первой встречи расстояние между мальчиком и деревней равно $S = AB - vt_1$. После встречи собака, добежав до деревни, пройдет путь S, а для того, чтобы встретиться, мальчик и собака дополнительно в сумме должны тоже пройти путь S. Тогда:

$$vt_2 + 2vt_2 = 2S,$$

$$t_2 = \frac{2}{3v} \cdot (AB - \frac{AB}{3}) = \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{2 \cdot 15}{3} = \frac{4}{3} \text{ часа} = 80 \text{ мин.}$$

2. Пусть t — время, за которое мальчик дошел до деревни. За это время собака пробежит расстояние $L = 2vt$. Время найдем по формуле:

$$t = \frac{AB}{v}.$$

Тогда

$$L = 2AB = 30 \text{ км.}$$

3. Пусть t_n — время между встречами под номерами n и $n-1$, S_n — расстояние от мальчика до деревни во время $n-1$ встречи (то есть расстояние, которая должна пробежать собака от мальчика до деревни в промежутке между встречами n и $n-1$), при этом промежуток между первой и второй встречей рассматривать не будем (то есть $n > 2$). Аналогично пункту 1, получаем:

$$vt_n + 2vt_n = 2S_n.$$

Теперь рассмотрим промежуток от n до $n+1$ встречи. Для него так же выполнено:

$$vt_{n+1} + 2vt_{n+1} = 2S_{n+1}.$$

С другой стороны, ясно, что расстояние S_{n+1} будет меньше, чем S_n на величину пути, который мальчик прошел по направлению к деревне, то есть:

$$S_{n+1} + vt_n = S_n.$$

Из этих условий мы можем найти связь между t_{n+1} и t_n:

$$3vt_n = 2(S_{n+1} + vt_n),$$

$$vt_n = 3vt_{n+1},$$

$$t_{n+1} = \frac{t_n}{3}.$$

Выразим t_{n+1} через t_2:

$$t_{n+1} = \frac{t_n}{3} = \frac{t_{n-1}}{3 \cdot 3} = ... = \frac{t_2}{3^{n-1}}.$$

В нашем случае $n = 5$, поэтому:

$$t_5 = \frac{t_1}{3^4} = \frac{80}{81} \text{ мин} \approx 1 \text{ мин}.$$

Ответ: 1. 80 мин; 2. 30 км; 3. $\frac{80}{81}$ мин ≈ 1 мин.

Вариант 7.3

7.3.1. Заметим, что в плите с 5 полостями будет 28 прутьев арматуры. Рассмотрим кусок такой плиты длиной l м. Согласно определению линейной плотности:

$$\rho_{\text{лин}} = \frac{m_{\text{общ}}}{l}.$$

Пусть m_1 — масса железа, m_2 — масса бетона.

$$m_{\text{общ}} = m_1 + m_2.$$

Вычислим массу железа.
V_1 — суммарный объем, занимаемый прутьями арматуры, $r_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ м — радиус арматурных прутьев, $\rho_1 = 7800$ кг/кг^3 — плотность железа.

$$V_1 = 28l \cdot \pi r_1^2 = 28l \cdot 3.14 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 \approx 0.0022l \text{ м}^3.$$

$$m_1 = \rho_1 V_1 \approx 7800 \text{ кг/кг}^3 \cdot 0.0022l \text{ м}^3 \approx 17l \text{ кг}.$$

Вычислим массу бетона.
V_2 — объем бетона, $\rho_2 = 2500$ кг/кг^3 — плотность бетона, $r_0 = 6 \cdot 10^{-2}$ м — радиус полостей, $a = 0.76$ м — ширина среза, $b = 0.18$ м — высота среза.
Бетоном заполнен весь объем плиты вне пустот и арматурных прутьев, поэтому вычисляем его объем следующим образом:

$$V_2 = (ab - 5\pi r_0^2)l - V_1 \approx$$

$$\approx (0.76 \cdot 0.18 \cdot l - 5 \cdot 3.14 \cdot 36 \cdot 10^{-4} \cdot l - 0.0022l) \text{ м}^3 \approx 0.078l \text{ м}^3,$$

$$m_2 = \rho_2 V_2 \approx 2500 \text{ кг/кг}^3 \cdot 0.078l \text{ м}^3 \approx 195l \text{ кг}.$$

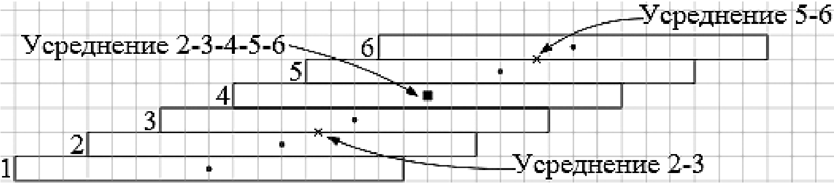
Вычислим линейную плотность данной плиты:

$$\rho_{\text{лин}} = \frac{m_1 + m_2}{l} \approx \frac{(17 + 195)l \text{ кг}}{l \text{ м}} \approx 212 \text{ кг/м}.$$

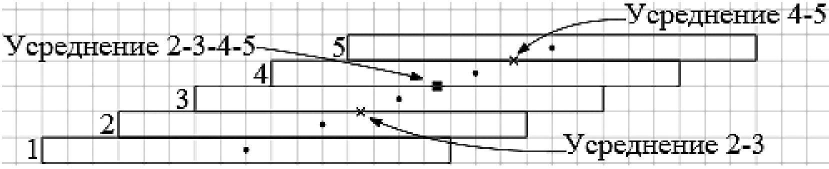
Ответ: 212 кг/м.

7.3.2. Вопрос 1:
Для того, чтобы новая карта не упала, точка приложения действующей на нее силы тяжести должна находиться над площадью опоры. Поэтому при добавлении карты верхняя упадет в том и только в том случае, когда больше ее половины будет находиться в воздухе (карты складывают одна на другую аккуратно, поэтому будем считать, что при перекрытии 50% верхняя карта находится в равновесии).
Допустим, что конструкция из N карт устойчива, а из $N+1$ — нет. Заметим, что разрушение начнется между 1 и 2 картой, а не между N и $N+1$ картами, как могло бы показаться. Это связано с тем, что конструкция с 2 по $N+1$ карту содержит N карт, а про такую конструкцию известно, что она устойчива.
Рассмотрим конструкцию из шести карт и покажем, что она окажется неустойчивой: усредненные точки приложения силы тяжести для карт 2-3 и 5-6 показаны на рисунке (карты одинаковые, поэтому точки находятся на середине отрезка, соединяющего центры карт). Видно, что если аналогичным образом мы найдем усредненную точку приложения силы тяжести для

карт 2-3-5-6, то она будет совпадать с центром карты 4. Следовательно, она находится правее нижней карты, поэтому конструкция обрушится.



Теперь рассмотрим конструкцию из 5 карт: усредненные точки приложения силы тяжести для карт 2-3 и 4-5 найдем так же, как в предыдущем примере. Аналогично находим усредненную точку приложения силы тяжести для карт 2-5 и видим, что она находится над нижней картой, следовательно, такая конструкция устойчива.

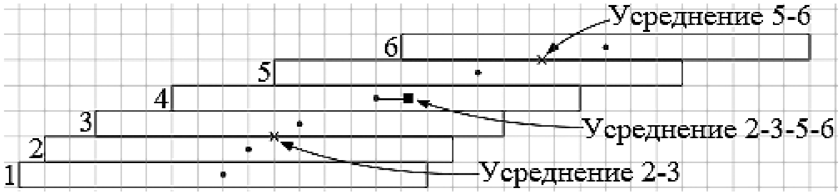


Таким образом, нарушение равновесия произойдет при добавлении 6 карты, причем между картами 1-2, а не 5-6, как могло бы показаться.

Вопрос 2:
Рассмотрим этот вопрос аналогично вопросу 1. Сначала рассмотрим конструкцию из 7 карт (см. рис): усредненные точки приложения силы тяжести для карт 2-3, 6-7 и 4-5 найдем так же, как в вопросе 1. Затем находим усредненную точку приложения силы тяжести для карт 2-3-6-7.
Таким образом, нам осталось найти то же самое для конструкции из двух составляющих: объединения карт 2-3-6-7 и объединения карт 4-5. Массы этих двух объектов будут отличаться, поэтому усредненная точка приложения силы тяжести больше не будет делить отрезок между усреднениями 4-5 и 2-3-6-7 на две равные части, но она будет лежать на этом отрезке. Так

как отрезок полностью находится правее нижней карты, конструкция обрушится.

Теперь рассмотрим конструкцию из 6 карт: усредненные точки приложения силы тяжести для карт 2-3 и 5-6 найдем так же, как в предыдущем примере. Аналогично находим усредненную точку приложения силы тяжести для карт 2-3-5-6, и нам остается найти то же самое для объединения карт 2-3-5-6 и карты 4 (ее центр тяжести лежит в центре карты 4). Как и в предыдущем примере, усредненная точка приложения силы тяжести будет лежать отрезке между усреднением 2-3-5-6 и центром тяжести карты 4. Так как отрезок полностью находится над нижней картой, конструкция устойчива.



Таким образом, седьмая карта разрушит конструкцию.

Ответ: 1. Шестая карта разрушит, между первой и второй; 2. Седьмая карта разрушит.

7.3.3. 1. Пусть T — сила натяжения нити. Напишем второй закон Ньютона для грузов m_1 и m_2 и учтем, что система находится в равновесии:

$$m_1 g - 2T = 0,$$

$$m_2 g - T = 0.$$

Выразив T из второго уравнения и подставив его в первое, получим $m_1 = 2m_2 = 600$ г.

2. Напишем второй закон Ньютона для первой и второй пружины:

$$k_1 \Delta l_1 = T,$$

$$k_2 \Delta l_2 = 2T.$$

Из пункта 1 известно, что $T = m_2 g$, тогда

$$\Delta l_1 = \frac{m_2 g}{k_1} = \frac{0,3 \cdot 10}{40} = 0.075 \text{ м} = 7.5 \text{ см},$$

$$\Delta l_2 = \frac{2m_2 g}{k_2} = \frac{2 \cdot 0,3 \cdot 10}{100} = 0.06 \text{ м} = 6 \text{ см}.$$

3. Пусть Δh — высота, на которую опустились грузы M_1 и M_2. Массы обоих грузов увеличились в два раза, следовательно, растяжения пружин тоже увеличились в два раза. Это значит, что первый и второй блок опустились на Δl_1 и Δl_2 соответственно. Для того, чтобы все грузы опустились на одну и ту же величину Δh, нужно, чтобы все три части веревки (слева и справа от первого блока и справа от второго блока) опустились на Δh. Тогда:

$$3\Delta h = 2\Delta l_2 + \Delta l_1,$$

$$\Delta h = \frac{2\Delta l_2 + \Delta l_1}{3} = \frac{2 \cdot 6 + 7.5}{3} = 6.5 \text{ см}.$$

Ответ: 1. 600 г; 2. 7.5 см и 6 см; 3. 6.5 см.

7.3.4. Обозначения:
$\rho_0 = 1000$ кг/м^3 — плотность воды;
ρ_1 — плотность неизвестной жидкости;
$\rho_2 = 750$ кг/м^3 — плотность бензина;
h_2 — толщина слоя бензина.
1) Запишем условие плавания внутреннего сосуда:

$$\rho_1 S_1 \frac{h}{3} g = \rho_0 S_1 \frac{h}{2} g,$$

$$\rho_1 = 1.5\rho_0 = 1.5 \cdot 1000 \text{ кг/м}^3 = 1500 \text{ кг/м}^3.$$

2) Для того чтобы вычислить перемещение внутреннего сосуда Δx, нужно учесть перемещение воды во внешнем сосуде.

$$\Delta x = x_1 - x_2.$$

x_1 — высота погруженной части внутреннего сосуда, x_2 — изменение уровня жидкости во внешнем сосуде.

$$x_1 = \frac{h}{2} = \frac{15}{2}\ \text{см} = 7.5\ \text{см}.$$

Объем погруженной части внутреннего сосуда равен объему вытесненной воды во внешнем сосуде. Так можем найти, насколько изменился уровень воды:

$$S_1 \Delta x = (S_2 - S_1) x_2,$$

$$S_1 x_1 = S_2 x_2,$$

$$x_2 = \frac{S_1}{S_2} x_1 = \frac{16\ \text{см}^2}{24\ \text{см}^2} \cdot 7.5\ \text{см} = 5\ \text{см}.$$

Тогда перемещение внутреннего сосуда равно:

$$\Delta x = x_1 - x_2 = (7.5 - 5)\ \text{см} = 2.5\ \text{см}.$$

3) Запишем условие плавания внутреннего сосуда, в который долили бензин, при условии, что уровень жидкости во внутреннем и внешнем сосудах совпадают:

$$\rho_0 S_1 g \left(\frac{h}{3} + h_2\right) = \left(\rho_1 \frac{h}{3} + \rho_2 h_2\right) S_1 g,$$

$$\rho_1 \frac{h}{3} + \rho_2 h_2 = \rho_0 \frac{h}{3} + \rho_0 h_2,$$

$$h_2 (\rho_0 - \rho_2) = \frac{h}{3} (\rho_1 - \rho_0),$$

$$h_2 = h \cdot \frac{(\rho_1 - \rho_0)}{3(\rho_0 - \rho_2)} = 15\ \text{см} \cdot \frac{(1500 - 1000)\ \text{кг/м}^3}{3 \cdot (1000 - 750)\ \text{кг/м}^3} = 10\ \text{см}.$$

Ответ: 1) 1500 кг/м^3; 2) 2.5 см; 3) 10 см.

7.3.5. 1. Пусть t_1 — время, прошедшее с момента выхода собаки из деревни А до первой встречи мальчика и собаки. К моменту встречи они прошли равные расстояния, значит:

$$v t_1 + \frac{1}{2} v = 2 v t_1,$$

$$t_1 = \frac{1}{2} \text{ часа.}$$

В момент первой встречи расстояние между мальчиком и деревней равно $S = AB - 2vt_1$. После встречи собака, добежав до деревни, пройдет путь S, а для того, чтобы встретиться, мальчик и собака дополнительно в сумме должны тоже пройти путь S. Тогда:

$$vt_2 + 2vt_2 = 2S,$$

$$t_2 = \frac{2}{3v} \cdot (AB - 2vt_2) = \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot (15 - 5) = \frac{4}{3} \text{ часа} = 80 \text{ мин.}$$

2. Пусть t — время, прошедшее от выхода собаки до того, как мальчик дошел до деревни. За это время собака пробежит расстояние $L = 2vt$. Время найдем по формуле:

$$t = \frac{AB - vt_1}{v} = \frac{15 - 2.5}{5} = 2.5 \text{ часа.}$$

Тогда

$$L = 2vt = 25 \text{ км.}$$

3. Пусть t_n — время между встречами под номерами n и $n-1$, S_n — расстояние от мальчика до деревни во время $n-1$ встречи (то есть расстояние, которая должна пробежать собака от мальчика до деревни в промежутке между встречами n и $n-1$), при этом промежуток между первой и второй встречей рассматривать не будем (то есть $n > 2$). Аналогично пункту 1, получаем:

$$vt_n + 2vt_n = 2S_n.$$

Теперь рассмотрим промежуток от n до $n+1$ встречи. Для него так же выполнено:

$$vt_{n+1} + 2vt_{n+1} = 2S_{n+1}.$$

С другой стороны, ясно, что расстояние S_{n+1} будет меньше, чем S_n на величину пути, который мальчик прошел по направлению к деревне, то есть:

$$S_{n+1} + vt_n = S_n.$$

Из этих условий мы можем найти связь между t_{n+1} и t_n:

$$3vt_n = 2(S_{n+1} + vt_n),$$

$$vt_n = 3vt_{n+1},$$

$$t_{n+1} = \frac{t_n}{3}.$$

Выразим t_{n+1} через t_2:

$$t_{n+1} = \frac{t_n}{3} = \frac{t_{n-1}}{3 \cdot 3} = ... = \frac{t_2}{3^{n-1}}.$$

В нашем случае $n = 5$, поэтому:

$$t_5 = \frac{t_1}{3^4} = \frac{80}{81} \text{ мин} \approx 1 \text{ мин}.$$

Ответ: 1. 80 мин; 2. 25 км; 3. $\frac{80}{81}$ мин ≈ 1 мин.

ЗАДАЧИ ДЛЯ 8–9 КЛАССА

Вариант 8-9.1

8-9.1.1. Обозначим работу, которую совершает сила трения за полный оборот системы, A. Поскольку расстояние от шаров до оси вращения одинаково, скорости шаров равны. Когда стержень совершил пол-оборота, скорости шаров уменьшились с v_0 до v_1, шар m_1 опустился на L, а шар m_2 поднялся на то же расстояние. Поскольку трение в оси постоянно, то сила трения за пол-оборота совершила работу $A/2$. Тогда

$$\frac{m_1+m_2}{2}(v_1^2-v_0^2)+(m_2-m_1)gL=\frac{A}{2},$$

так как изменение энергии системы равно работе силы трения. Пусть скорость шаров через три четверти оборота равна v_2. Тогда

$$\frac{m_1+m_2}{2}(v_2^2-v_1^2)+\frac{m_1-m_2}{2}gL=\frac{A}{4}.$$

Подставим выражение для A:

$$\frac{m_1+m_2}{2}(v_2^2-v_1^2)+\frac{m_1-m_2}{2}gL=\frac{m_1+m_2}{4}(v_1^2-v_0^2)+\frac{m_2-m_1}{2}gL.$$

Отсюда находим v_2:

$$v_2^2=\frac{3}{2}v_1^2-\frac{1}{2}v_0^2+\frac{2(m_2-m_1)}{m_1+m_2}gL=2\,(\text{м/с})^2\Longrightarrow v_2\approx 1.4\,\text{м/с}.$$

Ответ: $v_2\approx 1.4$ м/с.

8-9.1.2. Обозначим V_{01} и V_{02} объёмы уксусной кислоты в сосудах при температуре $t_0=20^\circ$C. Тогда

$$V_1=V_{01}(1+\beta(t_1-t_0)),\quad V_2=V_{02}(1+\beta(t_2-t_0)).$$

Массы уксусной кислоты в сосудах будут равны, соответственно,

$$m_1=\rho_0V_{01},\quad m_2=\rho_0V_{02},$$

где ρ_0 — плотность уксусной кислоты при 20°C. Пусть температура смеси после установления теплового равновесия θ. Уравнение теплового баланса имеет вид

$$cm_1(\theta - t_1) = cm_2(t_2 - \theta),$$

где c — удельная теплоемкость уксусной кислоты. Отсюда получим

$$\theta = \frac{m_1t_1 + m_2t_2}{m_1 + m_2} = \frac{V_{01}t_1 + V_{02}t_2}{V_{01} + V_{02}}.$$

Объём уксусной кислоты после смешивания равен

$$\begin{aligned} V &= (V_{01} + V_{02})(1 + \beta(\theta - t_0)) = \\ &= (V_{01} + V_{02}) \left(1 + \beta \left(\frac{V_{01}t_1 + V_{02}t_2}{V_{01} + V_{02}} - t_0\right)\right) = \\ &= V_{01} + V_{02} + \beta(V_{01}(t_1 - t_0) + V_{02}(t_2 - t_0)) = V_1 + V_2. \end{aligned}$$

Значит, после смешивания объём уксусной кислоты не изменится и останется равным $V = 90$ мл.
Ответ: 90 мл.

8-9.1.3. Очевидно, масса воздуха в колоколе пренебрежимо мала по сравнению с массой самого колокола.
1) Обозначим высоту столба жидкости из первого слоя в колоколе a. Когда низ колокола находится на линии раздела двух жидкостей, давление воздуха в нем равняется $p_1 = g\rho_1(h_1 - a) + p_0$, а его объём $V_1 = S(H - a)$. Тогда, по закону Бойля — Мариотта

$$p_0SH = (g\rho_1(h_1 - a) + p_0)S(H - a),$$

откуда следует, что

$$a^2 - a\left(H + h_1 + \frac{p_0}{g\rho_1}\right) + Hh_1 = 0.$$

Подставляя числа, получим

$$a^2 - 16a + 3 = 0.$$

Уравнение имеет два решения $a = 8 \pm \sqrt{61}$, одно из которых, очевидно больше высоты колокола H и поэтому физически не может реализоваться. Следовательно, $a = 8 - \sqrt{61} \approx 0.2$ м. Объём жидкости из первого слоя в колоколе равен $aS \approx 0.2\,\text{м}^3$.
2) Колокол начнёт тонуть, когда действующие на него сила Архимеда и сила тяжести станут равны. Из данных численных значений ясно, что это произойдет, когда колокол полностью погрузится в нижнюю жидкость. Обозначим расстояние от низа колокола до границы раздела двух жидкостей h_2, высоту столба жидкости из второго слоя в колоколе b.
Сила Архимеда, действующая на колокол и находящуюся в нем жидкость из первого слоя, равна $F_\text{А} = g\rho_2 S(H - b)$, а сила тяжести $F_\text{т} = g\rho_1 Sa + gm$. Из условия $F_\text{А} = F_\text{т}$ находим b:

$$b = H - a\frac{\rho_1}{\rho_2} - \frac{m}{\rho_2 S}.$$

Давление воздуха в колоколе при погружении во вторую жидкость на h_2 равно $p_2 = p_0 + g\rho_1(h_1 - a) + g\rho_2(h_2 - b)$. По закону Бойля – Мариотта

$$p_0 SH = (p_0 + g\rho_1(h_1 - a) + g\rho_2(h_2 - b))S(H - a - b).$$

Выразим из этого равенства h_2

$$h_2 = b + \frac{p_0}{g\rho_2}\left(\frac{H}{H - a - b} - 1\right) - (h_1 - a)\frac{\rho_1}{\rho_2},$$

и подставим b:

$$h_2 = H - \frac{m}{\rho_2 S} + \frac{p_0}{g\rho_2}\left(\frac{H}{\frac{m}{\rho_2 S} - a\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)} - 1\right) - h_1\frac{\rho_1}{\rho_2} \approx 10.6\,\text{м}.$$

Следовательно, глубина погружения колокола, при которой он начинает тонуть, равна

$$h = h_1 + h_2 \approx 12.1\,\text{м}.$$

Ответ: 1) $0.2\,\text{м}^3$; 2) 12.1 м.

8-9.1.4. Скорость тела в начале и в конце пути можно найти, приблизив соответствующие участки графиков прямыми линиями. Из графика изменения горизонтальной компоненты x видно, что в начале пути горизонтальная компонента скорости нулевая, $v_{0x} = 0$, а в конце пути $v_{1x} = 7$ м/с. Аналогично, вертикальная компонента скорости в начале пути нулевая, $v_{0y} = 0$, а в конце пути $v_{1y} = 1$ м/с. Скорость тела в начале пути равна $v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 0$, а в конце $v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2}$. Следовательно, кинетическая энергия тела увеличилась на

$$\Delta E_\text{к} = \frac{m}{2}(v_1^2 - v_0^2) = \frac{m}{2}(v_{1x}^2 + v_{1y}^2) = 25\,\text{Дж}.$$

Из графика изменения y видно, что тело спустилось на $\Delta h = 33$ м. Следовательно, потенциальная энергия тела уменьшилась на

$$\Delta E_\text{п} = mg\Delta h \approx 330\,\text{Дж}.$$

При трении выделилась энергия A, равная изменению механической энергии тела: $A = \Delta E_\text{п} - \Delta E_\text{к}$. Значит, внутренняя энергия тела увеличилась на

$$Q = A/2 = (\Delta E_\text{п} - \Delta E_\text{к})/2 \approx 152.5\,\text{Дж}.$$

Ответ: $Q \approx 152.5$ Дж.

8-9.1.5. Найдём сопротивление верхней схемы. Резисторы R_5, R_{12} и R_8 соединены последовательно, их общее сопротивление $R_{01} = 4$ Ом.

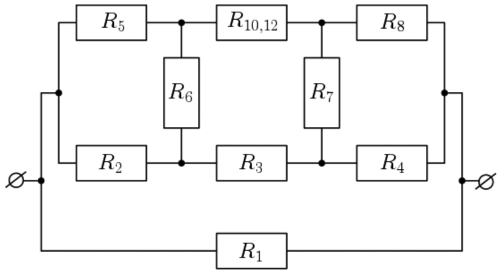
Аналогично сопротивление группы резисторов R_6, R_{10} и R_7 равно $R_{02} = 4$ Ом. Они соединены параллельно с резистором R_3, общее сопротивление группы из этих четырёх резисторов $R_{03} = \frac{R_3 R_{02}}{R_3 + R_{02}} = 4/5$ Ом.

Сопротивление группы резисторов R_2, R_3, R_4, R_6, R_7, R_{10} равно $R_{04} = 14/5$ Ом.

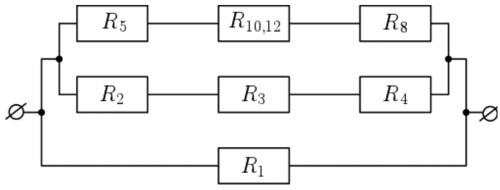
Параллельно этой ветви подключены резисторы R_5, R_{12} и R_8, поэтому сопротивление группы из всех резисторов, кроме R_1, равно $R_{05} = \frac{R_{04} R_{01}}{R_{04} + R_{01}} = 28/17$ Ом.

Наконец, общее сопротивление цепи равно $R_0 = \frac{R_1 R_{05}}{R_1 + R_{05}} = 28/45$ Ом.

Рассмотрим теперь нижнюю схему. Ясно, что резисторы R_{10} и R_{12} параллельны, и их можно заменить одним резистором сопротивлением $R_{10,12} = \frac{R_{10}R_{12}}{R_{10}+R_{12}} = 1$ Ом. Тогда нижнюю схему можно перерисовать, как показано на рисунке.



Рассмотрим отдельно верхнюю ветвь. Поскольку все резисторы в ней имеют сопротивление 1 Ом, то в силу симметрии направление движения зарядов сверху вниз и снизу вверх эквивалентны. Значит, по резисторам R_6 и R_7 ток не течёт. Поэтому схема может быть перерисована так:



Её сопротивление вычисляется элементарно, оно равно 3/5 Ом.
Ответ: 28/45 Ом, 3/5 Ом.

Вариант 8-9.2

8-9.2.1. Обозначим жёсткость пружины, соединяющей каретки друг с другом, K, жёсткость пружины, соединяющей их с потолком k, массу одной каретки m, коэффициент трения между кареткой и рельсом μ.
В первом случае на каждую из кареток в горизонтальном направлении действуют сила упругости $F_{\text{упр}} = K(L - L_0)$ со стороны пружины и сила реакции опоры N со стороны рельса, а в вертикальном направлении сила тяжести $F_{\text{т}} = gm$ со стороны земли и сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N$ со стороны рельса. Поскольку

каретки неподвижны, $N = F_{\text{упр}}$ и $F_{\text{т}} = F_{\text{тр}}$, откуда

$$\mu = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{gm}{K(L - L_0)} = 0.125.$$

Рассмотрим систему после того, как Вася прикрепил стержень к потолку пружиной и резко раздвинул рельсы. Каретки съехали вниз на расстояние $H = 7$ см и разогнались до скорости v, их потенциальная энергия уменьшилась на $2gmH$, кинетическая энергия увеличилась на mv^2. Энергия пружины, прикрепленной к потолку, увеличилась на $kH^2/2$ (так как изначально она не была деформирована), энергия пружины, соединяющей каретки, не менялась.
На каждую каретку действовала сила трения со стороны рельса $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu F_{\text{упр}} = \mu K(L - L_2)$, поэтому полная работа силы трения равна $-2F_{\text{тр}}H$. Изменение энергии системы равно работе силы трения, следовательно,

$$-2\mu K(L - L_2)H = mv^2 + kH^2/2 - 2gmH,$$

откуда находим кинетическую энергию кареток:

$$mv^2 = 2gmH - 2\mu K(L - L_2)H - kH^2/2.$$

Когда Вася сдвинул рельсы обратно, сила трения увеличилась и стала равной $F_{\text{тр}} = \mu K(L - L_1)$. Пусть до полной остановки каретки проехали расстояние h. Работа силы трения на этом участке $-2\mu K(L - L_1)h$, кинетическая энергия кареток уменьшилась на mv^2, потенциальная — на $2gmh$, а энергия вертикальной пружины увеличилась на $k((h + H)^2 - H^2)/2$. Значит

$$-2\mu K(L - L_1)h = k\left((h + H)^2 - H^2\right)/2 - mv^2 - 2gmh.$$

Из этого равенства получаем квадратное уравнение для h:

$$h^2 + 2h\left(H + \frac{2\mu K(L - L_1) - 2gm}{k}\right) + \\ + H^2 + 4\frac{\mu K(L - L_2) - gm}{k}H = 0.$$

Подставляя числовые значения в СИ, получим

$$h^2 + 0,24h - 0,0161 = 0.$$

У этого уравнения есть два решения $h = -0,12 \pm 0,01\sqrt{305}$ м. Ясно, что физический смысл имеет только положительный корень $h \approx 5.5$ см.
Ответ: $\mu = 0.125$, $h \approx 5.5$ см.

8-9.2.2. Поскольку при падении с верха башни капли свинца застывают у самой поверхности воды, то во время полета их температура не меняется и равна температуре плавления. Когда капля падает в воду, часть воды выкипает, пока температура капли не станет равна $T_{\text{к}}$, затем происходит нагрев оставшейся воды. Заметим, что капли обладают потенциальной энергией, которая тоже переходит во внутреннюю энергию воды.
Уравнение теплового баланса для первых $N = 1200$ капель имеет вид

$$N(gmh_1 + c_{\text{с}}m(T_{\text{пл}} - T_{\text{к}})) = c_{\text{в}}M(T_{\text{к}} - T_0) + L\Delta M_1,$$

так как по условию вода нагрелась до температуры $T_{\text{к}}$. Здесь мы ввели обозначения M для изначальной массы воды в ванне и ΔM_1 для массы выкипевшей воды.
Капли, падающие с основания башни, проводят в полете в два раза меньше времени, а значит, теряют в два раза меньше энергии, поскольку их температура в полете не меняется. Они долетают до воды полузастывшими, застывают уже в воде и охлаждаются.
Уравнение теплового баланса для $n = 8$ капель, падающих с основания башни, имеет вид

$$n(gmh_2 + \lambda m/2 + c_{\text{с}}m(T_{\text{пл}} - T_{\text{к}})) = L\Delta M_2,$$

где ΔM_2 — масса испарившейся воды.

Выражая из полученных равенств ΔM_1 и ΔM_2, получим, что всего воды испарилось

$$\Delta M = \Delta M_1 + \Delta M_2 = \\ = \frac{m}{L}\left(g(Nh_1 + nh_2) + (N+n)c_{\text{с}}(T_{\text{пл}} - T_{\text{к}}) + n\frac{\lambda}{2}\right) - \\ - \frac{c_{\text{в}} M(T_{\text{к}} - T_0)}{L} \approx 63.5\,\text{г.}$$

Ответ: $\Delta M \approx 63.5$ г.

8-9.2.3. Обозначим $\rho_{\text{в}}$ плотность воздуха, m_1, V_1, ρ_1 и m_2, V_2, ρ_2 массы, объёмы и плотности стёклышка и гирь, соответственно.
Поскольку в вакууме весы находились в равновесии, то $m_2 - m_0 < m_1 < m_2 + m_0$. В воздухе на стёклышко и гири действует силы Архимеда $F_{\text{A}1} = g\rho_{\text{в}} V_1$ и $F_{\text{A}2} = g\rho_{\text{в}} V_2$, соответственно; тогда с учётом поправки $P_1 = gm_1 - g\rho_{\text{в}} V_1$ и $P_2 = gm_2 - g\rho_{\text{в}} V_2$. Естественно полагать, что m_0 пренебрежимо мало по сравнению с m_1 и m_2 (иначе результаты взвешивания имели бы большую погрешность). Тогда, так как $\rho_2 > \rho_1$, то $V_2 < V_1$ и $P_2 > P_1$. То есть чаша с гирями стремится опуститься, а чаша со стёклышком подняться. Чтобы весы вышли из равновесия, разница весов $P_2 - P_1$ должна быть больше gm_0. Значит,

$$m_2 - m_1 - \rho_{\text{в}}(V_2 - V_1) > m_0.$$

Используя равенства $m_1 = \rho_1 V_1$ и $m_2 = \rho_2 V_2$, получим

$$\rho_{\text{в}} m_1 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \rho_2} > m_0 + (m_1 - m_2)\left(1 + \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_2}\right).$$

Поскольку плотность воздуха в несколько тысяч раз меньше плотности золота, то слагаемым $\frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_2}$ в скобках можно пренебречь по сравнению с 1. Правая часть неравенства принимает наибольшее значение при наибольшей возможной разнице масс гирь и стёклышка — $m_1 - m_2 = m_0$. Следовательно, минимальная масса стёклышка, при которой весы выйдут из равновесия, равна

$$m_1 = \frac{2m_0}{\rho_{\text{в}}} \frac{\rho_2 \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \approx 3.1\,\text{г.}$$

Ответ: 3.1 г.

8-9.2.4. Пусть начальная скорость босса v_0. После того, как он пробил два листа гипсокартона, его скорость стала $0.89v_0$. Его энергия уменьшилась на $\Delta E = \frac{m}{2}v_0^2\left(1 - 0.89^2\right)$. Эта часть энергии пошла на разрушение двух слоев гипсокартона. Значит, чтобы пробить один слой гипсокартона, нужно совершить работу $A = \frac{\Delta E}{2} = \frac{m}{4}v_0^2\left(1 - 0.89^2\right)$.
Чтобы найти, сколько всего слоев гипсокартона пробьёт босс, нужно его начальную энергию разделить на работу по разрушению одного слоя и округлить до целого числа вниз:

$$N = \left[\frac{mv_0^2}{2A}\right] = \left[\frac{2}{1 - 0.89^2}\right] = 9.$$

Но, поскольку первая стена состояла из двух слоев гипсокартона, то всего босс пробил 8 стен.
Ответ: 8 стен.

8-9.2.5. Поскольку через амперметр A_2 течёт ток $I_2 = 4.0$ А, а падение напряжения на нем равно $U_2 = 0.8$ В, то сопротивление амперметра равно $r_\text{A} = U_2/I_2 = 0.2$ Ом.
Через испорченный вольтметр V_2 течёт ток $I_1 - I_2$, следовательно, сопротивление испорченного вольтметра равно $r_\text{V} = U_2/(I_1 - I_2) = 4$ Ом.
Тогда через вольтметр V_1 и резистор R_2 течет ток $i_2 = U_1/r_\text{V} = 0.7$ А.
Из первого правила Кирхгофа следует, что через резистор R_1 течёт ток $i_1 = I_1 - i_2 = 3.5$ А.
Отношение токов i_1 и i_2 равно $\frac{i_1}{i_2} = \frac{r_\text{V}+R}{R}$, где R — сопротивление резисторов R_1 и R_2.
Следовательно, $\frac{r_\text{V}}{R} = \frac{i_1}{i_2} - 1 = 4$, откуда $R = r_\text{V}/4 = 1$ Ом.
Теперь без труда можно найти напряжение, поданное на цепь:

$$U = I_1 r_\text{A} + U_2 + i_1 R = 5.14\,\text{В}.$$

Ответ: 5.14 В.

Вариант 8-9.3

8-9.3.1. Сила натяжения нити, прикреплённой к правому концу рычага, равна силе тяжести, действующей на груз m_1:

$$T_1 = m_1 g = 0.2\,\text{Н}.$$

Сила натяжения нити, за которую подвешен крайний правый блок, вдвое больше T_1:

$$N = 2T_1 = 0.4\,\text{Н}.$$

Запишем условие равновесия рычага:

$$T_2 l_2 + Mg\frac{l_1 - l_2}{2} = T_1 l_1.$$

Из него найдём силу натяжения нити T_2:

$$T_2 = \frac{l_1}{l_2}T_1 - \frac{l_1 - l_2}{2l_2}Mg = 0.2\,\text{Н}.$$

Сила натяжения нити, перекинутая через самый нижний блок, вдвое меньше T_2. Из условия равновесия левого верхнего блока найдем удлинение x_1 первой пружины:

$$k_1 x_1 = 2T_1 + gm_2 + \frac{T_2}{2} = 0.6\,\text{Н} \longrightarrow x_1 = 3\,\text{см}.$$

Аналогично найдем удлинение второй пружины:

$$k_2 x_2 = \frac{T_2}{2} - 2T_1 = -0,3\,\text{Н} \Longrightarrow x_2 = -3\,\text{см}.$$

Знак «минус» показывает, что пружина сжата, а не растянута.
Ответ: $T_2 = 0.2$ Н, $x_1 = x_2 = 3$ см, $N = 0.4$ Н.

8-9.3.2. Обозначим массу вещества m, теплоёмкость вещества в жидком состоянии $C_{\text{ж}}$, в твёрдом состоянии — $C_{\text{тв}}$, теплоемкость гири — $C_{\text{г}}$, мощность нагревателя — P.
Ясно, что по вертикали отложена температура, а по горизонтали — время. Первый участок графика соответствует нагреву вещества до температуры плавления. Второй участок изображает плавление вещества, которое полностью завершилось за время τ_1. Третий участок соответствует нагреву вещества в жидком состоянии до температуры кипения. Четвертый участок изображает кипение вещества, происходившее в течение времени τ_2, пока в калориметр не уронили гирю. Наконец, последний участок графика соответствует нагреванию невыкипевшего вещества и гири. Обозначим коэффициенты наклона

первого, третьего и последнего участков графика k_1, k_2 и k_3 соответственно. Эти величины показывают, на сколько градусов нагрелось содержимое калориметра за единицу времени. Из рисунка видно, что (в условных единицах) $k_1 = 6$, $k_2 = 7/3$, $k_3 = 2$, $\tau_1 = 6$, $\tau_2 = 3$.
Уравнения теплового баланса для первого и третьего участков графика записываются следующим образом:

$$k_1 C_{\text{тв}} = P, \quad k_2 C_{\text{ж}} = P.$$

Отсюда мгновенно получаем, что

$$C_{\text{тв}}/C_{\text{ж}} = k_2/k_1 = 7/18.$$

Поскольку за время τ_1 всё вещество расплавилось, то

$$\tau_1 P = \lambda m.$$

За время τ_2 часть вещества массой Δm выкипела:

$$\tau_2 P = L\Delta m.$$

Из последних двух соотношений находим, что

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{\tau_2 \lambda}{\tau_1 L} = \frac{1}{26}.$$

Следовательно, теплоёмкость оставшегося в калориметре вещества равна

$$C'_{\text{ж}} = \frac{m - \Delta m}{m} C_{\text{ж}} = \frac{25}{26} C_{\text{ж}}.$$

Уравнение теплового баланса при нагревании невыкипевшего вещества и гири:

$$k_3 \left(C'_{\text{ж}} + C_{\text{г}} \right) = P.$$

Используя равенство $P = k_1 C_{\text{тв}}$ и выражение для $C'_{\text{ж}}$, получим

$$\frac{C_{\text{г}}}{C_{\text{тв}}} = \frac{k_1}{k_3} - \frac{25}{26} \frac{C_{\text{ж}}}{C_{\text{ТВ}}} = \frac{48}{91}.$$

Ответ: $C_{\text{тв}}/C_{\text{ж}} = 7/18$, $C_{\text{г}}/C_{\text{тв}} = 48/91$.

8-9.3.3. 1) Пока в жидкость не опустили цилиндр, условие равенства давлений в сообщающихся сосудах имеет вид

$$g\rho_1 h_1 + g\rho_2 h = g\rho_1 h_2,$$

где h — высота столба жидкости плотностью ρ_2. Следовательно, объём этой жидкости V_2 равен

$$V_2 = hS_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2}(h_2 - h_1)S_1 = 125\,\text{см}^3.$$

2) Обозначим высоту находящейся в воздухе части цилиндра a. Предположим, что цилиндр погружен только в жидкость плотности ρ_2. В этом случае на цилиндр действуют сила тяжести $F_\text{т} = mg$ и сила Архимеда $F_\text{А} = \rho_2 V g$, где m — масса цилиндра, V — объем погруженной части цилиндра. Поскольку цилиндр неподвижен, эти силы равны:

$$mg = \rho_2 V g \Longrightarrow \rho_0 SH = \rho_2 S(H - a) \Longrightarrow H - a = \frac{\rho_0}{\rho_2}H = 7.5\,\text{см}.$$

Но тогда объём V' той части жидкости плотностью ρ_2, которая находится между цилиндром и стенками сосуда, равен

$$V' = (H - a)(S_1 - S) = 150\,\text{см}^3,$$

что больше общего объём жидкости V_2. Мы пришли к противоречию. Следовательно, цилиндр погружен в обе жидкости. Высота столба жидкости плотностью ρ_2, очевидно, равна

$$b = \frac{V_2}{S_1 - S} = 6.25\,\text{см}.$$

Условие равновесия цилиндра имеет вид

$$\rho_0 SHg = \rho_2 Sbg + \rho_1 S(H - b - a)g.$$

Отсюда получаем, что высота находящейся в воздухе части цилиндра равна

$$a = H\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right) - b\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = 2.75\,\text{см}.$$

3) Пусть высота столба жидкости в правом колене h_2', расстояние от дна сосуда до нижнего основания цилиндра y.
Когда цилиндр опущен в жидкости, условие равенства давлений в сообщающихся сосудах записывается следующим образом:

$$\rho_2 bg + \rho_1 (H - b - a)g = \rho_1 (h_2' - y)g,$$

откуда

$$h_2' - y = H - b - a + \frac{\rho_2}{\rho_1} b = 6\,\text{см}.$$

Поскольку объём жидкости плотности ρ_1 не менялся, то

$$h_1 S_1 + h_2 S_2 = y S_1 + (H - b - a)(S_1 - S) + h_2' S_2.$$

Следовательно, изменение высоты столба жидкости в правом колене равно

$$h_2' - h_2 = \frac{(h_2' - y)S_1 - (h_2 - h_1)S_1 - (H - b - a)(S_1 - S)}{S_1 + S_2} = 1\,\text{см}.$$

Ответ: $V_2 = 125\,\text{см}^3$, $a = 2.75$ см, $h_2' - h_2 = 1$ см.

8-9.3.4. 1) За единицу времени через поперечное сечение второго участка трубы проходит такой же объём воды, что и через сечение первого участка, поэтому

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \Longrightarrow v_2 = S_1 v_1 / S_2 = 6\,\text{м/с}.$$

2) Обозначим скорость груза u, массу груза m, расстояние от конца трубы до колеса h.
Мощность падающей на лопасть воды

$$P_\text{з} = \mu \left(gh + \frac{v_2^2}{2} \right) = v_2 S_2 \rho \left(gh + \frac{v_2^2}{2} \right),$$

где $\mu = v_2 S_2 \rho$ — расход воды. Полезная мощность подъёмника

$$P_\text{п} = gmu.$$

Тогда КПД равен

$$\eta = \frac{P_\text{п}}{P_\text{з}} = \frac{gmu}{v_2 S_2 \rho \left(gh + \frac{v_2^2}{2} \right)} = 0.2\%.$$

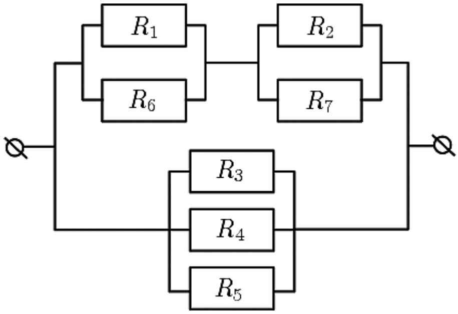
Ответ: $v_2 = 6$ м/с, $\eta = 0.2\%$.

8-9.3.5. Данная в условии схема эквивалентна изображенной на рисунке.

Сопротивление $R_{1,6}$ параллельно соединенных резисторов R_1 и R_6 равно $R_{1,6} = \frac{R_1 R_6}{R_1+R_6} = \frac{28}{11}$ Ом. Аналогично, $R_{2,7} = \frac{R_2 R_7}{R_2+R_7} = \frac{30}{11}$ Ом.

Таким образом, сопротивление всей верхней ветви $R_в = R_{1,6} + R_{2,7} = \frac{58}{11}$ Ом.

Поскольку $R_в > R_5 > R_4 > R_3$, то максимальный ток протекает через резистор R_3. Его значение, по закону Ома, равно $I_{max} = \frac{U}{R_3} = 87$ А.



Сила тока, протекающего через верхнюю ветвь, равна $I_в = \frac{U}{R_в} = 16.5$ А. Силы токов I_1 и I_6, протекающих через R_1 и R_6, относятся как $\frac{I_1}{I_6} = \frac{R_6}{R_1} = \frac{7}{4}$, аналогично $\frac{I_2}{I_7} = \frac{R_7}{R_2} = \frac{6}{5}$. Следовательно, минимальный ток протекает через R_6, его значение равно $I_{min} = \frac{4}{11} I_в = 6$ А.

Общее сопротивление нижней ветви схемы равно

$$R_н = \frac{R_3 R_4 R_5}{R_3 R_4 + R_5 R_3 + R_4 R_5} = \frac{6}{11} \text{ Ом.}$$

Значит, общее сопротивление схемы

$$R_0 = \frac{R_н R_в}{R_н + R_в} = \frac{87}{176} \text{ Ом.}$$

Ответ: $I_{max} = 87$ А, $I_{min} = 6$ А, $R_0 = \frac{87}{176}$ Ом.

ЗАДАЧИ ДЛЯ 10–11 КЛАССА

Вариант 10-11.1

10-11.1.1. Пронумеруем блоки по порядку от свободного конца верёвки. При подъёме с ускорением можно выписать второй закон Ньютона для груза и двух жёстко прикреплённых к нему блоков.

$$T_1 + T_2 + T_3 + F - (M + 2m)g = (M + 2m)a.$$

Здесь F — сила, с которой тянут верёвку T_i — сила натяжения верёвки после i-го блока, M — масса груза, а m — масса одного блока.

1) Ответ на первый вопрос можно получить уже из записанного уравнения. Если блоки не имеют массы, силы натяжения равны между собой и равны F, следовательно $F = \frac{1}{4}M(a + g)$=275 Н.

2)Сила натяжения верёвки меняется после каждого блока, из-за того, что блоки массивные и для того, чтобы их раскрутить требуется усилие. Найти изменения силы натяжения можно из правила моментов:

$$\begin{cases} R(F - T_1) = I\beta_1, \\ R(T_2 - T_1) = I\beta_2, \\ R(T_3 - T_2) = I\beta_3. \end{cases}$$

β_i — угловое ускорение i-го блока, $I = mR^2$ — момент инерции, R — радиус блока. Благодаря кинематической связи можно выразить угловые ускорения блоков через a. $\beta_3 = a/R$, $\beta_2 = 2a/R$, $\beta_1 = 3a/R$. Решая систему, получаем ответ: $F = \frac{1}{4}\left[(2m + M)(a + g) + 14ma\right]$=320 Н. Как видно, радиус сократился и не фигурирует в ответе. Условием того, что система становится невыгодной, является отсутствие выигрыша в силе. Это эквивалентно равенству силы F силе, которую нужно приложить к грузу, чтобы он двигался с тем же ускорении. Что даёт: $m = \frac{M(3g-a)}{18a+2g} \approx 76$ кг.

3) Можно честно расписать все случаи, когда мы меняем один из блоков, и понять, что выгоднее всего менять первый от тянущего. Но этот факт можно заметить из следующих рассуж-

дений: если блок неидеальный, то он ослабляет натяжение верёвки от себя и до конца системы. Следовательно, чем ближе к тянущему мы ставим идеальный блок, тем больше получаем выигрыш.

Ответ: 1)$F = \frac{1}{4}M(a+g)$=275 Н; 2)$F = \frac{1}{4}[(2m+M)(a+g)+14ma]$=320 Н; $m = \frac{M(3g-a)}{18a+2g} \approx 76$ кг; 3) Первый от тянущего.

10-11.1.2. 1) Минимальный объем достигается в точке 2, значит, $V_2 = 1$л $= 10^{-3}$м^3.

Максимальный объём соответствует точке 4, значит, $V_4 = 64$ л $= 64 \cdot 10^{-3}$ м^3.

Минимальное давление соответствует точкам 4 и 1, значит, $P_1 = P_4 = 10^5$ Па.

Зная работу в процессе $4 \to 1$, можно найти объём V_1: $|A_{41}| = P_4(V_4 - V_1)$, откуда находим, что $V_1 = \frac{P_4V_4 - |A_{41}|}{P_4} = 8$ л$= 8 \cdot 10^3$ м^3.

Процесс $1 \to 2$ — адиабата, следовательно, $P_1V_1^{5/3} = P_2V_2^{5/3}$, тогда и находим давление $P_2 = P_1(\frac{V_1}{V_2})^{5/3} = 32 \cdot 10^5$ Па.

Процесс $2 \to 3$ — изобара, поэтому $P_3 = P_2 = 32 \cdot 10^5$ Па.

Процесс $3 \to 4$ — изотерма, поэтому $P_3V_3 = P_4V_4$, откуда $V_3 = V_4\frac{P_4}{P_3} = 2$ л$= 2 \cdot 10^{-3}$ м^3. Тогда отношение температур $T_3/T_1 = (P_3V_3)/(P_1V_1) = 8$.

2) Теплота подводится к газу на участках $2 \to 3$ и $3 \to 4$, а отводится — на участке $4 \to 1$. Найдем подведённое тепло:

$$Q^+ = Q_{23} + Q_{34} = A_{23} + A_{34} + \Delta U_{24} =$$
$$= P_2(V_3 - V_2) + P_3V_3 \ln\frac{V_4}{V_3} + \frac{3}{2}(P_3V_3 - P_2V_2) \approx$$
$$\approx 302.08 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot \text{л} = 30208 \text{ Дж}.$$

Отведенная теплота:

$$Q^- = |Q_{41}| = |A_{41} + \Delta U_{41}| = 5/2P_1(V_4 - V_1) = 14000 \text{ Дж}.$$

Полезная работа:

$$A = P_2(V_3 - V_2) + P_3V_3 \ln\frac{V_4}{V_3} - P_1(V_4 - V_1) - \frac{3}{2}(P_2V_2 - P_1V_1) \approx$$
$$\approx 162.08 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot \text{л} = 16208 \text{ Дж}.$$

Итоговая формула для КПД после деления числителя и знаменателя на минимальные давления и объём P_1 и V_2 :

$$\eta=\frac{A}{Q^+}=\frac{\frac{P_2}{P_1}\left(\frac{V_3}{V_1}-1\right)+\frac{P_3}{P_1}\frac{V_3}{V_2}\ln\frac{V_4}{V_3}+\frac{3}{2}\left(\frac{P_3}{P_1}\frac{V_3}{V_2}-\frac{P_2}{P_1}\right)}{\frac{P_2}{P_1}\left(\frac{V_3}{V_2}-1\right)-\left(\frac{V_4}{V_2}-\frac{V_1}{V_2}\right)+\frac{P_3}{P_1}\frac{V_3}{V_2}\ln\frac{V_4}{V_3}-\frac{3}{2}\left(\frac{P_2}{P_1}-\frac{V_1}{V_2}\right)}=$$

$$=\frac{320\ln 2-60}{320\ln 2+80}=\frac{16\ln 2-3}{16\ln 2+4}\approx 53.6\%.$$

Ответ: 1) $T_3/T_1=8$; 2) $\eta=(16\ln 2-3)/(16\ln 2+4)\approx 53.6\%$.

10-11.1.3. 1) Допустим, жидкость поднялась на высоту h внутри конденсатора. Тогда через неё течёт некоторый ток. На жидкость действует две силы: сила тяжести и сила Ампера. Чем выше поднимается жидкость, тем меньше сопротивление в цепи и больше выделяемая мощность. Принципиально возможны два режима работы источника: когда выделяемая мощность меньше P_m и когда она равна этому значению.

Рассмотрим первый случай, когда мощность меньше максимальной. Напряжение на конденсаторе равно U и величина тока определяется законом Ома:

$$I=\frac{U}{R}=\frac{Uah}{\rho_э d}.$$

Для того, чтобы жидкость поднималась вверх необходимо, чтобы выполнялось неравенство $F_A\geq mg$, т. е. чтобы сила Ампера была больше силы тяжести, действующей на жидкость. Расписывая величины, входящие в это условие, получаем:

$$\frac{Uah}{\rho_э d}Bd>\rho_{пл}dahg.$$

После сокращений:

$$UB>\rho_{пл}\rho_э gd.$$

Если это условие не выполняется, то жидкость не затекает в конденсатор и высота подъёма равна нулю. Можно заметить, что в получившемся неравенстве отсутствует h. То есть в том случае, если неравенство выполняется, жидкость будет подниматься до тех пор, пока источник не перейдёт в режим работы с максимальной мощностью. В этом режиме величина тока определяется из формулы для мощности $I^2R = P_m$, откуда получаем:

$$I = \sqrt{\frac{P_m a h}{\rho_э d}}.$$

Жидкость перестанет подниматься, когда сила Ампера станет равной силе тяжести.

$$\sqrt{\frac{P_m a h}{\rho_э d}} B d = \rho_{пл} d a h g.$$

И получаем высоту подъёма жидкости: $h = \dfrac{P_m B^2}{\rho_э d \rho_{пл}^2 g^2 a}$.
Найдём высоту жидкости($h_{гр}$), при которой происходит смена режимов. При этом напряжение на источнике всё ещё равно U, а мощность уже стала P_m. $h_{гр}$ можно найти из уравнения $U^2/R = P_m$, расписывая которое:

$$\frac{U^2 h_{гр} a}{\rho_э d} = P_m \Rightarrow h_{гр} = \frac{P_m \rho_э d}{U^2 a}.$$

В случае, когда выполняется равенство $UB = \rho_{пл}\rho_э g d$, жидкость находится в равновесии внутри конденсатора при любой высоте в интервале $h \in [0; h_{гр}]$.
2) При решении второго пункта возникает вопрос: в каком режиме работает источник? Распишем отношение начальной высоты к граничной:

$$\frac{h}{h_{гр}} = \frac{P_m B^2}{\rho_э d \rho_{пл}^2 g^2 a} \frac{U^2 a}{P_m \rho_э d} = \frac{B^2 U^2}{\rho_э^2 d^2 \rho_{пл}^2 g^2}.$$

В условии дано: $UB < 2dg\rho_э\rho_{пл}$. Это значит, что при уменьшении высоты в четыре раза мощность, выделяемая в цепи, будет меньше максимальной, следовательно, напряжение на жидкости будет равно U, а полная мощность меньше P_m.
Для того, чтобы скорость на выходе из конденсатора была отличной от нуля необходимо, чтобы выполнялось условие подъёма жидкости. То есть при $UB \leq dg\rho_э\rho_{пл}$ искомая скорость v тождественно равна нулю. В дальнейшем решении будем считать, что $dg\rho_э\rho_{пл} < UB < 2dg\rho_э\rho_{пл}$.

Обозначим $h_0 = h/4$ — высота нового конденсатора. Пусть жидкость на выходе имеет скорость v. Можно написать закон изменения энергии. Работа силы Ампера идёт на изменение кинетической и потенциальной энергии жидкости. Но надо учесть, что проводящая жидкость, движущаяся в магнитном поле, создаёт противоЭДС. Поскольку жидкость несжимаема, её скорость внутри конденсатора одинакова. Тогда ток в новой системе будет равен:

$$I = \frac{U - vBd}{R}.$$

Сопротивление цепи $R = \rho_э \frac{d}{ah_0}$ в данном случае фиксировано и известно.

Для нахождения скорости можно воспользоваться законом изменения механической энергии. За время Δt работа, совершаемая силой Ампера, идёт на приращение кинетической и потенциальной энергии. Перемещение жидкости внутри конденсатора под действием силы Ампера равно $v\Delta t$. Чтобы понять изменение полной механической энергии жидкости, можно рассмотреть маленький элемент жидкости Δm. Из-за статичности картины изменение полной энергии аналогично переносу маленькой части Δm на высоту h_0 и придание её скорости v. В итоге получаем:

$$IBdv\Delta t = \frac{\Delta m v^2}{2} + \Delta m g h_0,$$

$$\frac{(U - vBd)ah_0}{\rho_э d} Bdv\Delta t = \frac{\rho_{пл} v \Delta t d a v^2}{2} + \rho_{пл} v \Delta t d a h_0 g,$$

Немного сокращаем и получаем квадратное уравнение на v:

$$\rho_{пл}\rho_э v^2 d + 2vB^2 h_0 d + 2\rho_{пл}\rho_э h_0 g d - 2Uh_0 B = 0,$$

$$v = \frac{-B^2 h_0 + \sqrt{B^4 h_0^2 + 2\rho_{пл}\rho_э h_0 (UB - \rho_{пл}\rho_э dg)}}{\rho_{пл}\rho_э d}.$$

Из формулы видно, что жидкость будет двигаться при $UB \geq \rho_{пл}\rho_э gd$.

Ответ: 1) $h = \frac{P_m B^2}{\rho_э d \rho_{пл}^2 g^2 a}$ при $UB \geq \rho_{пл}\rho_э gd$, $h = 0$ при $UB < \rho_{пл}\rho_э gd$ и $h \in [0; \frac{P_m \rho_э d}{U^2 a}]$ при $UB = \rho_{пл}\rho_э gd$

2) $v = \frac{-B^2h_0+\sqrt{B^4h_0^2+2\rho_{\text{пл}}\rho_{\text{э}}h_0(UB-\rho_{\text{пл}}\rho_{\text{э}}dg)}}{\rho_{\text{пл}}\rho_{\text{э}}d}$ при $dg\rho_{\text{э}}\rho_{\text{пл}} < UB < 2dg\rho_{\text{э}}\rho_{\text{пл}}$; и $v = 0$ при $UB \le dg\rho_{\text{э}}\rho_{\text{пл}}$

10-11.1.4. 1) Сразу после замыкания ключа в катушке будут происходить индукционные процессы. Если подождать достаточно долго, они утихнут, и катушка не будет оказывать влияние на ток в схеме. Тогда ток в установившемся состоянии будет равен $I = \mathcal{E}/(R_0 + r)$.

2) Если сердечник введён на расстояние x, то такую катушку можно представить как две последовательно соединённых катушки, одна с сердечником и длиной x, другая без сердечника длиной $D - x$. Из того, что при полностью введённом сердечнике индуктивность возрастает в k раз следует, что магнитная проницаемость сердечника равна k. Если количество витков во всей катушке N, то в её части длиной x их будет Nx/D. Общая индуктивность:

$$L = L_1 + L_2 = \frac{\mu_0 kSN^2x}{D^2} + \frac{\mu_0 SN^2(D-x)}{D^2} =$$

$$= \frac{\mu_0 SN^2}{D^2}(D + (k-1)x) = L_0\left(1 + (k-1)\frac{x}{D}\right).$$

3) Посмотрим, какая ЭДС самоиндукции возникает при вводе сердечника с нулевой начальной скоростью и постоянным ускорением. В этом случае длина введённого сердечника зависит от времени: $x(t) = at^2/2$. ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_L = -\frac{d}{dt}(LI)$. Если мы рассматриваем ситуацию, когда ток неизменен, то получаем: $\mathcal{E}_L = -\dot{L}I = L_0I(k-1)at/D$. При вводе сердечника внутрь катушки ЭДС самоиндукции направлена так, чтобы компенсировать нарастание потока. То есть, если ток течёт в заданном направлении, вдвигая сердечник мы наращиваем поток в этом направлении ($\Phi = LI$), следовательно ЭДС самоиндукции будет направлена против ЭДС источника. Закон Ома:

$$I = \frac{\mathcal{E} - L_0I(k-1)at/D}{R_{\sum}(t)};$$

Значит

$$R_{\sum}(t) = \frac{\mathcal{E}}{I} - L_0(k-1)at/D = R_0 + r - L_0(k-1)at/D.$$

Но это выражение для полного сопротивления цепи. Чтобы получить закон изменения сопротивления резистора от времени, необходимо вычесть r:

$$R(t) = \frac{\mathcal{E}}{I} - L_0(k-1)at/D = R_0 - L_0(k-1)at/D.$$

Ответ: 1) $I = \mathcal{E}/(R_0 + r)$; 2) $L = L_0\left(1 + (k-1)\frac{x}{D}\right)$; 3) $R(t) = R_0 - L_0(k-1)at/D$, где $L_0 = \mu_0 N^2 S/D$.

10-11.1.5. 1) Условием на температуру является равенство энергии, поступающей от звезды, и энергии, излучаемой в окружающее пространство по закону Стефана — Больцмана. Мощность, излучаемая звездой, поглощается сферой полностью при любом радиусе последней. Но с увеличением радиуса сферы увеличивается площадь излучающей поверхности, значит увеличиваются теплопотери. Распишем условие равновесия $P_0 = Sj$:

$$P_0 = \sigma S T^4.$$

Площадь сферы: $S = 4\pi R^2$.

$$P_0 = 4\sigma\pi R^2 T^4 \Rightarrow R = \frac{1}{2T^2}\sqrt{\frac{P_0}{\sigma\pi}} \approx 2.7 \cdot 10^{11} \text{ м} = 1.8 \text{ а.е.}$$

2а) Угловую скорость можно найти из второго закона Ньютона. На тело, лежащее на экваторе, действуют сила реакции опоры и притяжение со стороны Солнца, создавая центростремительное ускорение:

$$N + G\frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R.$$

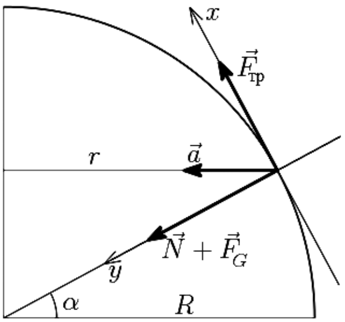
Здесь m — масса тела. По условию тело действует на поверхность сферы с такой же силой, с какой оно бы действовало на поверхность Земли в покоящемся состоянии. Это означает, что $N = mg$:

$$g + G\frac{M}{R^2} = \omega^2 R.$$

Отсюда находим угловую скорость:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R} + G\frac{M}{R^3}} = \sqrt{3.7 \cdot 10^{-11} + 6.8 \cdot 10^{-15}} \approx$$
$$\approx 6.1 \cdot 10^{-6} \text{ об/с} = 192.37 \text{ об/год}.$$

3а) Пускай предмет находится на широте α (см. рисунок). В этом положении сила тяжести и сила реакции опоры действуют по направлению к центру Солнца, а сила трения направлена по касательной к сфере в сторону ближайшего полюса. Вращение будет происходить по окружности радиусом $r = R\cos\alpha$.



Второй закон Ньютона в проекциях:

$$\begin{cases} oX: F_{тр} = m\omega^2 R\cos\alpha\sin\alpha, \\ oY: N + G\dfrac{mM}{R^2} = m\omega^2 R\cos^2\alpha. \end{cases}$$

При увеличении широты предмет может сдвинуться в разных направлениях. Тело может оторваться и улететь в направлении Солнца или может начать сдвигаться к экватору. Первый случай возникает, если реакция опоры становится равной нулю одновременно с силой трения. Второй случай возникнет при ненулевой силе реакции опоры и трении скольжения. Рассмотрим их по очереди:
$N = 0$ — случай падения:

$$G\frac{M}{R^2} = \omega^2 R\cos^2\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \arccos\left(\frac{1}{\omega}\sqrt{G\frac{M}{R^3}}\right).$$

$F_{тр} = \mu N$ — случай скольжения:

$$\begin{cases} oX: \mu N = m\omega^2 R\cos\alpha\sin\alpha, \\ oY: N + G\dfrac{mM}{R^2} = m\omega^2 R\cos^2\alpha. \end{cases}$$

$$\mu\left(m\omega^2 R\cos^2\alpha - G\frac{mM}{R^2}\right) = m\omega^2 R\cos\alpha\sin\alpha,$$

$$\omega^2\left(\mu\cos^2\alpha - \cos\alpha\sin\alpha\right) = \mu G\frac{M}{R^3},$$

$$\frac{\omega^2}{2}\left(\mu\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\right) = \mu G\frac{M}{R^3} - \mu\frac{\omega^2}{2},$$

$$\omega^2\sqrt{\mu^2+1}\left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}\cos 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{\mu^2+1}}\sin 2\alpha\right) = 2\mu G\frac{M}{R^3} - \mu\omega^2.$$

Вводим обозначение $\sin\phi = \dfrac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}$, $\cos\phi = \dfrac{1}{\sqrt{\mu^2+1}}$.

$$\omega^2\sqrt{\mu^2+1}\sin(\phi - 2\alpha) = 2\mu G\frac{M}{R^3} - \mu\omega^2,$$

$$\omega^2\sqrt{\mu^2+1}\sin(2\alpha - \phi) = \mu\omega^2 - 2\mu G\frac{M}{R^3},$$

$$\alpha_2 = \frac{\phi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left[\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}\left(1 - \frac{2GM}{\omega^2 R^3}\right)\right].$$

3б) Подставляя данные величины, можно заметить, что $\frac{2GM}{\omega^2 R^3} \approx 10^{-4}$, то есть с высокой точностью этим слагаемым можно пренебречь.

$$\alpha_2 = \arcsin\left[\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}\right] \approx 26,6^\circ,$$

$$\alpha_1 \approx 89.2^\circ.$$

$\alpha_1 > \alpha_2$, значит правильным ответом является α_2.

Ответ: 1) $R = \dfrac{1}{2T^2}\sqrt{\frac{P_0}{\sigma\pi}} \approx 2.7\cdot 10^{11}$ м $= 1.8$ а.е.; 2а) $\omega = \sqrt{\frac{g}{R} + G\frac{M}{R^3}}$; 2б) $\omega \approx 6.1\cdot 10^{-6}$ об/с $= 192.37$ об/год; 3а) Либо $\alpha_1 = \arccos\left(\frac{1}{\omega}\sqrt{G\frac{M}{R^3}}\right)$, либо $\alpha_2 = \frac{\phi}{2} + \dfrac{1}{2}\arcsin\left[\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}\left(1 - \frac{2GM}{\omega^2 R^3}\right)\right]$, где $\tan\phi = \mu$; 3б) $\alpha \approx 26,6^\circ$.

Вариант 10-11.2

10-11.2.1. 1) Теоретический выигрыш системы 4 : 1. Это следует из второго закона Ньютона для груза с двумя блоками:

$$4T - mg = 0.$$

Без учёта трения сила, необходимая для подъёма данного груза, равна 300 Н.
2) Теперь учтём силу трения. Она будет менять силу натяжения верёвки после каждого блока на величину:

$$R(T' + T) = M,$$

где T — сила натяжения верёвки до блока, T' — после. M — момент силы трения в блоке. Пусть сила, с которой тянут за верёвку, равна F. Тогда после первого блока сила натяжения верёвки равна $F - M/R$, после второго $F - 2M/R$, после третьего $F - 3M/R$. Тогда сила, действующая на груз:

$$mg = 4F - 6\frac{M}{R} \Rightarrow F = \frac{mg}{4} + \frac{3}{2}\frac{M}{R}.$$

Для массы груза 120 кг, момента 4 Н·м и радиуса 6 см сила будет равна 400 Н. Использование системы становится бессмысленным если сила, с которой мы тянем, равна силе тяжести, действующей на груз.

$$mg = \frac{mg}{4} + \frac{3}{2}\frac{M}{R}.$$

Откуда $M = mgR/2$=36 Н·м.
3) Можно честно расписать все случаи, когда мы меняем один из блоков, и понять, что выгоднее всего менять первый от тянущего. Но этот факт можно заметить из следующих рассуждений: если блок неидеальный, то он ослабляет натяжение верёвки от себя и до конца системы. Следовательно, чем ближе к тянущему мы ставим идеальный блок, тем больше получаем выигрыш.

Ответы: 1) 300 Н; 2) 400 Н, выигрыш становится 1 : 1 при M=36 Н·м; 3) Первый по верёвке от тянущего.

10-11.2.2. 1) Максимальное давление соответствует точке 3, максимальный объём — точке 4, а минимальный — точкам 2 и 3: $V_2 = V_3 = 1$ л, $V_4 = 128$ л, $P_3 = 128 \cdot 10^5$ Па, $Q_{23} = 14.4$ кДж.
Поскольку процесс $3 \to 4$ — изотермический, имеем, что $P_3V_3 = P_4V_4 \Leftrightarrow P_4 = P_3\frac{V_3}{V_4} = 128 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{128}$ Па $= 1 \cdot 10^5$ Па.
Процесс $4 \to 1$ — изобарический, поэтому $P_4 = P_1 = 1 \cdot 10^5$ Па.
Из первого начала термодинамики имеем, что $Q_{23} = U_{23} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2) = \frac{3}{2}(P_3V_3 - P_2V_2)$, откуда $P_2 = \frac{P_3V_3 - \frac{2}{3}Q_{23}}{V_2} = 32 \cdot 10^5$ Па.
Процесс $1 \to 2$ — адиабатный, имеем $P_1V_1^{5/3} = P_2V_2^{5/3}$, откуда $V_1 = 8$ л.
Из уравнения Менделеева — Клапейрона $\frac{T_3}{T_1} = \frac{P_3V_3}{P_1V_1} = 16$.
2) Теплота подводится к газу на участках $2 \to 3$ и $3 \to 4$, а отводится — на $4 \to 1$. Найдем подведённую теплоту:

$$Q^+ = Q_{23} + A_{34} = Q_{23} + P_3V_3 \ln\frac{V_4}{V_3} \approx 76505 \text{ Дж.}$$

Отведённая от газа теплота:

$$Q^- = |Q_{41}| = |A_{41} + \Delta U_{41}| = 5/2P_1(V_4 - V_1) = 30000 \text{ Дж.}$$

Полезная работа:

$$A^+ = A_{34} + A_{41} + A_{12} = P_3V_3 \ln\frac{V_4}{V_3} + P_4(V_1 - V_4) - \Delta U_{12} =$$

$$= P_3V_3 \ln\frac{V_4}{V_3} + P_4(V_1 - V_4) - 3/2(P_2V_2 - P_1V_1) \approx 46505 \text{ Дж.}$$

В таком случае получаем, что КПД $\eta = \frac{A}{Q^+} = 1 - \frac{Q^-}{Q^+} = 60.8\%$.
Ответ: 1) $T_3/T_1 = 16$; 2) $\eta \approx 60.8\%$.

10-11.2.3. 1) Направим ось oX вдоль рельса по направлению потока частиц, а ось oY вертикально вверх. Поскольку в первом эксперименте летят только нейтроны, магнитное поле на них не действует, и нам понадобится только ось oX. Тогда запишем закон изменения импульса ($\Delta p = F\Delta t$):

$$n\Delta t m_n V ab = \mu N \Delta t.$$

Отсюда $n = \frac{\mu M g}{a m_n V b}$.
2) При появлении протонов на них будет действовать сила Лоренца. Вычислим радиус окружности, по которой они будут

двигаться.

$$eVB = m_0 \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m_0 V}{eB} = h.$$

Следовательно, протоны будут вылетать из ящика вертикально вверх, не касаясь стенок. Они будут действовать на ящик по вертикальной и горизонтальной осям.
Запишем закон изменения импульса:

$$\begin{cases} oX : n\Delta t(m_p + m_n)Vab = \mu N\Delta t, \\ oY : \dfrac{n}{2}\Delta t m_p Vab + Mg\Delta t = N\Delta t. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{m_p}{2(m_p + m_n)} + \frac{Mg}{n(m_p + m_n)Vab} = \frac{1}{\mu}.$$

Учитывая, что массы протонов и нейтронов примерно одинаковы, получаем:

$$\frac{Mg}{2nVab} = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{4} \Rightarrow n = \frac{2\mu Mg}{(4-\mu)am_pVb}.$$

Ответ: 1) $n = \dfrac{\mu Mg}{m_n Vab}$; 2) $n = \dfrac{2\mu Mg}{(4-\mu)m_p Vab}$.

10-11.2.4. 1) По второму закону Кирхгофа известно, что

$$\mathcal{E} = IR + U_C = IR + q/C.$$

Сразу после замыкания ключа на обкладках конденсатора заряд отсутствует (если он был изначально разряжен), а следовательно, ток, который начнет течь через цепь, равен

$$I_1 = \mathcal{E}/R.$$

2) Рассмотрим формулу для ёмкости плоского конденсатора с диэлектрическим заполнением $C = \varepsilon_0 \varepsilon S/d$, где ε — диэлектрическая проницаемость диэлектрического заполнения, S — площадь обкладок конденсатора, а d — расстояние между ними. Нетрудно убедиться в том, что если при введении в конденсатор без заполнения диэлектрической пластины, его ёмкость вырастает в k раз, то диэлектрическая проницаемость пластины $\varepsilon = k$.

Если диэлектрик введён на расстояние x, то такой конденсатор можно представить как два параллельно соединённых конденсатора с прямоугольным пластинами, один с диэлектрическим заполнением и длинами сторон x и a, другой без заполнения с длинами сторон $a-x$ и a. Таким образом, общая ёмкость полученного конденсатора:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 kax}{d} + \frac{\varepsilon_0 a(a-x)}{d} = \frac{\varepsilon_0 a}{d}(kx + a - x).$$

3) Сила тока — это скорость изменения заряда $I = \dot{q}(t)$. Пользуясь равенством из п.1, получим

$$q = [\mathcal{E} - IR]\, C.$$

По условию, в конденсатор вводят диэлектрическую пластинку в тот момент, когда сила тока в цепи $I_2 = I_1/3$, при этом вводят с такой скоростью V, что сила тока сохраняется, т. е. $I_2 = const = I_1/3$, а $x(t) = Vt$. Таким образом, от времени зависит только ёмкость конденсатора, а значит

$$I_2 = \dot{q} = [\mathcal{E} - I_2 R]\, \dot{C} = [\mathcal{E} - I_2 R]\, \frac{\varepsilon_0 a V}{d}\,(k-1)\,.$$

С другой стороны, $I_2 = \frac{\mathcal{E}}{3R}$. Находим скорость V

$$V = \frac{d}{2R\varepsilon_0 a\,(k-1)}.$$

Ответ: 1) $I_1 = \mathcal{E}/R$; 2) $C = \varepsilon_0 a(kx+a-x)/d$; 3) $V = \frac{d}{2R\varepsilon_0 a(k-1)}$.

10-11.2.5. 1) Условием на температуру является равенство энергии, поступающей от звезды и энергии, излучаемой в окружающее пространство по закону Стефана — Больцмана. Мощность, излучаемая звездой, поглощается сферой полностью при любом радиусе последней. Но с увеличением радиуса сферы увеличивается площадь излучающей поверхности, значит увеличиваются теплопотери. Распишем условие равновесия $P_0 = Sj$:

$$P_0 = \sigma S T^4.$$

Площадь сферы: $S = 4\pi R^2$.

$$P_0 = 4\sigma\pi R^2 T^4 \Rightarrow R = \frac{1}{2T^2}\sqrt{\frac{P_0}{\sigma\pi}} \approx 6\cdot 10^{13}\ \text{м} = 400\ \text{а.е.}$$

2а) Угловую скорость можно найти из второго закона Ньютона. На тело, лежащее на экваторе, действуют сила реакции опоры и притяжение со стороны Бетельгейзе, создавая центростремительное ускорение:

$$N + G\frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R.$$

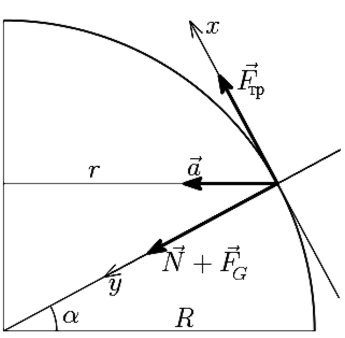
Здесь m — масса тела. По условию тело действует на поверхность сферы с такой же силой, с какой оно бы действовало на поверхность Земли в покоящемся состоянии. Это означает, что $N = mg$:

$$g + G\frac{M}{R^2} = \omega^2 R.$$

Отсюда находим угловую скорость:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R} + G\frac{M}{R^3}} = \sqrt{6\cdot 10^{-12} + 9.3\cdot 10^{-21}} \approx$$
$$\approx 4.1\cdot 10^{-7}\ \text{об/с} = 13\ \text{об/год}.$$

3а) Пускай предмет находится на широте α (см. рисунок). В этом положении сила тяжести и сила реакции опоры действуют по направлению к центру Бетельгейзе, а сила трения направлена по касательной к сфере в сторону ближайшего полюса. Вращение будет происходить по окружности радиусом $r = R\cos\alpha$.



Второй закон Ньютона в проекциях:

$$\begin{cases} oX: F_{\text{тр}} = m\omega^2 R\cos\alpha\sin\alpha, \\ oY: N + G\dfrac{mM}{R^2} = m\omega^2 R\cos^2\alpha. \end{cases}$$

При увеличении широты предмет может сдвинуться в разных направлениях. Тело может оторваться и улететь в направлении Солнца или может начать сдвигаться к экватору. Первый случай возникает, если реакция опоры становится равной нулю одновременно с силой трения.
Второй случай возникнет при ненулевой силе реакции опоры и трении скольжения. Рассмотрим их по очереди:
$N = 0$ — случай падения

$$G\frac{M}{R^2} = \omega^2 R\cos^2\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \arccos\left(\frac{1}{\omega}\sqrt{G\frac{M}{R^3}}\right).$$

$F_{\text{тр}} = \mu N$ — случай скольжения

$$\begin{cases} oX: \mu N = m\omega^2 R\cos\alpha\sin\alpha, \\ oY: N + G\dfrac{mM}{R^2} = m\omega^2 R\cos^2\alpha. \end{cases}$$

$$\mu\left(m\omega^2 R\cos^2\alpha - G\frac{mM}{R^2}\right) = m\omega^2 R\cos\alpha\sin\alpha,$$

$$\omega^2\left(\mu\cos^2\alpha - \cos\alpha\sin\alpha\right) = \mu G\frac{M}{R^3},$$

$$\frac{\omega^2}{2}\left(\mu\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\right) = \mu G\frac{M}{R^3} - \mu\frac{\omega^2}{2},$$

$$\omega^2\sqrt{\mu^2+1}\left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}\cos 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{\mu^2+1}}\sin 2\alpha\right) = 2\mu G\frac{M}{R^3} - \mu\omega^2.$$

Вводим обозначение $\sin\phi = \dfrac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}$, $\cos\phi = \dfrac{1}{\sqrt{\mu^2+1}}$.

$$\omega^2\sqrt{\mu^2+1}\sin(\phi - 2\alpha) = 2\mu G\frac{M}{R^3} - \mu\omega^2,$$

$$\omega^2\sqrt{\mu^2+1}\sin(2\alpha-\phi)=\mu\omega^2-2\mu G\frac{M}{R^3},$$

$$\alpha_2=\frac{\phi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\left[\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}\left(1-\frac{2GM}{\omega^2R^3}\right)\right].$$

3б) Подставляя данные величины, можно заметить, что $\frac{2GM}{\omega^2R^3}\approx 10^{-10}$, то есть с высокой точностью этим слагаемым можно пренебречь.

$$\alpha_2=\arcsin\left[\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}\right]\approx 23.6^\circ,$$

$$\alpha_1\approx 89.9991^\circ.$$

$\alpha_1>\alpha_2$, значит правильным ответом является α_2.

Ответ: 1) $R=\dfrac{1}{2T^2}\sqrt{\frac{P_0}{\sigma\pi}}\approx 6\cdot 10^{13}$ м $=400$ а.е.; 2а) $\omega=\sqrt{\frac{g}{R}+G\frac{M}{R^3}}$; 2б) $\omega\approx 4.1\cdot 10^{-7}$ об/с $=13$ об/год; 3а) Либо $\alpha_1=\arccos\left(\frac{1}{\omega}\sqrt{G\frac{M}{R^3}}\right)$, либо $\alpha_2=\frac{\phi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\left[\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}\left(1-\frac{2GM}{\omega^2R^3}\right)\right]$, где $\tan\phi=\mu$; 3б) $\alpha\approx 23{,}6^\circ$.

Вариант 10-11.3

10-11.3.1. 1) Теоретический выигрыш системы 6 : 1. Это следует из второго закона Ньютона для груза с двумя блоками:

$$6T-Mg=0.$$

2) Теперь учтём силу трения. Она будет менять силу натяжения верёвки после каждого блока на величину:

$$R(T-T')=F_{\text{тр}}r.$$

Правило моментов. $F_{\text{тр}}$ — сила трения в оси блока. При этом

$$\begin{cases}F_{\text{тр}}=\mu N,\\ T'+T=N,\end{cases}$$

где T — сила натяжения верёвки до блока, T' — после, N — Сила реакции опоры в блоке.
Получаем ослабление верёвки после блока:

$$R(T-T')=\mu r(T'+T)\Rightarrow T'(R+\mu r)=T(R-\mu r)\Rightarrow T'=\frac{(R-\mu r)}{(R+\mu r)}T.$$

Пусть сила, с которой тянут за верёвку, равна F. Тогда после первого блока сила натяжения верёвки равна $\frac{(R-\mu r)}{(R+\mu r)}F$, после второго $\left(\frac{(R-\mu r)}{(R+\mu r)}\right)^2 F$, в месте соединения верёвок сила натяжения возрастёт до:

$$F+\frac{R-\mu r}{R+\mu r}F+\left(\frac{R-\mu r}{R+\mu r}\right)^2 F=$$
$$=\frac{(R+\mu r)^2+(R+\mu r)(R-\mu r)+(R-\mu r)^2}{(R+\mu r)^2}F=\frac{3R^2+\mu^2 r^2}{(R+\mu r)^2}F.$$

После третьего блока: $\frac{(3R^2+\mu^2 r^2)(R-\mu r)}{(R+\mu r)^3}F$.
Тогда сила, действующая на груз со стороны полиспаста:

$$\frac{3R^2+\mu^2 r^2}{(R+\mu r)^2}F+\frac{(3R^2+\mu^2 r^2)(R-\mu r)}{(R+\mu r)^3}F=\frac{2R(3R^2+\mu^2 r^2)}{(R+\mu r)^3}F.$$

Следовательно, выигрыш системы с учётом трения будет равен $\frac{2R(3R^2+\mu^2 r^2)}{(R+\mu r)^3}=\frac{2(3+\mu^2 k^2)}{(1+\mu k)^3}$, $k=\frac{r}{R}$ — отношение радиусов. Для $\mu=0.3$, $R=3$ см и $r=1$ см получаем:

$$\frac{2(3+\mu^2 k^2)}{(1+\mu k)^3}=4.52.$$

Система станет бесполезной, если выигрыш равен 1:

$$\frac{2(3+\mu^2 k^2)}{(1+\mu k)^3}=1.$$

У этого кубического уравнения один вещественный корень: $\mu=1/k=3$. Это решение можно найти из физических соображений: при таком коэффициенте трения сила натяжения нити после первого блока равна нулю и мы тянем груз с исходной силой F.

3) Можно честно расписать все случаи, когда мы меняем один из блоков, и понять, что выгоднее всего менять первый от тянущего. Но этот факт можно заметить из следующих рассуждений: если блок неидеальный, то он ослабляет натяжение верёвки от себя и до конца системы. Следовательно, чем ближе к тянущему мы ставим идеальный блок, тем больше получаем выигрыш.

Ответы: 1) 6:1; 2) 4.5:1, выигрыш становится 1:1 при $\mu = 3$; 3) Первый по верёвке от тянущего.

10-11.3.2. 1) Максимальное давление соответствует точке 1, максимальное — точке 2, максимальный объем — точкам 4 и 1: $V_1 = V_4 = 8$ л $= 8 \cdot 10^{-3}$ м$^3, P_1 = 10^5$ Па, $P_2 = 32 \cdot 10^5$ Па, $A_{34} = 3200$ Дж.

Поскольку процесс $1 \to 2$ — адиабатный, имеем $P_1 V_1^{5/3} = P_2 V_2^{5/3}$, откуда $V_2 = V_1 (P_1/P_2)^{5/3} = 1$ л $= 10^{-3}$ м^3.

Поскольку процесс $2 \to 3$ — изотермический, следовательно, $P_2 V_2 = P_3 V_3$.

Отсюда $P_3 = P_2 \frac{V_2}{V_3}$.

Процесс $3 \to 4$ — изобарный, поэтому $A_{34} = P_4(V_4 - V_3) = P_2 \frac{V_2}{V_3}(V_4 - V_3)$.

Отсюда можем найти $V_3 = \frac{P_2 V_2 V_4}{A_{34} + P_2 V_2} = 4 \cdot 10^{-3}$ м^3.

Тогда $P_3 = P_2 \frac{V_2}{V_3} = 8 \cdot 10^5$ Па.

Процесс $3 \to 4$ — изобарический, поэтому $P_4 = P_3 = 8 \cdot 10^5$ Па.

Из уравнения Менделеева — Клапейрона $\frac{T_3}{T_1} = \frac{P_3 V_3}{P_1 V_1} = 4$.

2) Теплота подводится к газу на участках $2 \to 3$ и $3 \to 4$, а отводится на участке $4 \to 1$. Найдем подведенную к газу теплоту:

$$Q^+ = Q_{23} + Q_{34} = A_{23} + A_{34} + \Delta U_{34} =$$
$$= P_2 V_2 \ln \frac{V_3}{V_2} + A_{34} + 3/2 P_3 (V_4 - V_3) \approx 12436 \text{ Дж}.$$

Отведенная теплота: $Q^- = |Q_{41}| = |\Delta U_{41}| = \frac{3}{2} V_4 (P_4 - P_1) = 8400$Дж.

Полезная работа:

$$A^+ = A_{23} + A_{34} + A_{12} = A_{23} + A_{34} - \Delta U_{12} =$$
$$= P_2 V_2 \ln \frac{V_3}{V_2} + A_{34} - 3/2(P_2 V_2 - P_1 V_1) \approx 4036 \text{ Дж}.$$

Тогда КПД: $\eta = \frac{A^+}{Q^+} \approx 32.5\%$.
Ответ: 1) $T_3/T_1 = 4; 2) \eta \approx 32.5\%$.

10-11.3.3. 1) Жидкость поднимается наверх за счёт силы Ампера. В положении равновесия будет выполнено уравнение $F_A = F_g$. Допустим, жидкость поднялась на высоту h. Тогда сопротивление слоя жидкости между обкладками $R = \rho_э \frac{d}{ah}$ и мы можем найти ток, текущий между обкладками:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{\mathcal{E}}{\rho_э \frac{d}{ah} + r}.$$

Тогда уравнение равновесия (равенство сил Ампера и тяжести) жидкости будет выглядеть как:

$$\frac{\mathcal{E} B d}{\rho_э \frac{d}{ah} + r} = \rho_{пл} h a d g.$$

Домножая на знаменатель, получаем:

$$\mathcal{E} B d = \rho_{пл} d^2 g \rho_э + \rho_{пл} h a d g r.$$

Отсюда высота, на которую поднимется жидкость:

$$h = \frac{\mathcal{E} B - \rho_{пл} \rho_э d g}{\rho_{пл} a g r}.$$

Видно, что такое возможно только при условии $\mathcal{E} B > \rho_{пл} \rho_э d g$. В противном случае подъем жидкости не происходит и $h = 0$.
2) Обозначим $h_0 = h/2 = \frac{\mathcal{E} B - \rho_{пл} \rho_э d g}{2 \rho_{пл} a g r}$ — высота нового конденсатора. Пусть жидкость на выходе имеет скорость v. Для нахождения скорости воспользуемся энергетическими соображениями: работа силы Ампера идёт на изменение кинетической и потенциальной энергии жидкости. При этом надо учесть, что проводящая жидкость, движущаяся в магнитном поле, создаёт противоЭДС. Поскольку жидкость несжимаема, её скорость внутри конденсатора одинакова.
Тогда ток в новой системе будет равен:

$$I = \frac{\mathcal{E} - v B d}{R_{\sum}}.$$

Полное сопротивление цепи в данном случае фиксировано и может быть найдено

$$R_{\sum} = \rho_э \frac{d}{ah_0} + r = \frac{\rho_э d + rah_0}{ah_0} = \frac{2\rho_э\rho_{пл}dagr + ra(\mathcal{E}B - \rho_{пл}\rho_э dg)}{a(\mathcal{E}B - \rho_{пл}\rho_э dg)}$$

$$= \frac{2\rho_э\rho_{пл}dgr + r(\mathcal{E}B - \rho_{пл}\rho_э dg)}{\mathcal{E}B - \rho_{пл}\rho_э dg} = r\frac{\mathcal{E}B + \rho_{пл}\rho_э dg}{\mathcal{E}B - \rho_{пл}\rho_э dg}.$$

Видно, что выражение положительно при $\mathcal{E}B > \rho_{пл}\rho_э dg$.

При написании закона изменения энергии жидкости вместо рассмотрения того, что вся жидкость в сосуде немного сместилась в сторону конденсатора, будем считать, что небольшая порция жидкости Δm из дальней части сосуда (с нулевой потенциальной и кинетической энергией) была перенесена в верхнюю часть конденсатора и приобрела искомую скорость. Само собой, это верно только при стационарном течении жидкости. За время Δt конденсатор покинет порция жидкости $\Delta m = \rho_{пл} v \Delta t a d$:

$$\frac{\mathcal{E} - vBd}{R_{\sum}} dBv\Delta t = \frac{\rho_{пл} v \Delta t d a v^2}{2} + \rho_{пл} v \Delta t d a h_0 g;$$

$$\frac{\mathcal{E} - vBd}{R_{\sum}} B = \frac{\rho_{пл} a v^2}{2} + \rho_{пл} a h_0 g;$$

$$2(\mathcal{E} - vBd)B = \rho_{пл} a v^2 R_{\sum} + 2\rho_{пл} a h_0 g R_{\sum}.$$

Упрощаем и получаем квадратное уравнение на v:

$$\rho_{пл} R_{\sum} a v^2 + 2dB^2 v + 2(\rho_{пл} d a h_0 g R_{\sum} - \mathcal{E}B) = 0.$$

Выбираем положительный корень:

$$v = \frac{-dB^2 + \sqrt{d^2B^4 + 2(\mathcal{E}B - \rho_{пл} a h_0 g R_{\sum})\rho_{пл} R_{\sum} a}}{\rho_{пл} R_{\sum} a}.$$

Видно, что это возможно при $\mathcal{E}B > \rho_{пл} d a h_0 g R_{\sum}$. Подставив явные выражения для h_0 и $R_{\sum}$, несложно увидеть, что это эквивалентно условию $\mathcal{E}B > \rho_{пл}\rho_э dg$, чего и следовало ожидать. После подстановки и упрощения:

$$v = \frac{-dB^2 + \sqrt{d^2B^4 + (\mathcal{E}B - \rho_{пл} dg\rho_э)\rho_{пл} R_{\sum} a}}{\rho_{пл} R_{\sum} a}.$$

Ответ: 1) $h = \dfrac{\mathcal{E}Bd - \rho_{\text{пл}} d^2 g \rho_{\text{э}}}{\rho_{\text{пл}} adgr}$. при условии $\mathcal{E}B > \rho_{\text{пл}}\rho_{\text{э}} dg$,
$h = 0$, если $\mathcal{E}B < \rho_{\text{пл}}\rho_{\text{э}} dg$;
2) $v = \frac{-dB^2 + \sqrt{d^2B^4 + (\mathcal{E}B - \rho_{\text{пл}} dg\rho_{\text{э}})\rho_{\text{пл}} R_{\sum} a}}{\rho_{\text{пл}} R_{\sum} a}$, здесь $R_{\sum} = r\frac{\mathcal{E}B + \rho_{\text{пл}}\rho_{\text{э}} dg}{\mathcal{E}B - \rho_{\text{пл}}\rho_{\text{э}} dg}$.
Выражение имеет смысл при $\mathcal{E}B > \rho_{\text{пл}}\rho_{\text{э}} dg$.

10-11.3.4. 1) В начальный момент времени на обкладках конденсатора C_1 накоплен заряд $q = C_1U_0$. После замыкания ключа заряд перераспределится между двумя конденсаторами, а напряжение U на них выровняется. Пользуясь законом сохранения заряда,

$$C_1U_0 = (C_1 + C_2)U; \quad U = U_0\frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

2) При увеличении расстояния между обкладками, емкость конденсатора начнет меняться

$$C_1(t) = \frac{\varepsilon_0 S}{d + Vt}.$$

В связи с тем, что скорость раздвижения маленькая, можно считать, что равенство напряжений на конденсаторах будет сохраняться, а значит

$$\frac{q_1(t)}{C_1(t)} = \frac{q_2(t)}{C_2},$$

при это полный заряд сохранится $q = q_1(t) + q_2(t) = C_1(0)U_0$. Таким образом,

$$q_2(t) = \frac{C_1(0)C_2U_0}{C_1(t) + C_2}.$$

Принимая во внимание тот факт, что, по условию, $C_2 = C_1(0)/3$, получим

$$q_2(t) = \frac{C_1^2(0)U_0}{3C_1(t) + C_1(0)} = U_0C_1(0)\frac{d + Vt}{4d + Vt}.$$

$$q_1(t) = U_0C_1(0) - q_2(t) = U_0C_1(0)\frac{3d}{4d + Vt}.$$

Ответ: 1) $U = U_0\frac{C_1}{C_1 + C_2}$; 2) $q_2(t) = U_0C_1(0)\frac{d+Vt}{4d+Vt}$.

10-11.3.5. 1) Условием на температуру является равенство энергии, поступающей от звезды, и энергии, излучаемой в окружающее пространство по закону Стефана — Больцмана. Мощность, излучаемая звездой, поглощается сферой полностью при любом радиусе последней. Но с увеличением радиуса сферы увеличивается площадь излучающей поверхности, значит увеличиваются теплопотери. Распишем условие равновесия $P_0 = Sj$:

$$P_0 = \sigma S T^4.$$

Площадь сферы: $S = 4\pi R^2$.

$$P_0 = 4\sigma\pi R^2 T^4 \Rightarrow R = \frac{1}{2T^2}\sqrt{\frac{P_0}{\sigma\pi}} \approx 2.7 \cdot 10^{11} \text{ м} = 1.8 \text{ а.е.}$$

2а) Угловую скорость можно найти из второго закона Ньютона. На тело, лежащее на экваторе, действуют сила реакции опоры и притяжение со стороны Солнца, создавая центростремительное ускорение:

$$N + G\frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R.$$

m — масса тела. По условию тело действует на поверхность сферы с такой же силой, с какой оно бы действовало на поверхность Земли в покоящемся состоянии. Это означает, что $N = mg$:

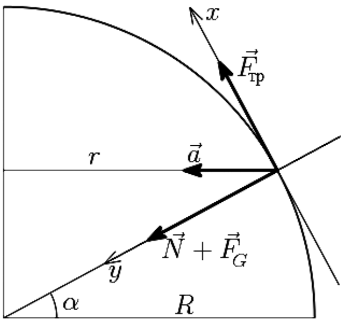
$$g + G\frac{M}{R^2} = \omega^2 R.$$

Отсюда находим угловую скорость:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R} + G\frac{M}{R^3}} = \sqrt{3.7 \cdot 10^{-11} + 6.8 \cdot 10^{-15}} \approx$$

$$\approx 6.1 \cdot 10^{-6} \text{ об/с} = 192.37 \text{ об/год}.$$

3а) Пускай предмет находится на широте α (см. рисунок). В этом положении сила тяжести и сила реакции опоры действуют по направлению к центру Солнца, а сила трения направлена по касательной к сфере в сторону ближайшего полюса. Вращение будет происходить по окружности радиусом $r = R\cos\alpha$.



Второй закон Ньютона в проекциях:

$$\begin{cases} oX : F_{\text{тр}} = m\omega^2 R\cos\alpha\sin\alpha, \\ oY : N + G\dfrac{mM}{R^2} = m\omega^2 R\cos^2\alpha. \end{cases}$$

При увеличении широты предмет может сдвинуться в разных направлениях. Тело может оторваться и улететь в направлении Солнца или может начать сдвигаться к экватору. Первый случай возникает, если реакция опоры становится равной нулю одновременно с силой трения. Второй случай возникнет при ненулевой силе реакции опоры и трении скольжения. Рассмотрим их по очереди:
$N = 0$ — случай падения:

$$G\frac{M}{R^2} = \omega^2 R\cos^2\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \arccos\left(\frac{1}{\omega}\sqrt{G\frac{M}{R^3}}\right).$$

$F_{\text{тр}} = \mu N$ — случай скольжения:

$$\begin{cases} oX : \mu N = m\omega^2 R\cos\alpha\sin\alpha, \\ oY : N + G\dfrac{mM}{R^2} = m\omega^2 R\cos^2\alpha. \end{cases}$$

$$\mu\left(m\omega^2 R\cos^2\alpha - G\frac{mM}{R^2}\right) = m\omega^2 R\cos\alpha\sin\alpha,$$

$$\omega^2\left(\mu\cos^2\alpha - \cos\alpha\sin\alpha\right) = \mu G\frac{M}{R^3},$$

$$\frac{\omega^2}{2}\left(\mu\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\right) = \mu G\frac{M}{R^3} - \mu\frac{\omega^2}{2},$$

$$\omega^2\sqrt{\mu^2+1}\left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}\cos 2\alpha-\frac{1}{\sqrt{\mu^2+1}}\sin 2\alpha\right)=2\mu G\frac{M}{R^3}-\mu\omega^2.$$

Вводим обозначение $\sin\phi = \dfrac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}$, $\cos\phi = \dfrac{1}{\sqrt{\mu^2+1}}$.

$$\omega^2\sqrt{\mu^2+1}\sin(\phi-2\alpha) = 2\mu G\frac{M}{R^3} - \mu\omega^2,$$

$$\omega^2\sqrt{\mu^2+1}\sin(2\alpha-\phi) = \mu\omega^2 - 2\mu G\frac{M}{R^3},$$

$$\alpha_2 = \frac{\phi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left[\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}\left(1-\frac{2GM}{\omega^2R^3}\right)\right].$$

3б) Подставляя данные величины, можно заметить, что $\frac{2GM}{\omega^2R^3} \approx 10^{-4}$, то есть с высокой точностью этим слагаемым можно пренебречь.

$$\alpha_2 = \arcsin\left[\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}\right] \approx 26,6^\circ,$$

$$\alpha_1 \approx 89.2^\circ.$$

$\alpha_1 > \alpha_2$, значит правильным ответом является α_2.

Ответ: 1) $R = \dfrac{1}{2T^2}\sqrt{\frac{P_0}{\sigma\pi}} \approx 2.7\cdot 10^{11}$ м $= 1.8$ а.е.; 2а) $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}+G\frac{M}{R^3}}$; 2б) $\omega \approx 6.1\cdot 10^{-6}$ об/с $= 192.37$ об/год; 3а) Либо $\alpha_1 = \arccos\left(\frac{1}{\omega}\sqrt{G\frac{M}{R^3}}\right)$, либо $\alpha_2 = \frac{\phi}{2} + \dfrac{1}{2}\arcsin\left[\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}\left(1-\frac{2GM}{\omega^2R^3}\right)\right]$, где $\tan\phi = \mu$; 3б) $\alpha \approx 26,6^\circ$.

Список рекомендуемой литературы

1. *Манида С. Н.* Физика. Решение задач повышенной сложности: по материалам городских олимпиад школьников: учеб. пособие. 2-е изд. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004.

2. Задачи по физике: учеб. пособие / И. И. Воробьев, П. И. Зубков, Г. А. Кутузова и др.; под ред. О. Я. Савченко. 3-е изд., испр. и доп. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 1999.

3. Элементарный учебник физики: учеб. пособие. В 3 т. / под ред. Г. С. Ландсберга. 14-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

4. *Бутиков Е. И., Быков А. А., Кондратьев А. С.* Физика в примерах и задачах. М.: МЦНМО, 2015.

5. *Бутиков Е. И., Кондратьев А. С.* Физика: учеб. пособие: в 3 кн. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

6. *Савченко Н. Е.* Задачи по физике с анализом их решения. М.: Просвещение, 2000.

Учебное издание

ШКОЛЬНЫЕ ОЛИМПИАДЫ СПбГУ 2019

ФИЗИКА

Учебно-методическое пособие

Компьютерная верстка *А. М. Вейшторт*

Подписано в печать 09.10.2019. Формат $60 \times 90\,{}^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 12,12. Планируемый тираж 500 экз. 1-й завод — 300 экз. Заказ №

Издательство Санкт-Петербургского университета.
199004, Санкт-Петербург, В. О., 6-я линия, д. 11.
Тел./факс +7(812) 328-44-22
publishing@spbu.ru

publishing.spbu.ru

Типография Издательства СПбГУ.
199034, Санкт-Петербург, Менделеевская линия, д. 5.