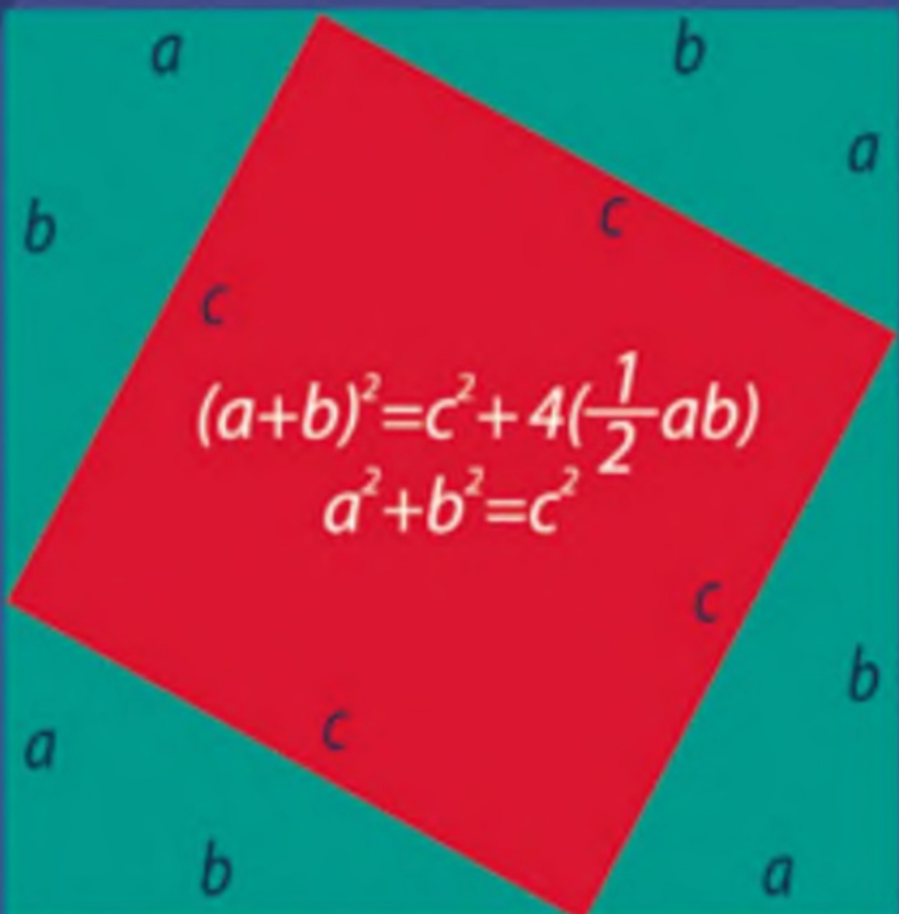
Л.Г.Генин

Задачи и их решения для любителей школьной математики



Л.Г. Генин

Задачи и их решения для любителей школьной математики

Пособие для учащихся старших классов и абитуриентов

Москва
Издательский дом МЭИ
2014

УДК 51(023)
ББК 22.1(я7)
Г 342

Генин Л.Г.

Г 342 Задачи и их решения для любителей школьной математики : Пособие для учащихся старших классов и абитуриентов / Л.Г. Генин. — М.: Издательский дом МЭИ, 2014. — 64 с.

ISBN 978-5-383-00889-8

Сборник задач рассчитан на широкий круг читателей — школьников 5—11 классов, студентов и любителей математики любого возраста. Здесь каждый любитель математики найдет задачи по своим силам и, начиная с простых задач, сможет переходить к более сложным и даже очень сложным.

ISBN 978-5-383-00889-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предисловие к сборнику задач по математике логично начать с интересной задачи. В качестве таковой воспользуемся задачей из книги Сингха «Великая теорема Ферма».

«Физика живет, словно подчиняясь решению суда. Теория считается верной, если имеется достаточное количество данных, «неопровержимо» подтверждающих ее предсказания. Иное дело — математика. Она не полагается на данные, полученные в результате могущих оказаться ошибочными экспериментов, а строит свои заключения на основе «железной», т.е. не знающей ошибок, логики. Примером различия между физическим и математическим подходом может служить задача о шахматной доске с выпиленными угловыми полями.

Перед нами шахматная доска, от которой два противоположных угловых поля отпилили так, что осталось только 62 поля (рис. П.1).

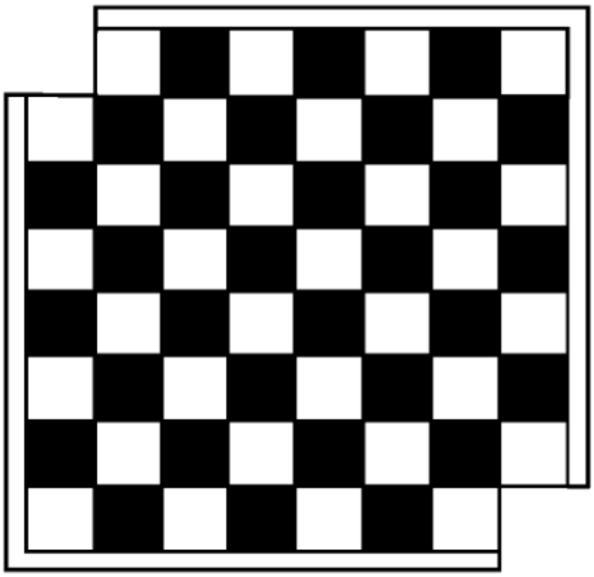


Рис. П.1

Возьмем 31 кость домино таких размеров, что каждая кость накрывает ровно два шахматных поля. Вопрос: можно ли разложить 31 кость домино на шахматной доске так, что все 62 поля окажутся покрытыми домино? К решению задачи существуют два подхода.

1. Физический подход. Физик пытается решить задачу экспериментально и, перепробовав с дюжину различных вариантов размещения домино на шахматной доске, обнаруживает, что все они заканчиваются неудачей.

В конце концов, физик приходит к убеждению, что в его распоряжении достаточно данных, позволяющих утверждать, что покрыть шахматную доску с двумя выпиленными по диагонали угловыми полями невозможно. Однако физик не может быть до конца уверен в том, что это действительно так, потому что может найтись некоторое расположение домино на шахматной доске, которое не было им экспериментально обнаружено, но именно оно и дает решение задачи. Различных же вариантов расположения домино существует не один миллион, и экспериментально проверить всегда можно лишь малую их толику. Что же касается заключения задачи, то это — теория, основанная на эксперименте, и физику не остается ничего другого, как жить под угрозой, что в один «прекрасный» день эта теория может оказаться опровергнутой.

2. Математический подход. Математик стремится решить задачу, выстраивая цепочку логических аргументов, приводящую к заключению, вне всяких сомнений правильному и остающемуся безупречным навсегда. Применительно к решаемой задаче эта цепочка аргументов выглядит следующим образом:

оба угловых поля, выпиленные из доски, — черные. Следовательно, на доске остались 30 черных полей и 32 белых полей;

каждое домино покрывает два смежных поля, а смежные поля всегда отличаются по цвету, т.е. одно поле черное, а другое — белое;

следовательно, независимо от расположения домино на шахматной доске, первые 30 костей, выложенных на доску, должны покрыть 30 белых и 30 черных полей.

Это означает, что при любом раскладе всегда останется одна кость домино и два непокрытых белых поля.

Но любая кость домино покрывает на шахматной доске два смежных поля, а смежные поля всегда отличаются по цвету. Два оставшихся непокрытыми поля одного цвета, и поэтому накрыть их одной костью домино невозможно. Следовательно, покрыть эту доску 31 костью домино невозможно!

Приведенное выше доказательство показывает, что шахматную доску с двумя выпиленными по диагонали угловыми полями невозможно покрыть домино при любом расположении костей.»

Автор этой задачи невольно отдает предпочтение математике, считая ее более «интеллектуальной», трактуя физику как прикладную, основанную на эксперименте область знаний. Конечно это не так. Несомненно, что опыты, наблюдения природных явлений играют в физике громадную роль. Но большинство законов физики открыто силой человеческого разума. Ньютон открыл закон всемирного тяготения совсем не потому, что ему на голову упало яблоко.

Цель настоящего сборника задач — заинтересовать учащихся старших классов математикой, показать красоту решения математических задач. Решение математических задач — это не скучная и тяжелая работа. Это очень увлекательное занятие. Решение даже не очень трудной задачи доставляет человеку большое удовлетворение, и в этом плане его можно сравнить с художником, нарисовавшим хорошую картину, или с композитором, написавшим хорошую мелодию.

И в математике, и в физике знания, интуиция, интеллект играют огромную роль. Эти качества не даются человеку при рождении. Их необходимо развивать, начиная со школьной скамьи. Задачник рассчитан на начинающих любителей математики. Поэтому в него включены не очень сложные, но достаточно интересные задачи.

Желаю Вам почаще справляться с задачами самостоятельно. Однако, даже если не удалось решить задачу, надо подробно проанализировать приведенное в задачнике решение.

Автор

ЗАДАЧИ

Задача 1. Для разминки приводится очень простой числовой ребус:

$$
\begin{array}{r}
\times\, 517 \\
\underline{***} \\
*** \\
\underline{***} \\
*****
\end{array}
$$

Задача 2. Немного более сложный числовой ребус:

$$
\begin{array}{r}
\times\, **** \\
\underline{*2} \\
+\; 18*48 \\
\underline{7499*} \\
***66*
\end{array}
$$

Задача 3. Сложный числовой ребус:

$$
\begin{array}{l|l}
******** & *** \\
\cline{2-2}
\underline{***} & **8** \\
**** & \\
\underline{***} & \\
**** & \\
\underline{****} & \\
0 &
\end{array}
$$

Задача 4. Возьмем шестизначное число *abcdef*, которое делится на 7. Доказать, что при любой круговой перестановке цифр в этом числе все получающиеся числа также будут делиться на 7, то есть, например, и число *fabcde* также делится на 7.

Задача 5. По аналогии с предыдущей задачей: если какое-либо восьмизначное число делится на 101, то при любой круговой перестановке цифр этого числа будут получаться числа, также делящиеся на 101.

Задача 6. Имеется 10 мешков, наполненных монетами. В 9 мешках все монеты настоящие — массой 1 г, а в одном мешке все монеты фальшивые массой 0,9 г. Имеются весы и разновесы. Как с помощью одного взвешивания найти мешок с фальшивыми монетами?

Задача 7. Имеется 12 монет, из них одна монета фальшивая, отличающаяся от настоящих по массе. Но не известно, тяжелее или легче фальшивая монета по сравнению с настоящей. Имеются весы и разновесы. Как с помощью трех взвешиваний найти фальшивую монету?

Задача 8. Имеется 13 монет, из них одна монета фальшивая, отличающаяся от настоящих по массе. Но не известно, тяжелее или легче фальшивая монета по сравнению с настоящей. Имеются весы и разновесы. Как с помощью трех взвешиваний найти фальшивую монету?

Задача 9. На медиане AM треугольника ABC взята точка K (рис. 1.2) так, чтобы $\angle BKM = \angle ABC$.

Покажите, что тогда угол $\angle CKM = \angle ACB$.

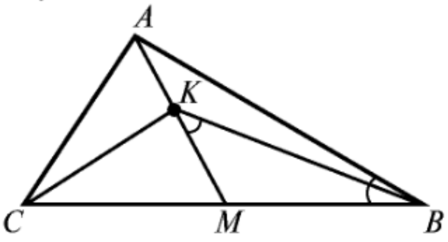


Рис. к задаче 9

Задача 10. Все углы 19-и угольника кратны 10°. Докажите, что у него найдутся, по крайней мере, две параллельные стороны.

Задача 11. В равнобедренном треугольнике ABC точка P — точка пересечения высот треугольника, лежит на вписанной окружности. Найти углы треугольника.

Задача 12. На боковой стороне равнобедренного треугольника ABC находятся точки M и N, причем $MN = AN$. Известно, что углы BAM и NAC равны. Найти угол MAC.

Задача 13. На прямой MN найти точку C, так, чтобы расстояние $AC + CB$, было минимальным.

Задача 14. На прямой MN найти точку C, так, чтобы угол $\angle BCN =$ $= 2\angle ACM$.

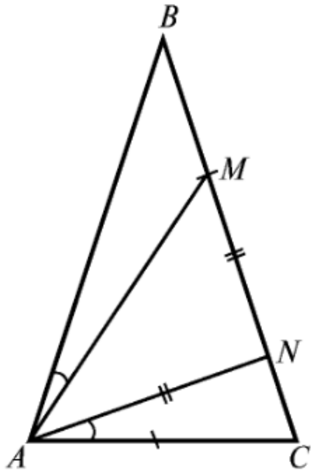


Рис. к задаче 12

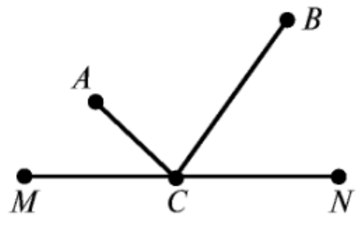


Рис. к задаче 13

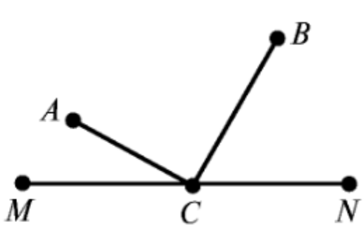


Рис. к задаче 14

Задача 15. В окружность с центром O вписан остроугольный треугольник. Из одной его вершины до пересечения с окружностью проведены высота, биссектриса и медиана. Точки пересечения отмечены и обозначены соответственно a, b и c.

Весь чертеж стерт, остались только упомянутые выше точки. По этим трем точкам необходимо восстановить исходный чертеж.

Задача 16. Из точки O проведены три луча. На этих лучах, как показано на рисунке, построены два треугольника ABC и DEF. Соответствующие стороны этих треугольников продлены до пересечения.

Доказать, что точки a, b и c, в которых пересекаются эти прямые, лежат на одной прямой.

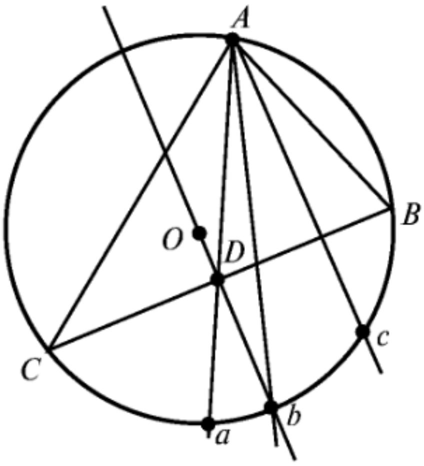


Рис. к задаче 15

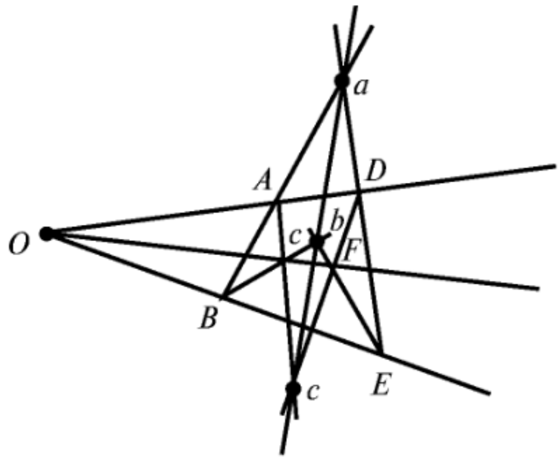


Рис. к задаче 16

Задача 17. На рисунке изображены три пересекающиеся окружности. Доказать, что их общие хорды пересекаются в одной точке.

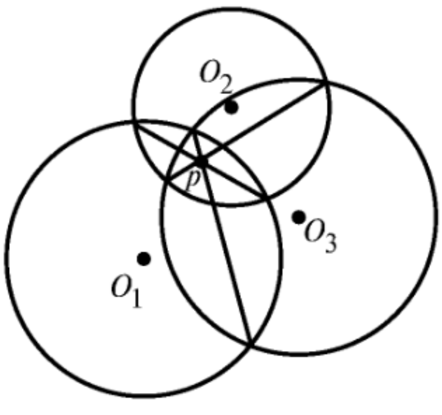


Рис. к задаче 17

Задача 18. Дан угол с вершиной в точке A и внутри угла точка D. Построить окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку D.

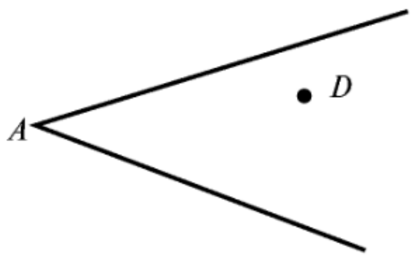


Рис. к задаче 18

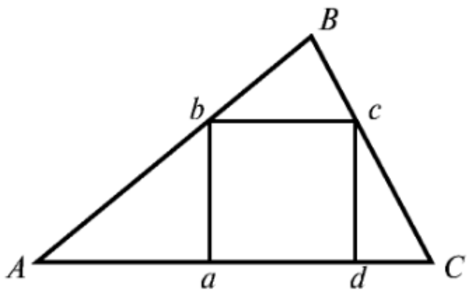


Рис. к задаче 19

Задача 19. В заданный треугольник *ABC* вписать квадрат *abcd* так, как это показано на рисунке.

Задача 20. Построить треугольник, если заданы его две стороны — a и b и медиана m_a, все выходящие из одной его вершины A.

Задача 21. Доказать, что сумма нечетных чисел, начиная с единицы, равна квадрату некоторого числа. Например $1 + 3 + 5 + 7 = 16$.

Задача 22. Доказать, что сумма кубов всех последовательных чисел, начиная с единицы, равна квадрату некоторого числа. Например $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$.

Задача 23. Не пользуясь вычислительной техникой, определить, какую цифру надо поставить вместо $*$ в числе $870941{*}52978$, чтобы получившееся число делилось на 11.

Задача 24. На противоположных берегах реки, изображенной на рисунке двумя параллельными линиями, расположены города *A* и *B*. В каком месте надо построить мост через реку, чтобы путь из *A* в *B* был самым коротким.

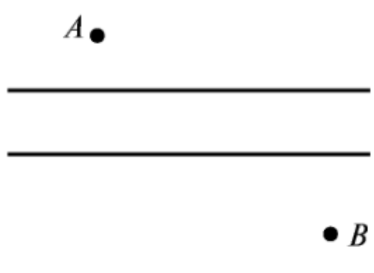


Рис. к задаче 24

Задача 25. Не пользуясь вычислительной техникой, найти четырехзначное число *aabb*, если известно, что оно является полным квадратом.

Задача 26. С помощью циркуля и линейки постройте правильный пятиугольник.

Задача 27. Внутри прямоугольной комнаты длиной 15 м, шириной 6 м и высотой 6 м. В точке A, расположенной посредине короткой стены, в 0,5 м от пола сидит паук. В точке B на середине противоположной стены в 0,5 м от потолка сидит муха.

Найти кратчайшее расстояние, каким паук может добраться ползком до неподвижной мухи. Можно подумать, что самый короткий путь от A до B — это путь по линии $ACDB$, равный 21 м, но это не так. Есть более короткий путь.

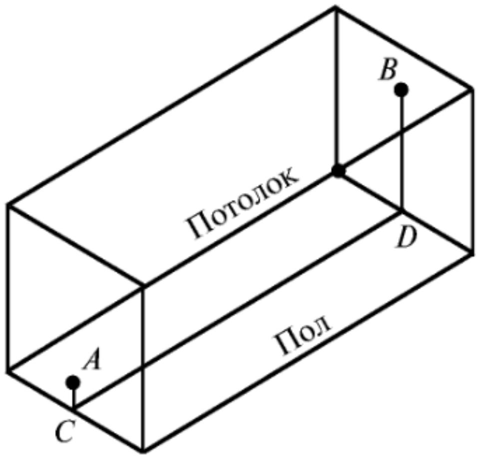


Рис. к задаче 27

Задача 28. Придумайте эксперимент, с помощью которого можно было бы определить радиус Земли.

Задача 29. Докажите, что число $N = 1\ 280\ 000\ 401$ — составное.

Задача 30. Не пользуясь вычислительной техникой, определите, что больше

$$\sqrt[3]{5\sqrt{13}+18}-\sqrt[3]{2\sqrt{13}+5} \qquad \text{или} \qquad 1.$$

Задача 31. Компании из четырех человек, вооруженных одним фонариком, надо перейти реку через мост.

1-й человек затрачивает на переход 1 мин;

2-й человек затрачивает на переход 2 мин;

3-й человек затрачивает на переход 5 мин;

4-й человек затрачивает на переход 10 мин.

Переходить можно по одному или вдвоем, имея с собой фонарик. Как организовать переход, чтобы уложиться в 17 мин?

Задача 32. В комнате *A* расположены три выключателя *1*, *2* и *3*. В комнате *B* находятся три лампочки *a*, *b* и *c* (см. рисунок). Проделав всевозможные манипуляции с выключателями в комнате *A*, надо войти в комнату *B* и сообразить какой выключатель соединен с какой лампочкой.

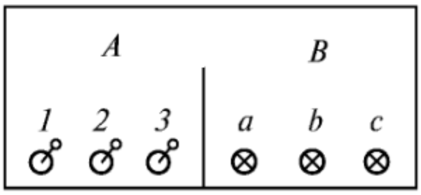


Рис. к задаче 32

Задача 33. Какая последняя цифра у числа 7^{12}?

Задача 34. Найти $A = 2\frac{22}{2183} - 1\frac{24}{2257}$.

Задача 35. Пользуясь циркулем и линейкой, провести через точку *A* касательную к окружности с центром *O*.

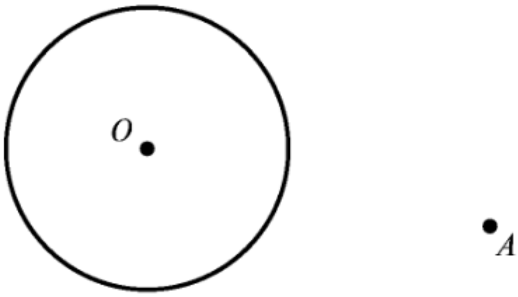


Рис. к задаче 35

Задача 36. Задан отрезок длиной 1. Пользуясь циркулем и линейкой, построить отрезок длиной $\sqrt{13}$.

Задача 37. При каких натуральных числах n число $N = n^4 + 4$ является простым?

Задача 38. Разложите на два квадратичных множителя выражение $x^4 + x^2 + 1$.

Задача 39. Разложите на два множителя с целыми коэффициентами число $A = a^5 + a + 1$.

Задача 40. Докажите, что число $N = 312\ 500\ 051$ — составное.

Задача 41. Разложите на множители выражение $a^8 + a + 1$.

Задача 42. Постройте циркулем и линейкой отрезок $\sqrt[4]{a^4+b^4}$, где а и b — заданные отрезки.

Задача 43. Решите уравнение $x^4+8x-7=0$.

Задача 44. Решите уравнение $\left(x^2-1\right)^2=4(2x+1)$.

Задача 45. Найдите произведение

$$A=\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\ldots\cdot\cos 2^{n-1}x.$$

Задача 46. Найдите сумму $S_n=1+11+111+\ldots+\underbrace{111111}_{n}$.

Задача 47. Найдите сумму $S_n=\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$.

Задача 48. Найдите сумму $S_n=x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n$.

Задача 49. С помощью циркуля и линейки провести перпендикуляр к отрезку AD в точке A, расположенной у края листа mn.

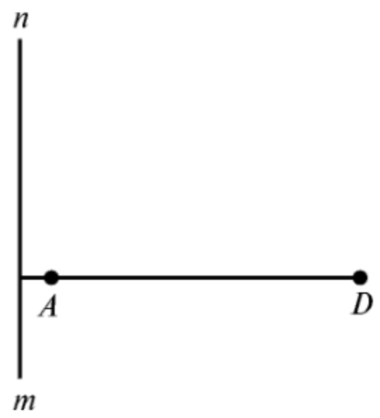


Рис. к задаче 49

Задача 50. Упростить выражение

$$N=(2+1)\left(2^2+1\right)\left(2^3+1\right)\ldots\left(2^{32}+1\right).$$

Задача 51. Найти число, которое при делении на 6 дает в остатке 5, при делении на 7 дает в остатке 6, при делении на 8 дает в остатке 7, при делении на 9 дает в остатке 8.

Задача 52. Металлическую плиту в виде треугольника ABC несут в горизонтальном положении трое рабочих, держащих плиту в вершинах треугольника. Какому из рабочих легче (тяжелее) всего?

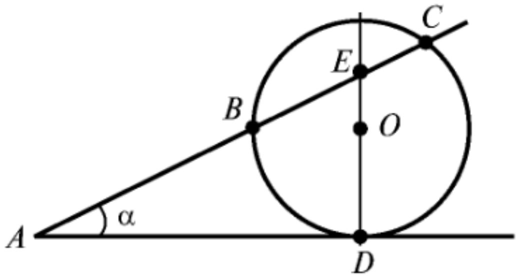


Рис. к задаче 52

Задача 53. Из точки A проведена касательная к окружности AD и секущая AC.

Дано: $AB = 1$, $BC = 2$, $\alpha = 30^{\circ}$.

Найти радиус окружности.

Задача 54. Разложить на множители число $N = 7^8 - 3^8$.

Задача 55. Высота прямоугольного треугольника делит его на треугольники с периметрами p_1 и p_2. Найдите периметр исходного треугольника.

Задача 56. Задача Иоганна Мюллера. Найдите число, которое при делении на 17 дает остаток 15, при делении на 13 — остаток 11 и при делении на 10 — остаток 3.

Задача 57. Сколько раз встречаются стрелки часов за 12 ч, за 1 сут и за N сут?

Задача 58. Из Бреста в Бостон и из Бостона в Брест ежедневно в 12 ч выходят пароходы и находятся в пути 10 дней. Сколько пароходов на своем пути из Бреста в Бостон встречает каждый пароход?

Задача 59. В книге рекордов Гиннеса написано, что наибольшее известное простое число равно $23\,021^{377} - 1$. Не опечатка ли это?

Задача 60. Площадь выпуклого четырехугольника равна 32 см^2, сумма квадратов диагоналей четырехугольника равна 128 см^2, угол между диагоналями равен 30°. Найти длины диагоналей четырехугольника.

Задача 61. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{625}+\sqrt{16}-\sqrt[3]{40}-\sqrt{25}.$

Задача 62. Вычислите значение выражения $\left(\frac{1}{27}\right)^{x-\frac{1}{3}}$, если $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=4$.

Задача 63. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $4\sqrt{5}$ см. Найти площадь треугольника, если расстояние от середины гипотенузы до одного из катетов вдвое больше, чем до другого.

Задача 64. Основанием прямой призмы служит квадрат со стороной 6 см. Диагональ боковой грани призмы равна 10 см. Найти площадь полной поверхности призмы.

Задача 65. Докажите, что в любом выпуклом семиугольнике всегда найдутся по крайней мере две диагонали, угол между которыми меньше 13°.

Задача 66. Имеются две банки, в одной 1 л молока, в другой 1 л кофе. Из банки с молоком зачерпывают столовой ложкой 5 мл молока и переливают в банку с кофе. Хорошо перемешав, из банки со смесью зачерпывают 5 мл смеси и переливают обратно в банку с молоком. Эту операцию повторяют 5 раз. Определить, чего в результате окажется больше: молока в кофе или кофе в молоке.

Задача 67. В треугольник ABC вписаны два разных прямоугольника так, что (см. рисунок) на основании AC лежат по две вершины каждого прямоугольника, а на сторонах AB и BC по одной. Периметр каждого из прямоугольников равен 10. Найдите площадь ΔABC и докажите, что периметр любого вписанного в ΔABC прямоугольника, две вершины которого лежат на стороне AC, тоже равен 10.

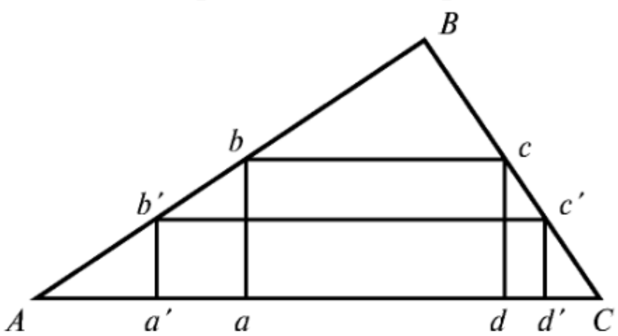


Рис. к задаче 67

Задача 68. Найдите, чему равно число

$$N = \lg \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \ldots \cdot \lg \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 89^\circ.$$

Задача 69. В выпуклом четырехугольнике отметим середины сторон и соединим их с вершинами четырехугольника так, как показано на рисунке. Докажите, что площадь темных фигур равна сумме площадей светлых фигур.

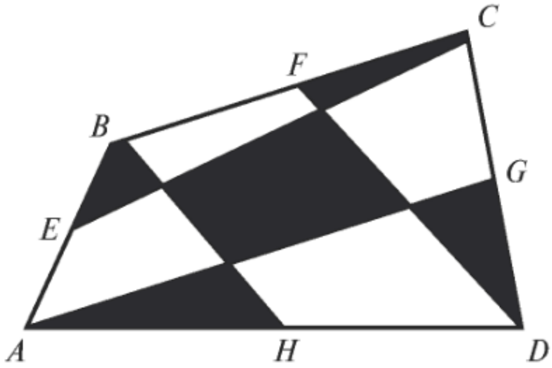


Рис. к задаче 69

Задача 70. Докажите, что предпоследняя цифра числа 3^n при любом натуральном $n > 2$ всегда четна.

Задача 71. Разложите на простые множители число $N = 989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320$.

Задача 72. На биллиардном столе лежат два шара. В каком направлении нужно направить первый шар, чтобы он, отрекошитировав по очереди от двух бортов, попал во второй шар?

Задача 73. Докажите, что среди чисел вида 111…11000…00 (то есть первая часть числа состоит из единиц, а вторая — из нулей) всегда найдется число, которое делится на любое наперед заданное число.

Задача 74. Стоимость семи книг меньше 12 р. Стоимость 10 книг больше 17 р. Сколько стоит 1 книга?

Задача 75. На гипотенузе прямоугольного треугольника *ABC* построен квадрат *abcd*. Докажите, что отрезок *CD*, соединяющий вершину прямого угла треугольника с центром квадрата, делит прямой угол пополам.

Задача 76. Найдите все пары натуральных чисел, сумма квадратов которых равна 16 000.

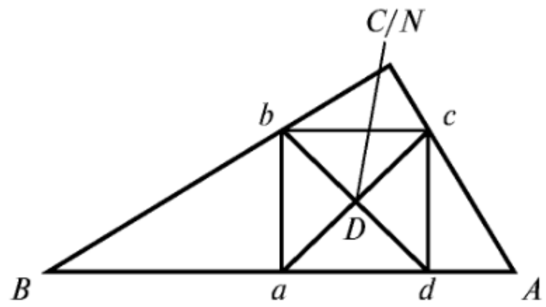


Рис. к задаче 75

Задача 77. Докажите, что $N_1 = A^3 - A$ или $N_2 = A^3 + A$ делятся на 10 при любом значении A.

Задача 78. Число БАОБАБ делится на 101. Какое это число?

Задача 79. В параллелограмме $ABCD$ (см. рисунок) взята точка Q такая, что $\angle ABQ = \angle ADQ$. Докажите, что $\angle QAD = \angle QCD$.

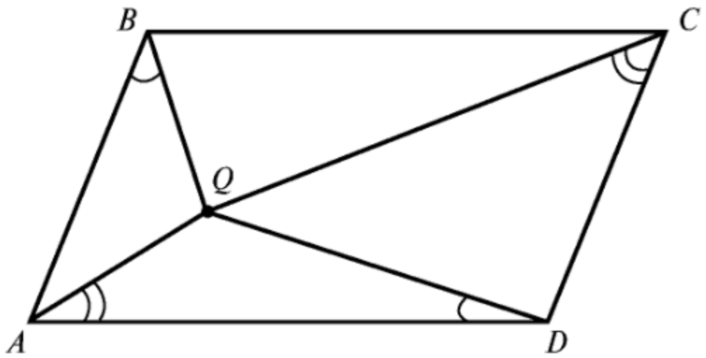


Рис. к задаче 79

Задача 80. Докажите, что число

$N = 1 + 2^{1993} + 3^{1993} + ... + 1991^{1993} + 1992^{1993}$ делится на 1993.

Задача 81. Докажите, что число $N = \underbrace{1111111\ldots11111}_{55}$ — составное.

Задача 82. Пользуясь только линейкой из точки, лежащей на окружности, опустите перпендикуляр на диаметр этой окружности.

Задача 83. Докажите неравенство $\sqrt[5]{2} + 7 < 8\sqrt[10]{2}$.

Задача 84. Найдите корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, если известно, что они являются целыми числами и $p + q = 198$.

Задача 85. Найти четыре последовательных четных числа, сумма которых равна 4052.

Задача 86. Если от задуманного числа N отнять 11, то полученное число разделится на 11, если от задуманного числа отнять 7, то полученное число разделится на 7, если от задуманного числа отнять 13, то полученное число разделится на 13.

Найти задуманное число.

Задача 87. Доказать, что девятизначное число, написанное одинаковыми цифрами, делится на 37.

Задача 88. Расставить в порядке возрастания числа $a = 2^{45}$, $b = 3^{36}$, $c = 4^{27}$, $d = 5^{18}$.

Задача 89. Решить уравнение $\left(16x^{200}+1\right)\left(y^{200}+1\right)=16\left(xy\right)^{100}$.

Задача 90. Решить уравнение $x^4+2x^3-16x^2-2x+15=0$.

Задача 91. В круге проведены два перпендикулярных друг к другу диаметра AE и BF. На дуге EF взята точка C. Хорды CA и CB пересекают диаметры BF и AE соответственно в точках P и Q. Докажите, что площадь четырехугольника $APQB$ равна квадрату радиуса круга.

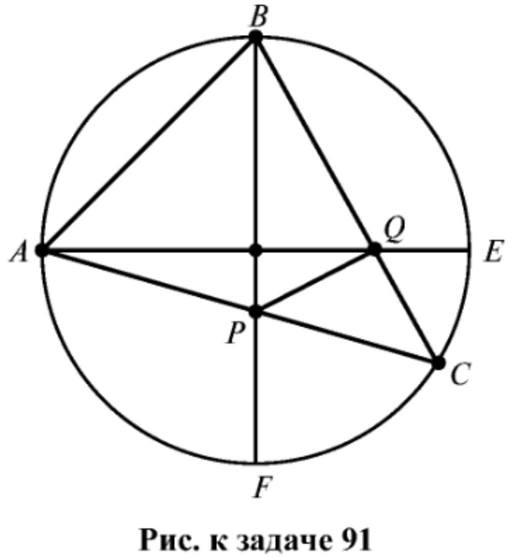


Рис. к задаче 91

Задача 92. Докажите, что, если последняя цифра десятичной записи числа m равна 5, то число $N = 12^m + 9^m + 8^m + 6^m$ делится на 1991.

Задача 93. Докажите, что число $N = 111\ldots1122\ldots22$ (10 единиц и 10 двоек) является произведением двух последовательных целых чисел.

Задача 94. Напишите программу для компьютера и найдите десятичную запись числа 3^{512}.

Задача 95. Существует легенда о том, что изобретатель шахмат принес персидскому шаху свое изобретение и научил шаха игре в шахматы. Восторгам шаха не было предела, и он предложил изобретателю любую награду — золото, драгоценности и др. Но изобретатель предложил другой способ расчета награды: на первую клетку шахматной доски положить одно зерно пшеницы, на вторую клетку — 2 зерна, на третью — 4, на четвертую — 8 и так далее: на каждую следующую клетку в два раза больше, чем на предыдущую. Шах был очень удивлен скромностью запроса изобретателя и приказал слугам отмерить соответствующее количество пшеницы.

Но оказалось, что выполнить это приказание невозможно: для этого потребовалось бы громадное количество зерна. Воспользовавшись результатами, полученными в задаче 94, оцените, сколько тонн зерна должен был получить изобретатель шахмат.

Задача 96. В розыгрыше главного приза участвуют 300 человек. Их выстроили по кругу и пронумеровали по порядку от 1 до 300. Затем, начиная с номера 1, их начали пересчитывать: первый, второй — третий выбывает, четвертый, пятый — шестой выбывает, и так далее с выбыванием каждого третьего. Счет продолжается до тех пор, пока не останется один человек, который и получает главный приз. Составьте программу и определите, какой номер стал победителем.

Последние страницы задачника посвящены задачам на пифагоровы треугольники. Пифагоровыми треугольниками называют такие прямоугольные треугольники все стороны которых a, b и c выражаются целыми числами. Пифагорийцы придавали мистический смысл числам и поэтому вместо треугольников предпочитали рассматривать пифагоровы тройки. Пифагоровой тройкой назывались три целых числа (a, b, c), удовлетворяющие уравнению Пифагора:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Вот что пишет Сингх в книге «Великая теорема Ферма» по поводу пифагоровых троек: «По мере того, как числа возрастают, пифагоровы тройки встречаются все реже, и находить их становится все труднее и труднее. Пифагорийцы изобрели метод отыскания таких троек.»

Утверждение Сингха о том, что по мере увеличения чисел пифагоровы тройки встречаются все реже и находить их становится все труднее, не соответствует действительности. Даже если мы имеем одну пифагорову тройку, то, умножив все три числа на одно и то же целое число, получим новую пифагорову тройку. Таким образом, очевидно, что пифагоровых троек бесконечно много. Но эти тройки образуют семейство подобных треугольников, и назовем их «подобными». У самого маленького из подобных треугольников числа a, b и c не имеют общих множителей. Назовем такой треугольник «родительским». Ниже будет показано, что существует бесконечно большое число и «не подобных» пифагоровых троек (см. задачу 104). В рассматриваемых нами задачах речь будет идти только о «родительских» пифагоровых треугольниках. Будем называть сторону треугольника четной, если ее длина выражается четным числом, и нечетной, если ее длина выражается нечетным числом.

Для начала рассмотрим несколько простых задач.

Задача 97. Могут ли все стороны пифагорова треугольника быть четными?

Задача 98. Могут ли все стороны пифагорова треугольника быть нечетными?

Задача 99. Сколько сторон пифагорова треугольника могут быть нечетными?

Задача 100. Какие из сторон пифагорова треугольника могут быть нечетными?

Далее следуют более трудные задачи.

Задача 101. Доказать, что для любого заданного целочисленного значения одного из катетов (a или b) всегда можно найти, по крайней мере, один, а чаще несколько пифагоровых треугольников, т. е. найти значения b и c, удовлетворяющие формуле Пифагора. (По-видимому, это и есть найденный пифагорийцами метод.)

Задача 102. Найти пифагоров треугольник, если $a = 11$.

Задача 103. Найти пифагоров треугольник, если $a = 12$.

Задача 104. Найти пифагоров треугольник, если $a = 91$.

Задача 105. Доказать, что произведение чисел, образующих пифагорову тройку, всегда делится на 60.

РЕШЕНИЯ

К задаче 1. Очевидно, что первая и последняя цифры множителя равны 1, а средняя — 0.

Следовательно, множитель равен 101. Выполняем умножение:

$$517 \cdot 101 = 52\,217$$

К задаче 2. Запишем этот ребус в виде:

$$\begin{array}{r} \times\, * * * * \\ * 2 \\ \hline + \;\; 1\,8\,a\,4\,8 \\ 7\,4\,9\,9\,b\;\; \\ \hline * * * 6\,6\,c \end{array}$$

Очевидно, что $c = 8$; $b = 2$; $a = 7$. Получаем, что первая строка это 18 748, вторая — 74 992, а сумма равна 768 668.

Найти умножаемое и множитель — дело простое.

К задаче 3. Запишем этот ребус в виде

$$\begin{array}{l|l} & * * * * * * * * \;\big|\; \underline{D} \\ 1 & \underline{* * *} \qquad\quad\;\, a\,b\,8\,c\,d \\ 2 & \quad * * * * \\ 3 & \quad \underline{* * *} \\ 4 & \qquad * * * * \\ 5 & \qquad \underline{* * * *} \\ & \qquad\quad 0 \end{array}$$

Очевидно, что $b = 0$ и $c = 0$.

Если трехзначное число D при умножении на 8 дает число меньше 1000 (строка 3), то $D < 125$. В первой строке стоит число также больше 900, так как при его вычитании из числа больше чем 1000 (стр.1) остаток — двухзначное число. Таким образом $a = 8$.

Цифра $d = 9$, так как $D*d > 1000$, при этом $D > 111$.

Таким образом, частное равно 80 809, а делитель $111 < D < 125$. Перепробовать 12 чисел — от 112 до 124 не представляет большого труда. Возьмем $D = 124$. Получаем $80\,809 * 124 = 10\,020\,316$. Оформляем это действие в виде деления и убеждаемся в том, что задача решена:

$$\begin{array}{l} 10020316 \;\big|\; \underline{124} \\ \underline{992}\qquad\quad\;\; 80809 \\ \;\;1003 \\ \;\;\underline{\;992} \\ \;\;\;1116 \\ \;\;\;\underline{1116} \\ \qquad 0 \end{array}$$

Но, может быть, есть и другие решения.

Пробуем $D = 123$. Получаем $80\,809 \cdot 123 = 9\,939\,507$ — семизначное число, что не удовлетворяет условию задачи.

Таким образом, задача имеет единственное решение.

К задаче 4. Обозначим число $abcdef = A$, число $fabcde = B$, число $abcde = C$.

Тогда можно записать два равенства:

$A = 10 \cdot C + f$;

$B = 10^5 \cdot f + C$,

из которых следует $10 \cdot B - A = (10^6 - 1) \cdot f = 999999 \cdot f$.

Число 999999 разлагается на множители:

$$10 \cdot B - A = 3 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot f.$$

Итак, если исходное число A делится на 7 и правая часть полученного равенства также делится на 7, то и число B должно делится на 7.

Из полученного решения следует, что то же самое справедливо и для других множителей, на которые разлагается число 999999, а именно, если какое-либо шестизначное число A делится на 3, 7, 9, 11, 13, 37 или на какое-либо число D, полученное в результате перемножения этих чисел, то число B, полученное путем круговой перестановки цифр исходного числа A, также будет делится на D.

К задаче 5. По аналогии с решением предыдущей задачи:

$$10 \cdot B - A = \left(10^8 - 1\right) = \left(10^4 + 1\right)\left(10^2 - 1\right)\left(10^2 + 1\right),$$

$$10^2 + 1 = 101.$$

К задаче 6. Выставляем мешки в ряд и нумеруем их от 1 до 10. Затем кладем на весы из 1-го мешка одну монету, из 2-го мешка — две монеты, из 3-го — 3 монеты и так далее: из 10-го мешка — 10 монет и производим взвешивание. Так как на чашке весов оказывается 55 монет, то, если бы все они были настоящими, масса взвешиваемых монет была бы равна 55 г. Но так как среди монет есть несколько фальшивых, то масса монет будет меньше 55 г. Предположим, что при взвешивании получено число 54,3 г, то есть до 55 г не хватает 0,7 г. Следовательно, на весах находится 7 фальшивых монет. Значит, фальшивые монеты находятся в 7-м мешке.

К задаче 7. Так как нам не известны ни масса настоящей, ни масса фальшивой монеты, то разновесы нам не понадобятся.

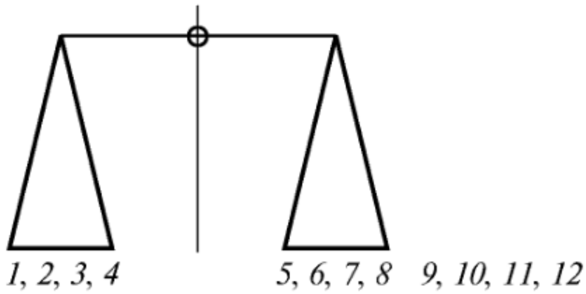


Рис. 1 к задаче 7

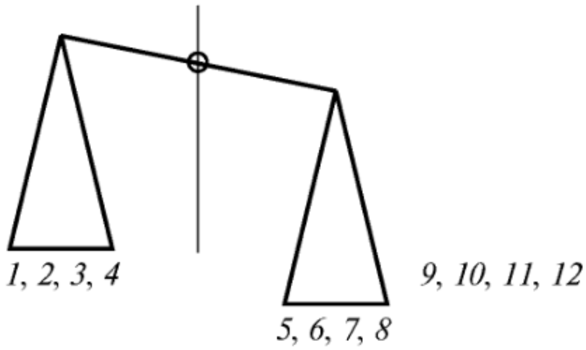


Рис. 2 к задаче 7

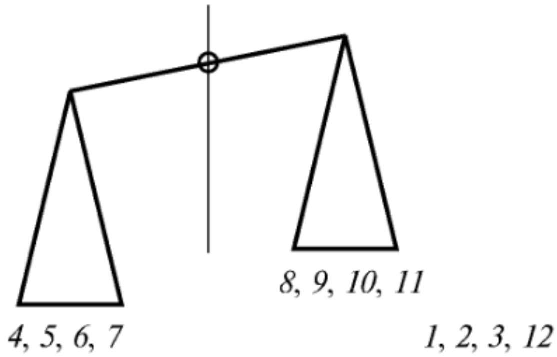


Рис. 3 к задаче 7

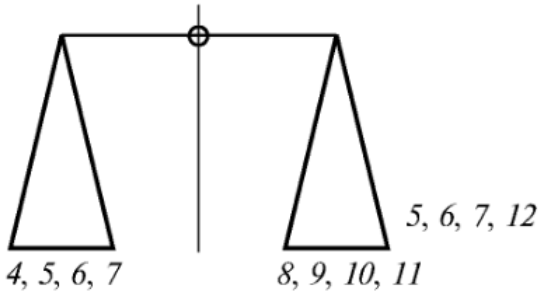


Рис. 4 к задаче 7

Разбиваем монеты на три кучки и нумеруем: первая кучка — *1*, *2*, *3*, *4*, вторая — *5*, *6*, *7*, *8* и третья — *9*, *10*, *11*, *12*. Кладем первую кучку на одну чашку весов, вторую кучку на вторую чашку весов. Возможны два результата: либо весы будут находиться в равновесии, либо одна чашка перетянет другую.

Рассмотрим первый случай (рис. 1) — случай равновесия, при котором фальшивая монета находится в третьей кучке, остальные восемь монет настоящие. Проводим второе взвешивание: на одной чашке весов — монеты *9* и *10*, а на другой чашке — две настоящие монеты, например *1* и *2*. Если в этом случае весы не находятся в равновесии, то это значит, что фальшивой является монета либо *9*, либо *10*. При третьем взвешивании одну из них сравниваем с настоящей и по результатам этого взвешивания определяем, которая из них является фальшивой. Если же при втором взвешивании будет получено равновесие, то фальшивой является монета *11* или монета *12*. Тогда при третьем взвешивании сравниваем с настоящей *11*-ю или *12*-ю монету, и фальшивой будет та, при которой весы не будут находиться в равновесии.

Теперь рассмотрим случай (рис. 2), когда при первом взвешивании не будет равновесия. Это значит, что фальшивая монета находится среди первых восьми, а *9*—*12* — настоящие монеты.

Тогда с левой чашки весов снимаем монеты *1*, *2* и *3*, с правой чашки в левую перекладываем монеты *5*, *6* и *7* и добавляем на нее 3 нефальшивые монеты — *9*, *10* и *11*.

При втором взвешивании возможны три варианта:

1) перекос весов не изменился. Следовательно, фальшивая монета либо *4*, либо *8* — единственные, которые остались на своих местах. Тогда третье взвешивание — сравниваем одну из этих с настоящей;

2) перекос весов изменился на противоположный (рис. 3). Следовательно, фальшивая монета находится среди монет *5*, *6* и *7*, которые переложены с одной чашки весов на другую. Причем в этом случае уже становится известно: тяжелее или легче фальшивая монета по сравнению с настоящей. Тогда третьим взвешиванием сравниваем на весах любые две монеты из этой группы;

3) весы пришли в равновесие (рис. 4). Следовательно, фальшивая монета находится среди трех снятых монет, это монеты *1*, *2*, *3*, причем также известно, тяжелее или легче она, чем настоящая. Третьим взвешиванием сравниваем любые две монеты из этой группы и находим фальшивую монету.

К задаче 8. Кладем на чашки по четыре монеты, и если чашки весов окажутся не в равновесии, то фальшивая монета среди этих восьми, и задача сводится к предыдущей.

Если же чашки весов окажутся в равновесии, то фальшивая монета находится среди пяти оставшихся монет. Тогда второе взвешивание — берем три монеты из пяти оставшихся и сравниваем их с тремя нефальшивыми монетами:

а) если чашки в равновесии, то фальшивая монета — одна из двух оставшихся. И третьим взвешиванием сравниваем одну из них с настоящей;

б) если равновесия нет, то фальшивая монета — среди трех, участвовавших во втором взвешивании, причем становится известно: легче или тяжелее она, чем настоящая. Тогда третьим взвешиванием сравниваем любые две монеты из трех и находим фальшивую.

К задаче 9. Если $\angle BKM = \angle ABC$, то треугольник ABM подобен треугольнику KBM и, следовательно,

$$\frac{BM}{KM} = \frac{AM}{BM},$$

но $BM = CM$, следовательно,

$$\frac{CM}{KM} = \frac{AM}{CM},$$

то есть треугольник CKM подобен треугольнику ACM, и, следовательно, $\angle CKM = \angle ACM$ (рис. к задаче 9).

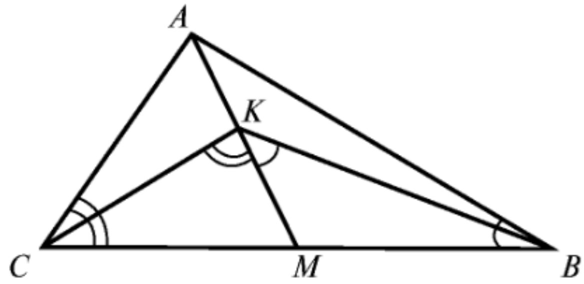


Рис. к задаче 9

К задаче 10. Совместим ось x, от которой будем отсчитывать углы наклона всех сторон, с одной из сторон многоугольника. Каждая сторона многоугольника (или ломанной линии) будет характеризоваться углом $10\ n$, где n может принимать значения от 0 до 35.

Изобразим таблицу, содержащую 36 клеток. Тогда любая ломанная линия или многоугольник могут быть изображены в этой таблице, если в соответствующие клетки поставить, например, крестики. Если у многоугольника есть две параллельные стороны, то они будут отстоять друг от друга на 18 клеток.

Теперь начнем строить многоугольники, не имеющие параллельных сторон. Для этого в произвольную строчку пустой таблицы ставим крест, а в клетку, отстоящую от нее на 18 позиций, ставим, например, точку, которая означает, что в эту клетку крест ставить нельзя. Так как общее число клеток в таблице равно 36, то такую операцию мы сможем выполнить только 18 раз, то есть можем построить 18-угольник, не имеющий параллельных сторон.

Чтобы построить 19-угольник придется ставить крестик в клетку, в которой стоит точка, т. е. появятся две параллельные стороны.

К задаче 11. Введем следующие обозначения: a — половина основания; H — высота треугольника; α — угол при основании треугольника; h — PM; b — AC; $p = a + b$ — полупериметр ABC; r_{bn} — радиус вписанной окружности (рис. к задаче 11).

Из подобия треугольников ACM и PMB следует, что $\dfrac{PM}{MB}=\dfrac{AM}{CM}$

или $hH = MB^2$, или $h=\dfrac{MB^2}{H}$.

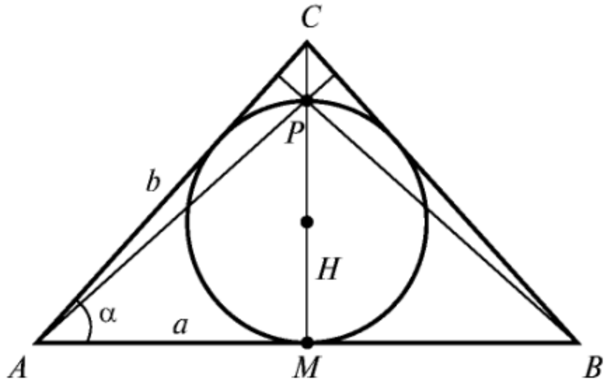


Рис. к задаче 11

Но по условию задачи $h = 2r_{\text{вп}} = 2\dfrac{S_{ABC}}{p}$, где $p = a + b$, $S_{ABC} = aH$.

Тогда $2\dfrac{aH}{a+b}=h=\dfrac{a^2}{H}$ и $2H^2=a(a+b)$, но $H^2=b^2-a^2$.

Откуда $3a^2+ab-2b^2=0$, так как $\dfrac{a}{b}=\cos\alpha$, получаем уравнение

$$3\cos^2\alpha+\cos\alpha-2=0$$

и

$$\cos\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{6}=\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\alpha=\arccos\dfrac{2}{3}$.

К задаче 12. Введем следующие обозначения: $\angle ABM=\beta$, $\angle BAM=\alpha$.

Тогда $\angle AMN = \angle MAN = \alpha + \beta$, $\angle BAC = 3\alpha + \beta$.

Сумма углов треугольника ABC равна:

$\beta + 2(3\alpha + \beta) = 180^\circ$.

$6\alpha + 3\beta = 180^\circ$.

$\angle MAC = 2\alpha + \beta = 60^\circ$.

Ответ: $\angle MAC = 60$.

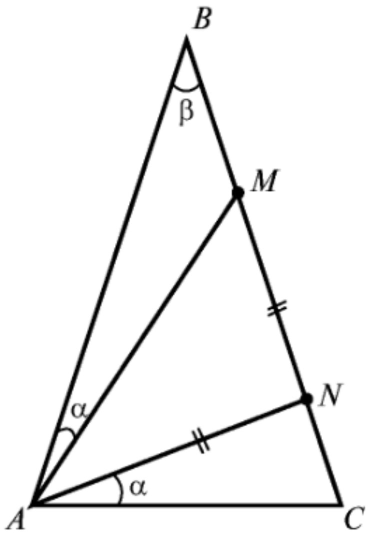


Рис. к задаче 12

К задаче 13. Одну из точек, например A, отражаем симметрично относительно прямой MN. Затем точку A' соединяем прямой линией с точкой B. Прямая $A'B$ пересекает прямую MN в точке C. Сумма отрезков $AC + CB$ — это минимальная длина, так как для любой другой точки D получаем сумму двух сторон треугольника, которая всегда больше третьей стороны.

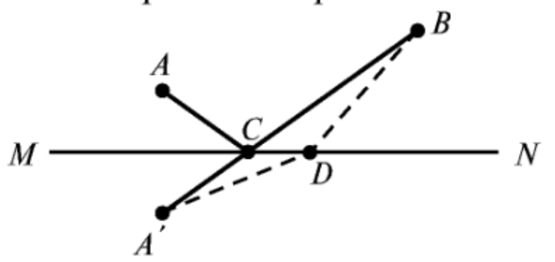


Рис. к задаче 13

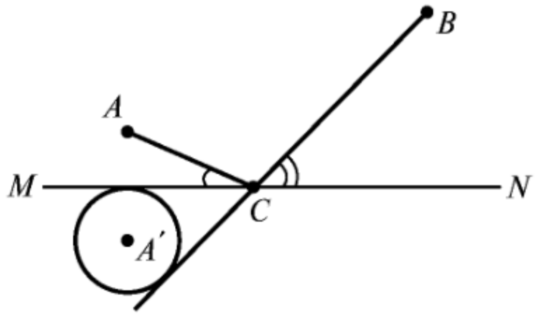


Рис. к задаче 14

К задаче 14. Отражаем точку A симметрично относительно прямой MN. Получаем точку A'. Строим окружность с центром в точке A', касающуюся прямой MN. Затем, как показано на рисунке, из точки B проводим касательную к окружности, которая пересекает прямую MN в точке C.

$$\angle BCN = 2\angle ACM.$$

К задаче 15. Построим окружность, проходящую через точки a, b и c. Средняя точка b принадлежит биссектрисе. Какая из крайних точек a или c соответствует высоте, а какая — медиане, не известно. Поэтому будем рассматривать два варианта.

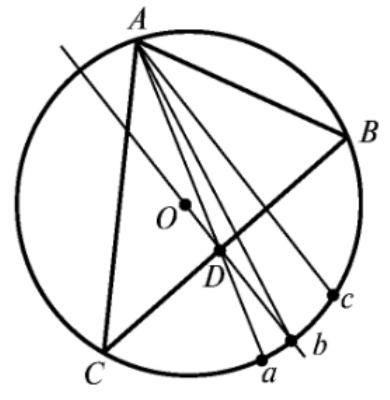


Рис. 1 к задаче 15

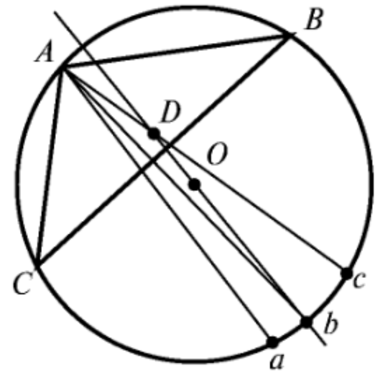


Рис. 2 к задаче 15

Вариант 1 (рис. 1): точка c принадлежит высоте,
точка a принадлежит медиане.

Вариант 2 (рис. 2): точка c принадлежит медиане,
точка a принадлежит высоте.

Через точку b и центр окружности O проводим диаметр. Этот диаметр перпендикулярен стороне BC треугольника и делит ее пополам. Параллельно этому диаметру проводим высоту — на рис. 1 через точку c, на рис. 2 через точку a. Высота пересекает окружность в точке A, являющейся вершиной треугольника. Соединяя точку A с точками b и c, получаем медиану и биссектрису треугольника. Наконец, через точку D — точку пересечения медианы с диаметром — перпендикулярно диаметру проводим прямую, являющуюся основанием треугольника, и находим вершины треугольника C и B.

К задаче 16. Эта задача решается методом выхода в стереометрию. Три луча рассматриваются как ребра треугольной пирамиды. Треугольники ABC и DEF — это сечения пирамиды двумя плоскостями Q и P. Соответствующие стороны треугольников лежат в плоскостях граней пирамиды, и так как они не параллельны, то должны где-то пересекаться. Но пересекаться они могут только на линии пересечения плоскостей P и Q. Так как линией пересечения двух плоскостей является прямая, то точки a, b и c лежат на этой прямой.

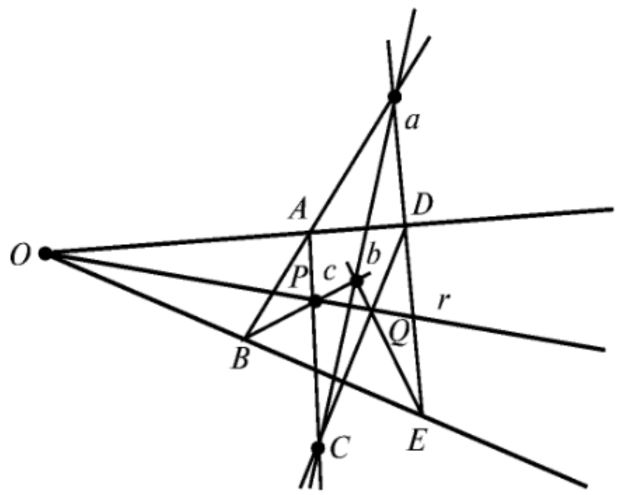


Рис. к задаче 16

К задаче 17. Эта задача, как и предыдущая, решается методом выхода в стереометрию. Рассматриваем чертеж как пересечение трех сфер, центры которых лежат в плоскости чертежа. Тогда каждая хорда — это линия пересечения двух сфер. Три сферы могут пересекаться только в одной точке. Это и есть точка P.

К задаче 18. Строим произвольную окружность, касающуюся сторон угла (ее центр O_1 лежит на биссектрисе угла). Проводим из точки A луч, проходящий через точку D и пересекающий окружность O_1 в точках M и N. Проводим радиус O_1N. Через точку D проводим линию, параллельную O_1N, которая пересекает биссектрису в точке O_2. Точка O_2 и есть центр окружности, проходящей через точку D и касающуюся сторон угла (см. рисунок).

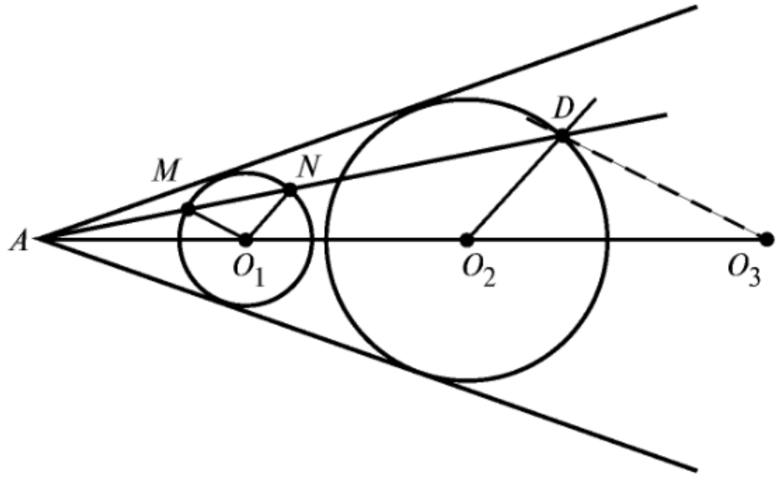


Рис. к задаче 18

Задача имеет два решения. Второе решение получается, если через точку D провести линию O_3D, параллельную O_1M. Точка O_3 — центр второй окружности, также проходящей через точку D и касающуюся сторон угла.

К задаче 19. В треугольнике ABC строим произвольный квадрат $klmn$, основание которого ml лежит на основании треугольника, а одна из вершин, точка n, лежит на стороне треугольника AB. Через вершину треугольника A и вершину квадрата k проводим прямую до пересечения со стороной треугольника BC в точке c. Через точку c проводим линию bc, параллельную основанию треугольника, а через точки b, c — линии перпендикулярные основанию. Квадрат $abcd$ вписан в треугольник (см. рисунок).

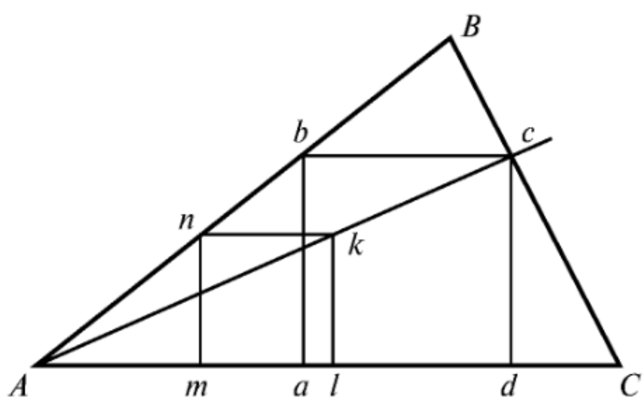


Рис. к задаче 19

К задаче 20. Строим треугольник ABC, основание которого равно $2m_a$, боковые его стороны $AB = a$ и $BC = b$. К этому треугольнику пристраиваем снизу такой же треугольник ADC так, чтобы получился параллелограмм $ABCD$, в котором линия AC является диагональю. Проводим в параллелограмме вторую диагональ BD. Треугольник ABD является искомым треугольником.

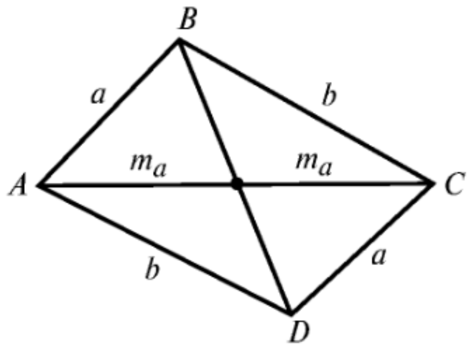


Рис. к задаче 20

К задаче 21. Анализируя приведенный в задаче пример, предполагаем что

$$S_n = 1 + 3 + ... + (2n-1) = n^2 .$$

Применив метод математической индукции и добавив слагаемое $(2n + 1)$, получаем

$$S_2 = 1 + 3 + 5....... + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 .$$

Что и требовалось доказать.

К задаче 22. Чтобы и к этой задаче, как к предыдущей, применить метод математической индукции, необходимо определить выражение числа N, равного сумме кубов чисел от 1 до n. При $n = 3$ число $N = 6$; при $n = 4$ число $N = 10$; при $n = 5$ число $N = 15$. Отсюда для N следует выражение

$$N_{n-1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-1)^3 = \left[1 + 2 + 3 + ... + (n-1)\right]^2 = \left\{\frac{n \cdot (n-1)}{2}\right\}^2 .$$

Прибавляя сюда следующее слагаемое, получаем

$$N_n = N_{n-1} + n^3 = \frac{n^2 (n-1)^2}{4} + n^3 = \frac{n^4 - 2n^3 + n^2 + 4n^3}{4} =$$

$$= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{(n+1)^2 n^2}{4} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 .$$

К задаче 23. Чтобы решить эту задачу, надо знать правило определения делимости заданного числа на 11.

Необходимо сложить нечетные (начиная с конца числа) цифры и полученному результату присвоить знак «+», так как это положительные остатки от деления соответствующих чисел на 11. Затем надо сложить все цифры этого числа, стоящие на четных местах, и этой сумме присвоить знак «–» — это отрицательные остатки от деления соответствующих чисел на 11. Положительные и отрицательные остатки суммируют алгебраически, и если полученный результат делится на 11, то и заданное число делится на 11.

Проиллюстрируем этот прием на заданном числе, для удобства разбив его на группы по две цифры: 87 09 41 $*$ 5 29 78.

Сумма цифр, стоящих на нечетных местах, $(8 + 9 + 5 + 1 + 9 + 7) = 39$.

Сумма цифр, стоящих на четных местах, $-(7 + 2 + * + 4 + 0 + 8) = -(21 + *)$.

Алгебраическая сумма остатков $39 - 21 - * = 18 - *$.

Так как звездочка стоит на четном месте, то вместо нее надо поставить положительную цифру, такую, чтобы окончательная сумма делилась на 11. Нетрудно видеть, что такой цифрой является 7.

Итак, искомым числом является 870941752978.

Проверка на компьютере: $870941752978 : 11 = 79176522998$.

В этой задаче могут быть такие варианты, при которых никакая цифра на месте звездочки не сможет обеспечить делимость рассматриваемого числа на 11. Например: число 870944$*$52978.

К задаче 24. Если бы не было реки, то самый короткий путь — это прямая, соединяющая точки A и B. Так «уберем реку», сдвинув нижнюю часть чертежа вверх, так чтобы прямая kl совместилась с прямой mn. При этом точка B сместится вверх на расстояние, равное ширине реки — это точка B'. Теперь соединяем точки A и B' прямой и находим точку C, в которой должен строится мост. Сдвинув нижнюю часть чертежа вниз, на прежнее место, получаем самый короткий путь из A в B — это $ACDB$.

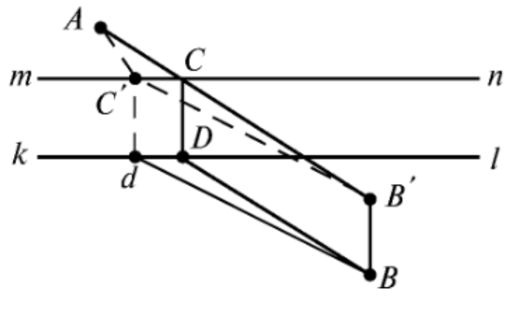


Рис. к задаче 24

Путь через любой мост, построенный в другом месте ($AC'D'B$), будет длиннее, так как $AC' + C'B'$ — сумма двух сторон треугольника больше его третьей стороны AB'.

К задаче 25. Прежде всего заметим, что число $aabb$ делится на 11: $aabb:11 = a0b$. Это число есть квадрат какого-то однозначного числа, умноженный на 11. Так как средняя цифра этого числа — ноль, то это значит, что сумма цифр искомого квадрата равна 10. Таким квадратом является $8^2 = 64$. Таким образом, получаем $(8 \cdot 11)^2 = 7744$.

К задаче 26. Центральный угол правильного пятиугольника равен 72°. Поэтому, чтобы построить правильный пятиугольник, необходимо суметь построить угол, равный 72° или 18°. Для построения такого угла нужно найти значение какой-либо его тригонометрической функции.

Найдем $\sin 18^\circ$:

$$\sin 18 = \frac{2 \cdot \sin 18 \cdot \cos 18}{2 \cdot \cos 18} = \frac{\sin 36}{2 \cdot \cos 18} = \frac{2 \cdot \sin 36 \cdot \cos 36}{4 \cdot \cos 18 \cdot \cos 36} =$$

$$= \frac{\sin 72}{4 \cdot \cos 18 \cdot \cos 36} = \frac{1}{4 \cdot \cos 36};$$

$$2 \cdot \sin 18 \cdot \cos 36 = \frac{1}{2};$$

$$\sin 54 - \sin 18 = \frac{1}{2};$$

$$\cos 36 - \sin 18 = \frac{1}{2};$$

$$1 - 2\sin^2 18 - \sin 18 = \frac{1}{2};$$

$$2 \cdot \sin^2 18 + \sin 18 - \frac{1}{2} = 0;$$

$$\sin 18 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Построим угол, синус которого равен $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Для этого построим прямоугольный треугольник ABC, катеты которого равны 1 и 2 (рис. 1). Гипотенуза этого треугольника AB равна $\sqrt{5}$. Вычтем из AB

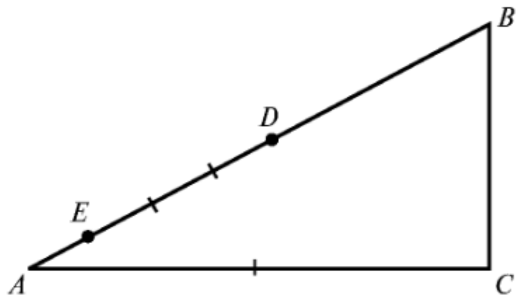


Рис. 1 к задаче 26

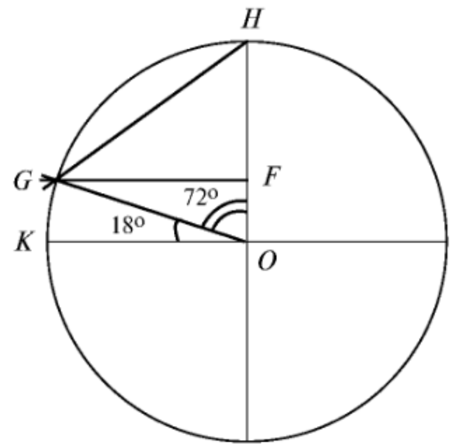


Рис. 2 к задаче 26

отрезок $BD = BC = 1$ и остаток AD разделим на четыре равные части (Эта операция легко выполняется с помощью циркуля и линейки.) Отрезок AE равняется $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Теперь построим окружность с радиусом $R = BC = 1$ (рис. 2). На одном из радиусов (радиус OH) отложим отрезок $OF = AE$. Через точку F проведем прямую FG, параллельную радиусу OK. Соединив прямой точку G с центром окружности O, получим угол KOG, равный 18°, и угол GOH, равный 72°. Соединив прямой точки G и H, получим отрезок, равный стороне правильного пятиугольника.

К задаче 27. Самый короткий путь между точками A и B можно увидеть, если сделать удачную развертку комнаты, которая показана на рис. 1. Катеты прямоугольного треугольника ABE равны $AE = 16$ м,

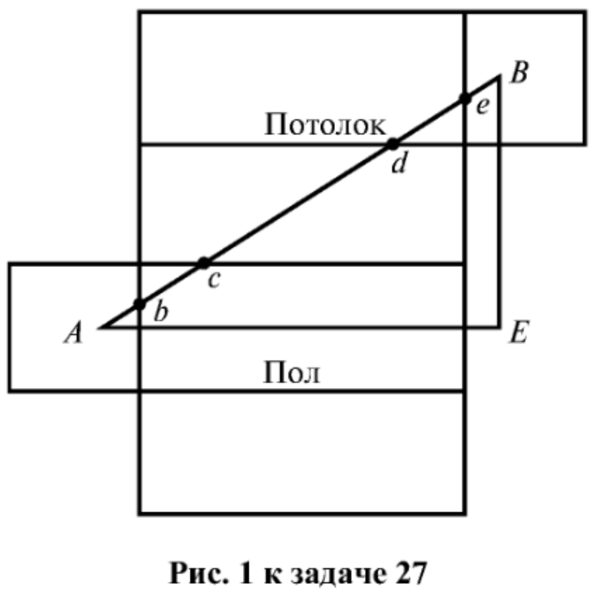


Рис. 1 к задаче 27

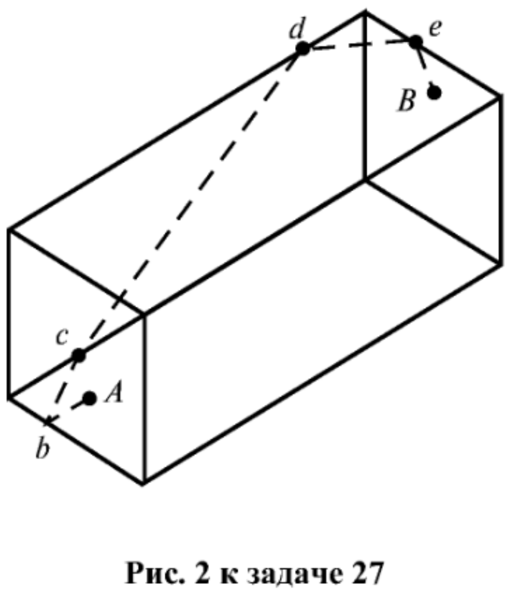


Рис. 2 к задаче 27

EB = 12 м, и гипотенуза (кратчайший путь) равна 20 м. На рис. 2 пунктиром показан этот путь на схеме комнаты.

К задаче 28. Схема эксперимента изображена на рисунке. На берегу океана на штативе высотой h в точке A устанавливается источник света, например лазерный излучатель. Приемник света устанавливается на лодке, которая уплывает перпендикулярно берегу. Наблюдатель, находящийся в лодке, все время держит в виду луч лазера. На некотором расстоянии от берега S, лодка скрывается за линией горизонта — это точка B, и лазер становится невидимым.

Из подобия треугольников OCD и ABD следует:

$$\frac{h}{S} = \frac{DC}{R}, \quad \text{но} \quad DC = \frac{S}{2}, \ \text{откуда} \quad R = \frac{S^2}{2h}.$$

Так как провести такой эксперимент в домашних условиях невозможно, то воспользуемся полученной формулой, чтобы оценить расстояние до «линии горизонта».

Радиус Земли R = 6400 км. Пусть точка A — глаз наблюдателя, находящегося на берегу океана, расположена на высоте h = 1,8 м. Тогда:

$$S = \sqrt{2hR} = \sqrt{2 \cdot 1,8 \cdot 6,4 \cdot 10^6} = 4,8 \cdot 10^3 \text{ м},$$

т. е. для человека средней высоты «линия горизонта» находится на расстоянии 4 — 5 км.

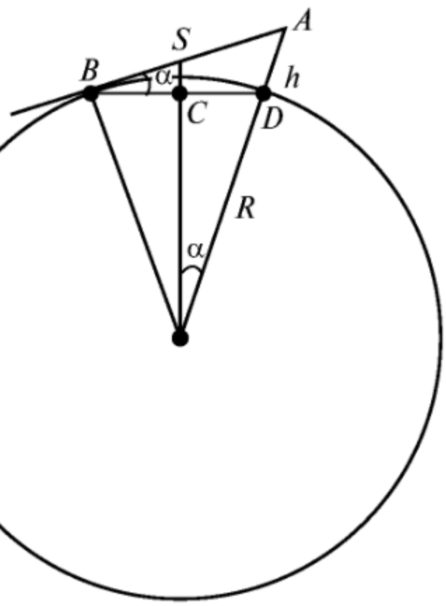


Рис. к задаче 28

К задаче 29. Число N = 1 280 000 401можно представить в виде суммы:

$$N = 20^7 + 20^2 + 1.$$

Покажем, что при любых x выражение $x^7 + x^2 + 1$ можно разложить на множители:

$$x^7 + x^2 + 1 = x^7 - x + x^2 + x + 1 = x \cdot \left(x^6 - 1\right) + x^2 + x + 1,$$

но $x\left(x^3 + 1\right)\left(x^3 - 1\right) + x^2 + x + 1 = \left(x^2 + x + 1\right)\left[x(x-1)\left(x^3 + 1\right) + 1\right] =$

$$= \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1\right),$$

т.е. число N = 1 280 000 401 является составным; для него x = 20.

Тогда N = 421·(3 200 000 – 160 000 + 400 – 20 + 1) = 421·3 040 381.

К задаче 30. По-видимому, подкоренные выражения являются кубами двучленов. Проверим это:

$$\left(a\sqrt{13} + b\right)^3 = 13a^3\sqrt{13} + 3 \cdot 13a^2 b + 3a\sqrt{13}b^2 + b^3 =$$

$$= \left(13a^3 + 3ab^2\right) \cdot \sqrt{13} + 39a^2 b + b^3.$$

Введем обозначения:

$$m = \left(13a^3 + 3ab^2\right) \cdot \sqrt{13}, \qquad n = 39a^2 b + b^3.$$

Тогда $\dfrac{n}{m} = \dfrac{39a^2 b + b^3}{13a^3 + 3ab^2} = \dfrac{39\beta + \beta^3}{13 + 3\beta^2}$, где $\beta = \dfrac{b}{a}$.

При a = 1, b = 1, β = 1, следовательно,

$$\frac{n}{m} = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$$

$$\left(\sqrt{13} + 1\right)^3 = 13\sqrt{13} + 39 + 3\sqrt{13} + 1 = 16\sqrt{13} + 40 = 8 \cdot \left(2\sqrt{13} + 5\right)$$

и $\sqrt[3]{2\sqrt{13} + 5} = \dfrac{\sqrt{13} + 1}{2}$;

при $a = 1$, $b = 3$, $\beta = 3$, следовательно,

$$\frac{n}{m} = \frac{144}{40} = \frac{18}{5}$$

$$\left(\sqrt{13}+3\right)^3 = 13\sqrt{13}+117+27\sqrt{13}+27 = 40\sqrt{13}+114 = 8\cdot\left(5\sqrt{13}+18\right)$$

и $\sqrt[3]{5\sqrt{13}+18} = \dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$.

Таким образом,

$$\sqrt[3]{5\sqrt{13}+18} - \sqrt[3]{2\sqrt{13}+5} = \frac{\sqrt{13}+3}{2} - \frac{\sqrt{13}+1}{2} = 1.$$

Ответ: $\sqrt[3]{5\sqrt{13}+18} - \sqrt[3]{2\sqrt{13}+5} = 1$.

К задаче 31. Надо так организовать переправу, чтобы 3-й и 4-й пешеходы переходили мост вместе:

1-й ход — туда: идут 1-й и 2-й, затратив на это 2 мин.

2-й ход — обратно несет фонарик 1-й (или 2-й), затратив на переход 1 мин.

3-й ход — туда идут 3-й и 4-й, затратив на переход 10 мин.

4-й ход — обратно 2-й несет фонарик, затратив на переход 2 мин.

5-й ход — туда идут 1-й и 2-й, затратив на переход 2 мин.

Итого: 2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17 мин.

К задаче 32. Манипуляции в комнате *A* таковы: надо один выключатель включить; второй выключатель оставить выключенным; третий выключатель включить на некоторое время, а затем выключить. Тогда в комнате *B* одна лампочка будет гореть, вторая — не будет гореть и будет холодной. Третья лампочка не будет гореть, но будет теплой. Сообразить, какая лампочка соединена с каким выключателем, совсем просто.

К задаче 33. Число 7 оканчивается на цифру 7. Число 7^2 оканчивается на 9. Число 7^3 оканчивается на 3. Число 7^4 оканчивается на 1. Число 7^5 оканчивается на 7 и т.д. Любое число 7^{4n} заканчивается на цифру 1.

К задаче 34. При таких больших цифрах в знаменателях нахождение общего знаменателя следует начинать с вычисления разности знаменателей. Если у обоих знаменателей есть общий множитель, то он будет и у разности знаменателей:

$$2257 - 2183 = 74.$$

Общим множителем этих двух чисел является 37:

$$2257 = 37\cdot 67, \quad 2183 = 37\cdot 59.$$

Теперь выполняем вычисление A:

$$A = 2\frac{22}{2183} - 1\frac{24}{2257} = 1 + \frac{22\cdot 61 - 24\cdot 59}{37\cdot 67\cdot 59} = 1 + \frac{1342 - 1416}{37\cdot 67\cdot 59} =$$

$$= 1 - \frac{74}{37\cdot 67\cdot 59} = 1 - \frac{2}{67\cdot 59} = 1 - \frac{2}{3953} = \frac{3951}{3953}.$$

К задаче 35. Соединяем точку A с центром окружности O. На отрезке OA, как на диаметре, строим окружность с центром O_1. Точки пересечения обеих окружностей являются точками касания, так как углы OMA и ONA являются прямыми.

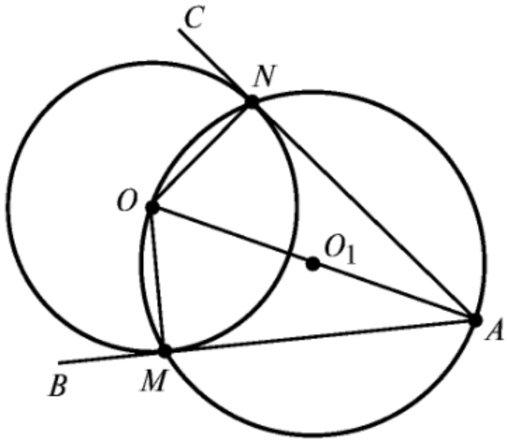


Рис. к задаче 35

К задаче 36. Можно применить общий метод, показанный на рисунке. Сначала построить отрезок $\sqrt{2}$, затем $\sqrt{3}$, затем $\sqrt{4}$ и так далее до $\sqrt{13}$.

Но можно и быстрее: построить прямоугольный треугольник с катетами, равными 2 и 3. Гипотенуза этого треугольника будет равна $\sqrt{13}$.

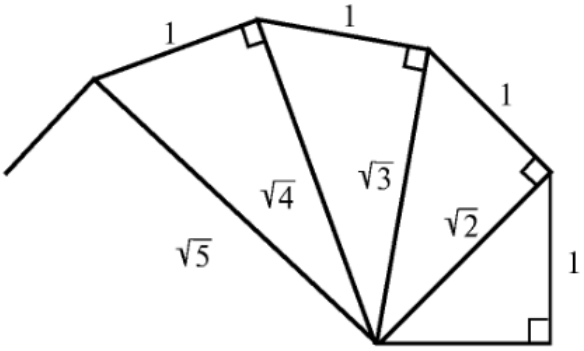


Рис. к задаче 36

К задаче 37. Разложим $n^4 + 4$ на множители:

$$N = n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 =$$

$$= \left(n^2 + 2\right)^2 - 4n^2 = \left(n^2 + 2n + 2\right)\left(n^2 - 2n + 2\right),$$

при $n = 1$ $\left(n^2 - 2n + 2\right) = 1$ число $N = n^2 + 2n + 2 = 5$ — простое число; при $n > 1$ оба множителя не равны 1, число N — составное.

К задаче 38. $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)$.

К задаче 39. $A = a^5 + a + 1 = a^5 - a^2 + a^2 + a + 1 = a^2\left(a^3 - 1\right) + a^2 + a + 1 = \left(a^2 + a + 1\right)\left(a^3 - a^2 + 1\right)$.

К задаче 40. 312 500 051 = $50^5 + 50 + 1$. В соответствии с предыдущей задачей это выражение раскладывается на два множителя:

$$50^2 + 50 + 1 = 2551 \quad \text{и} \quad 50^3 - 50^2 + 1 = 122\,501.$$

Проверка: 122 501·2551 = 312 500 051.

К задаче 41. $a^8 + a + 1 = a^8 - a^5 + a^5 + a + 1 = a^5\left(a^3 - 1\right) + \left(a^2 + a + 1\right)\left(a^3 - a^2 + 1\right)$ (см. решение к задаче 39);

$$a^5\left(a - 1\right)\left(a^2 + a + 1\right) + \left(a^2 + a + 1\right)\left(a^3 - a^2 + 1\right) =$$

$$= \left(a^2 + a + 1\right)\left[a^5\left(a - 1\right) + a^3 - a^2 + 1\right] =$$

$$= \left(a^2 + a + 1\right)\left(a^6 - a^5 + a^3 - a^2 + 1\right).$$

К задаче 42. Строим последовательно отрезки:

отрезок $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (рис. 1);

отрезок $d = \sqrt{a\left(b\sqrt{2}\right)}$ (рис. 2);

отрезок $u = \sqrt{c^2 - d^2}$ (рис. 3);

отрезок $\upsilon = \sqrt{c^2 + d^2}$ (рис. 4);

отрезок $f = \sqrt{u\upsilon}$ (рис. 5).

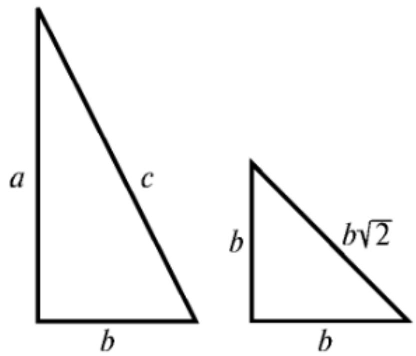


Рис. 1 к задаче 42

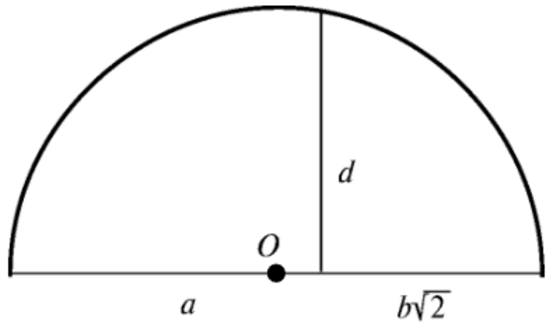


Рис. 2 к задаче 42

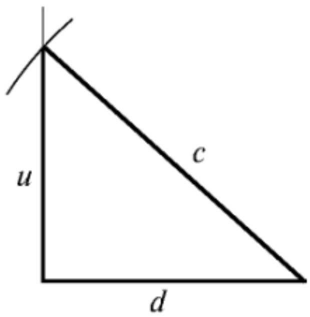


Рис. 3 к задаче 42

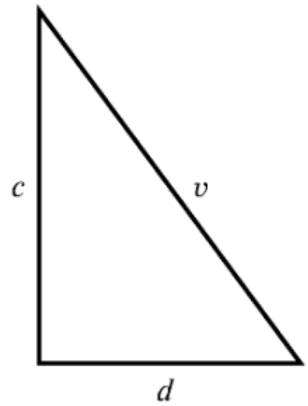


Рис. 4 к задаче 42

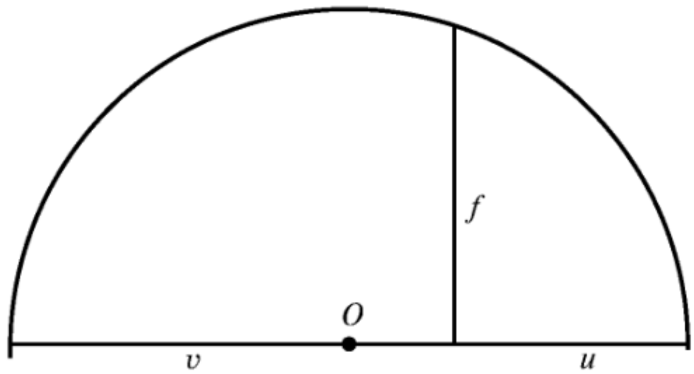


Рис. 5 к задаче 42

Отрезок $f=\sqrt{uv}=\sqrt[4]{c^4-d^4}=\sqrt[4]{\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2}=\sqrt[4]{a^4+b^4}$.

К задаче 43. $x^4+8x-7=0$.

Добавим «недостающие» слагаемые $\pm 2x^2$ и сгруппируем выражение следующим образом:

$x^4+2x^2+1-2\left(x^2-4x+4\right)=0;$

$$\left(x^2+1\right)^2-2\left(x-2\right)^2=0;$$

$$\left(x^2+1\right)^2=2\left(x-2\right)^2;$$

$$\left(x^2+1\right)=\pm\sqrt{2}(x-2).$$

Рассмотрим возможные решения:

$a)$ $x^2+1=\sqrt{2}\left(x-2\right)$, $x^2-\sqrt{2}x+1+2\sqrt{2}=0$,

$$x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4\left(1+2\sqrt{2}\right)}}{2}\text{ решений нет;}$$

$b)$ $x^2+1=-\sqrt{2}\left(x-2\right)$ $\quad x^2+\sqrt{2}x+1-2\sqrt{2}+0$,

$$x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4\left(1-2\sqrt{2}\right)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-2+4\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}.$$

К задаче 44. $\left(x^2-1\right)^2=4\left(2x+1\right)$.

Выполним следующие преобразования:

$$x^4-2x^2+1-8x-4=0;\quad x^4+2x^2+1-4x^2-8x-4=0;$$

$$\left(x^2+1\right)^2=\left[2\left(x+1\right)\right]^2.$$

Рассмотрим возможные решения:

$a)$ $x^2+1=2\left(x+1\right)$;	$b)$ $x^2+1=-2\left(x+1\right)$;
$x^2-2x-1=0$;	$x^2+2x+3=0$;
$x=1\pm\sqrt{2}$;	$x=-1\pm\sqrt{-2}$.
	Решений нет.

К задаче 45. Полагая, что $\sin x\neq 0$, умножим и разделим A на $\sin x$:

$$A=\frac{\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos 2^{n-1}x}{\sin x}=\frac{\sin 2^n x}{2^n\cdot\sin x}.$$

К задаче 46. Решение немедленно получится, если рассмотреть $9\cdot S_n$:

$$9\cdot S_n=9+99+999+\ldots+999999\ldots;$$

$$9\cdot S_n=(10-1)+\left(10^2-1\right)+\ldots+\left(10^{n+1}-1\right)=$$

$$=10+10^2+10^3+\ldots+10^{n+1}-n=10\cdot\frac{10^n-1}{9}-n=\frac{10^{n+1}-10-9n}{9};$$

$$S_n=\frac{10^{n+1}-10-9n}{81}.$$

К задаче 47. Если $\sin\frac{x}{2}\neq 0$, то, умножив и левую и правую часть этой суммы на $\sin\frac{x}{2}$, получим:

$$S_n\cdot\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}\cdot\sin x+\sin\frac{x}{2}\cdot\sin 2x+\ldots+\sin\frac{x}{2}\cdot\sin nx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2n-1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)=\sin nx\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}.$$

Следовательно, $S_n=\dfrac{\sin nx\cdot\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}.$

К задаче 48. Умножив и левую и правую части равенства

$$S_n=x+2x^2+\ldots+n\,x^n$$

на x, получим

$$x\,S_n=x^2+2x^3+\ldots+n\,x^{n+1}.$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем

$$S_n-x\,S_n=x+x^2+x^3+\ldots+x^n-n\,x^{n+1}=\frac{x^{n+1}-x}{x-1}-n\,x^{n+1}=$$

$$=\frac{x^{n+1}-x-n\,x^{n+2}+n\,x^{n+1}}{x-1}=\frac{-n\,x^{n+2}+(n+1)x^{n+1}-x}{x-1};$$

$$S_n = \frac{n x^{n+2} - (n+1) x^{n+1} + x}{(x-1)^2}.$$

К задаче 49. Проведем через точку *A* окружность с произвольным центром *O*. Через точку *B*, точку пересечения окружности с отрезком *AD*, и центр окружности *O* проведем прямую *OB* до пересечения с окружностью в точке *C*. Отрезок *CA* перпендикулярен *AD*, так как угол *A* опирается на диаметр.

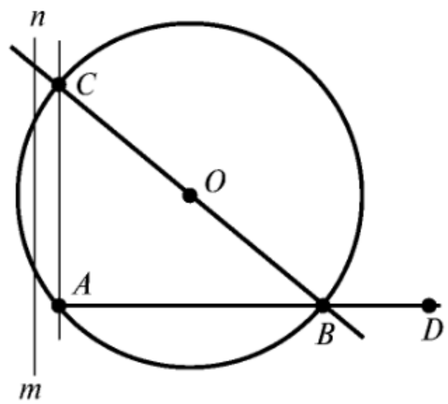


Рис. к задаче 49

К задаче 50. $N = (2^{64} - 1) = (2^{32} + 1)(2^{32} - 1) = (2^{32} + 1)(2^{16} + 1) \times$
$\times (2^{16} - 1) = (2^{32} + 1)(2^{16} + 1)(2^{8} + 1)(2^{4} + 1)(2^{2} + 1)(2 + 1)$; $N = 2^{64} - 1$.

К задаче 51. Очевидно, что задачу можно сформулировать несколько иначе: найти число, которое при делении на 6, 7, 8 и 9 дает в остатке -1, тогда $N = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 - 1 = 3023$. Но это число не самое маленькое.

Наименьшее из таких чисел $N = 7 \cdot 8 \cdot 9 - 1 = 503$.

Общий вид числа, удовлетворяющего условию задачи, $N = 504k - 1$.

К задаче 52. Проведем в треугольнике *ABC* медианы *BD*, *AE* и *CF*. Точка *G*, точка пересечения медиан, — центр тяжести треугольника, тогда $GD = \frac{1}{3} BD$.

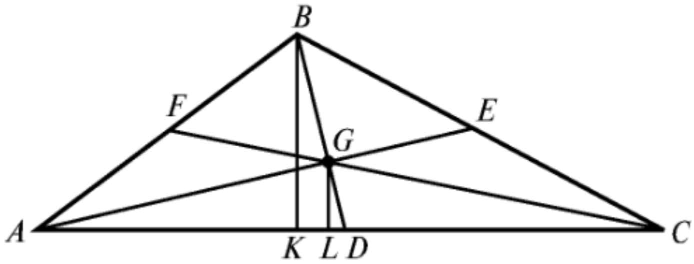


Рис. к задаче 52

Запишем условие: сумма моментов всех сил, действующих на тело, равна нулю $\left(\sum M\left(F_i\right)=0\right)$ относительно стороны AC:

$$F_B\,BK - mg\,GL = 0, \quad \text{откуда}$$

$$F_B = mg\frac{GL}{BK} = mg\frac{GD}{BD} = \frac{1}{3}mg,$$

где F_B — усилие рабочего в точке B, то есть усилие каждого рабочего равно $\frac{1}{3}mg$, все рабочие нагружены одинаково.

К задаче 53. $AD^2 = AB \cdot AC = 1 \cdot 3 = 3$, $AD = \sqrt{3}$, $DE = AD\,\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1$, $AE = \sqrt{3+1} = 2$, т. е. точка E является серединой BC, и AC проходит через центр окружности, как показано на прилагаемом чертеже, следовательно, $R = 1$.

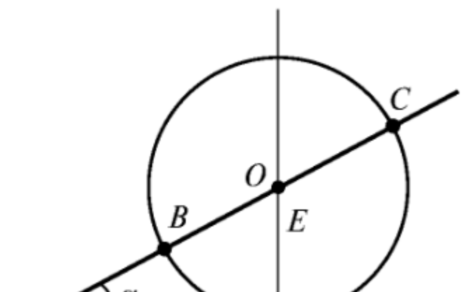


Рис. к задаче 53

К задаче 54. $N = 7^8 - 3^8 = \left(7^4 + 3^4\right)\left(7^2 + 3^2\right)(7+3)(7-3) = 2482 \cdot 58 \cdot 10 \cdot 4 = (2 \cdot 17 \cdot 73) \cdot (2 \cdot 29) \cdot (2 \cdot 5)(2 \cdot 2) = 2^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 73 = 5\,758\,240$.

К задаче 55. Так как большой и оба малых треугольника подобны, то

$$\frac{p_1^2}{S_1}=\frac{p_2^2}{S_2}=\frac{p^2}{S}, \quad \text{и} \quad S=S_1+S_2;$$

$$\frac{p_1^2}{p_2^2}=\frac{S_1}{S_2} \Rightarrow \frac{p_1^2+p_2^2}{p_2^2}=\frac{S_1+S_2}{S_2}=\frac{S}{S_2}, \quad \text{но} \quad \frac{S}{S_2}=\frac{p^2}{p_2^2},$$

т.е. $$p^2=p_1^2+p_2^2 \quad \text{и} \quad p=\sqrt{p_1^2+p_2^2}.$$

К задаче 56. При решении этой задачи используются две легко доказываемые теоремы об остатках. Остаток от деления суммы чисел равен сумме остатков от деления слагаемых. Остаток от деления произведения чисел равен произведению остатков.

Искомое число, удовлетворяющее условиям задачи, можно записать в виде

$$N=10\cdot13\cdot17\cdot n+\underbrace{17\cdot13\cdot a}_{A}+\underbrace{17\cdot10\cdot b}_{B}+\underbrace{10\cdot13\cdot c}_{C}.$$

Для краткости будем обозначать остаток от деления числа буквой *O*.

Первое слагаемое делится на заданные числа без остатка.

Число *A* делится на 17 и 13 без остатка. Остаток от деления на 10 равен 3:

$$O(A)=O(17)\cdot O(13)\cdot O(a)=O(221)\cdot O(a)=1\cdot O(a),$$

откуда следует , что $O(a)=3$.

Число *B* делится без остатка на 10 и 17. Остаток от деления на 13 равен 11:

$$O(B)=O(17)\cdot O(10)\cdot O(b)=O(170)\cdot O(b)=1\cdot O(b),$$

откуда следует, что $O(b)=11$.

Число *C* делится на 10 и 13 без остатка. Остаток от деления на 17 равен 15:

$$O(C)=O(10)\cdot O(13)\cdot O(c)=O(130)\cdot O(c)=11\cdot O(c),$$

откуда следует, что $11\cdot O(c)=17\cdot k+15$. Подбором находим $k=3$, $O(c)=6$.

Таким образом,

$$N=130\cdot17\cdot n+17\cdot13\cdot3+170\cdot11+130\cdot6=$$
$$=2210\cdot n+663+1870+780=2210\cdot n+3313.$$

Итак, N = 1103 при $n = -1$, $N = 3313$ при $n = 0$, $N = 5523$ при $n = 1$ и т.д.

Наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условиям задачи, равно 1103.

К задаче 57. Скорость минутной стрелки равна $\omega_1 = 1$ об/ч. Скорость часовой стрелки $\omega_2 = \frac{1}{12}$ об/ч. Чтобы остановить часовую стрелку, прибавим к системе угловую скорость, равную $-\omega_2$. В этой системе отсчета часовая стрелка будет стоять на месте, а минутная будет вращаться со скоростью $\omega_1 = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ об/ч. За время, равное T, она сделает $T'\omega_1 = \frac{11}{12} \cdot T$ оборотов и столько же раз встретится с часовой стрелкой.

Если в начальный момент стрелки стояли на одной и той же цифре и если учесть эту «начальную встречу», то число встречь $n = \frac{11}{12}T + 1$.

Тогда, если T = 12 ч, то n = 12; если T = 24 ч, то n = 23; если $T = N$ сут, то $n = \frac{24 \cdot N \cdot 11}{12} + 1 = 22N + 1$.

К задаче 58. Остановим один из пароходов в порту, перейдя к системе отсчета, движущейся по отношению к исходной со скоростью, равной $-v_{\text{п}}$. Тогда стоящий в порту пароход каждые сутки будет встречать по два встречных парохода, за 10 сут он встретит 20 пароходов.

К задаче 59. Несомненно, опечатка. Число, заканчивающееся на 1, при возведении в любую степень будет заканчиваться на 1. И если из него вычесть единицу, то оставшееся число будет заканчиваться нулем. Это явно не простое число. Это опечатка. Правильно это число выглядит так: $2^{3021377} - 1$.

К задаче 60. Обозначим длины диагоналей четырехугольника x и y. Соединим середины сторон многоугольника (точки –a, b, c и d) прямыми — получим параллелограмм $abcd$, площадь которого равна половине площади четырехугольника —16 см^2.

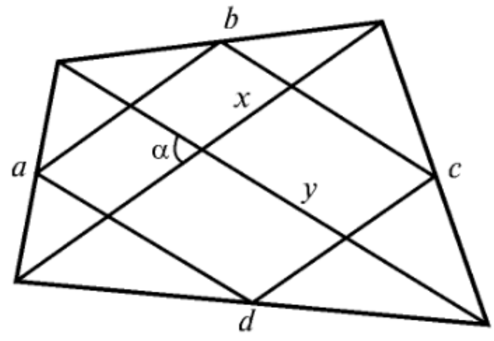


Рис. к задаче 60

Стороны этого параллелограмма равны $x/2$ и $y/2$, а площадь $\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}\sin\alpha$. По условию задачи

$$x^2 + y^2 = 128,$$

$$xy = \frac{64}{\sin\alpha}\cdot$$

Решением этой системы уравнений являются

$$x = 8\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}; \quad y = 8\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.$$

К задаче 61. $\sqrt[3]{625} + \sqrt{16} - \sqrt[3]{40} - \sqrt{25} = 5\sqrt[3]{5} + 4 - 2\sqrt[3]{5} - 5 = 3\sqrt[3]{5} - 1$.

К задаче 62. $\left(\frac{1}{27}\right)^{x-\frac{1}{3}} = \left(3^{-3}\right)^{x-\frac{1}{3}} = 3^{-3x+1}$; $\quad 3^{-x} = 4$; $\quad 3^{-3x+1} =$

$= 4^3 \cdot 3 = 192.$

К задаче 63. Из условия задачи видно, что один катет треугольника в 2 раза больше другого. Обозначим длину меньшего катета через x, тогда по формуле Пифагора $x^2 + 4x^2 = 80$; $\quad x^2 = 16$; $\quad x = 4$. Площадь треугольника равна $S = 0{,}5\cdot 4\cdot 8 = 16$ см^2.

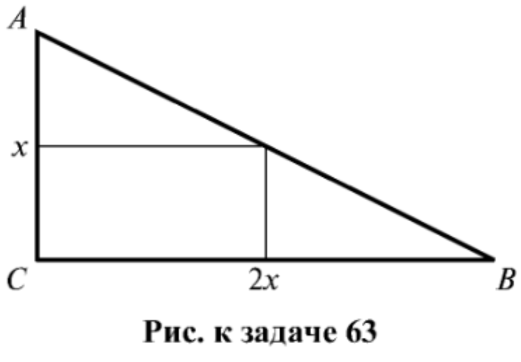


Рис. к задаче 63

К задаче 64. Высота призмы равна $H = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. Площадь полной поверхности призмы $S = 2 \cdot 6^2 + 4 \cdot (6 \cdot 8) = 72 + 192 = 264$ см^2.

К задаче 65. Сделаем небольшое вступление к рассматриваемой задаче. Углом между двумя пересекающимися (или не пересекающимися в пределах чертежа) прямыми будем считать тот угол, который меньше или равен 90°. Так как угол между прямыми не изменяется при их параллельном смещении, то, анализируя вопрос об углах между прямыми, будем проводить все прямые через одну точку.

Тогда три прямые делят угол в 180° на три части (см. рисунок), а *n* прямых — на *n* частей. Если все углы одинаковы, то каждый из них равен 180°/*n* градусов. Если не одинаковы, то всегда найдется угол меньший, чем 180°/*n*.

Теперь перейдем к решению задачи. В любом выпуклом семиугольнике $\frac{(7-3)\cdot 7}{2} = 14$ диагоналей. Они делят угол в 180° на 14 частей.

При этом, как доказано выше, всегда найдется угол меньший, чем 180° /14 = 12,8°.

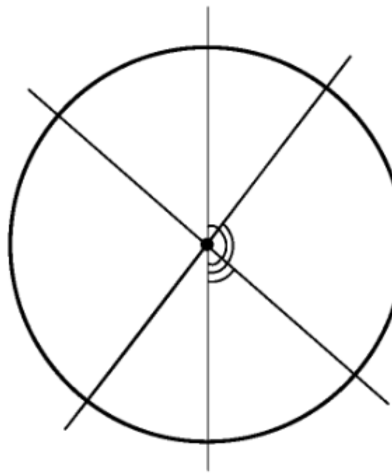


Рис. к задаче 65

К задаче 66. Каким бы способом не переливали из одной банки в другую, даже просто через край, если в конце операций по переливу в каждой банке окажется по 1 л смеси, то, по закону сохранения массы, молока в банке с кофе будет столько же, сколько кофе в банке с молоком.

К задаче 67. Рассмотрим произвольный треугольник *ABC* с основанием *AC* = *n* и высотой *h*. Впишем в него прямоугольник *abcd*, верхняя сторона которого bc отсекает $1/m$-ю часть боковых сторон (и высоты). Определим периметр p этого прямоугольника:

$$bc = \frac{n}{m}, \quad ab = \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdot h, \quad p = 2 \cdot \left[\frac{1}{m} n + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdot h\right].$$

Нетрудно видеть, что если $n = h$, то $p = 2h$, и периметр не зависит от значения m, т. е. все прямоугольники, вписанные в треугольник, у которого $n = h$, имеют один и тот же периметр.

Очевидно и обратное: периметры двух прямоугольников

$$p_1 = 2\left[\frac{1}{m} n + \left(1 - \frac{1}{m}\right) h\right];$$

$$p_2 = 2\left[\frac{1}{n} n + \left(1 - \frac{1}{n}\right) h\right]$$

могут быть равными, только если $n = h$.

Площадь такого треугольника ABC выражается через периметр p:

$$S = \frac{1}{2} nh = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} = \frac{p^2}{8}.$$

При $p = 10$ площадь $S = 12{,}5$.

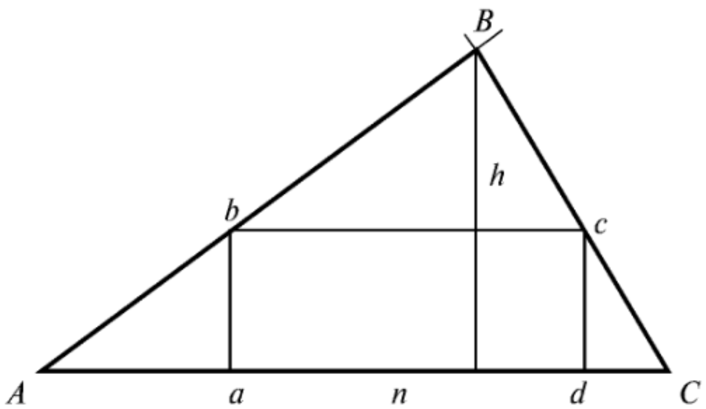


Рис. к задаче 67

К задаче 68. Так как среди множителей числа N есть $\mathrm{tg}45° = 1$, а $\lg 1 = 0$, то $N = 0$.

К задаче 69. $S_{ABH} = \frac{1}{2} S_{ABD}$, $S_{DFC} = \frac{1}{2} S_{DBC}$ и $S_{ABH} + S_{DFC} = $

$= \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Аналогично: $S_{EBC} + S_{AGD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Таким образом:

$$S_{ABH} + S_{AFC} + S_{EBC} + S_{AGD} = S_{ABCD}.$$

Если бы эти треугольники не перекрывали друг друга, то они в точности покрыли бы всю площадь четырехугольника *ABCD*. Так как они частично перекрываются, то очевидно, что площадь взаимно перекрытых участков (площадь темных фигур) равна той площади, которая не покрывается ни одним треугольником.

К задаче 70. Решение по индукции. Пусть при некотором *n* это условие выполняется, т. е.

$$3^n = abcd \cdot 100 + k \cdot 10 + l,$$

где k — четно.

При умножении на 3 имеем

$$3^{n+1} = efgil \cdot 100 + 3k \cdot 10 + 3l.$$

Очевидно, что $3k$ — также четное число. Поэтому четность или нечетность предпоследней цифры зависит от $3l$.

Но любая степень тройки может заканчиваться на $l = 3, 9, 7$ или 1. При умножении этих цифр на 3 имеем $3l = 9,\ 27,\ 21$ или 3. Таким образом, $3l$ либо никак не изменяет четность предпоследней цифры, либо добавляет к ней двойку, оставляя ее четной.

Проверка: $3^3 = 27$; $3^4 = 81$, $3^5 = 243$ и т.д.

К задаче 71. $N = 989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320 = (1000 - 11)(1000 + 1) \times$ $\times (1000 + 7) + 320 = 1000^3 + (-11 + 1 + 7) \cdot 1000^2 + (7 - 77 - 11) \cdot 1000 -$ $- 77 + 320 = 1000^3 - 3 \cdot 1000^2 - 81 \cdot 1000 + 243 = 1000^2 \cdot (1000 - 3) -$ $- 81 \cdot (1000 - 3) = 997 \cdot 991 \cdot 1009$.

К задаче 72. Решение показано на рис. 1. Вначале отражаем точку, в которой находится второй шар, симметрично относительно второго борта — точка *A*. Затем точку *A* отражаем симметрично относительно первого борта — точка *B*. Точку *B* соединяем прямой линией с точкой *1*, в которой находится первый шар. Эта линия определяет направление удара и позволяет построить траекторию движения первого шара до столкновения со вторым: *1 — b — a — 2*.

Задачу можно усложнить. При некоторых удачных положениях шаров можно первый шар до попадания во второй заставить отрекошетировать от всех четырех бортов биллиардного стола, как это показано на рис. 2.

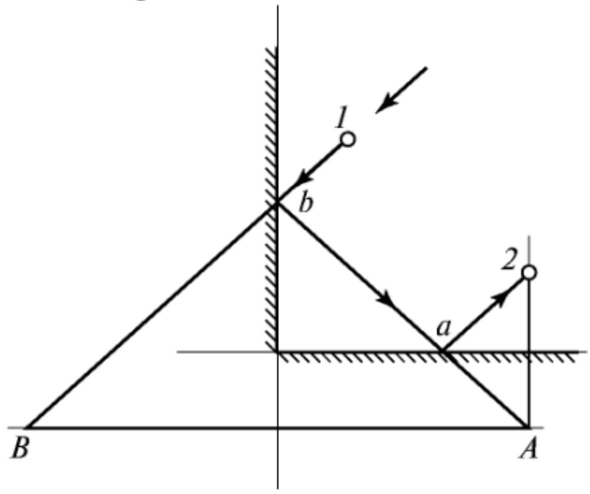


Рис. 1 к задаче 72

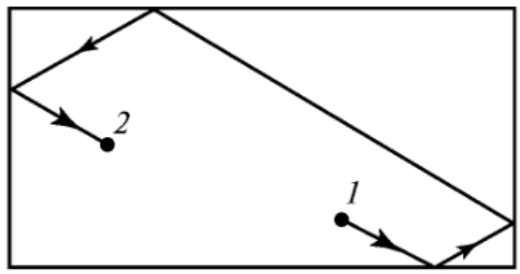


Рис. 2 к задаче 72

К задаче 73. Пусть, например, задано число 2014. Возьмем 2015 чисел от 1 до 111…111 и будем искать остатки от деления этих чисел на 2014. Предположим, что ни одно из выбранных чисел не делится на 2014. Тогда мы будем иметь 2015 остатков. Среди них по крайней мере два остатка будут одинаковыми. Тогда разность чисел, соответствующих этим остаткам, будет иметь вид 111…11000…00 и будет делиться на 2014.

Проиллюстрируем это простым примером: найти число этого класса, которое делится на 7.

Число	1	11	111	1111	11111	111111	1111111
Остаток	1	4	6	5	2	0	1

То, что искомым числом является N = 111111, видно по нулевому остатку. Но даже если бы среди остатков не было нуля, искомое число можно было найти, используя остатки, равные единице:

$N_1 = 1111111 - 1 = 1111110$. К этому числу 1111110 можно справа добавлять произвольное число нулей, и получающиеся числа также будут принадлежать к рассматриваемому классу чисел.

К задаче 74. Одна книга стоит больше, чем 17:10 = 1,70 р., но меньше, чем 12 р.:7 = 1,714. Следовательно, одна книга стоит 1 р. 71 к.

К задаче 75. Так как у четырехугольника *DbCc* два противоположных угла прямые, то вокруг него можно описать окружность, центр которой, точка *O*, лежит посредине стороны *bc*, т. е. *bc* — диаметр окружности. Точка *D* — середина дуги *bDc*. Следовательно, *CD* — биссектриса угла *bCc*.

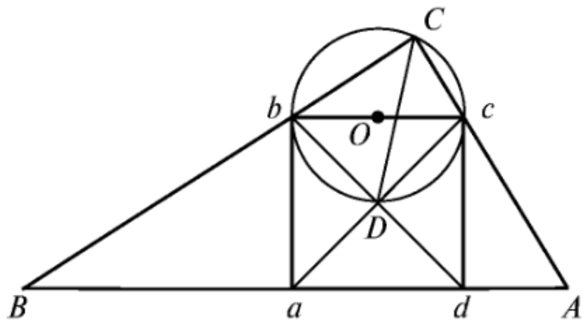


Рис. к задаче 75

К задаче 76. $a^2 + b^2 = 16\,000$. Очевидно, что оба числа либо четные, либо нечетные.

Нечетными они не могут быть, так как

$$(2x+1)^2 + (2y+1)^2 = 4x^2 + 4x + 4y^2 + 4y + 2\,.$$

Эта сумма делится на 2, но не делится на 4.

Тогда $a = 2c$, $b = 2d$, $c^2 + d^2 = 4000$, где c и d не могут быть нечетными; $c = 2e$, $d = 2f$ и $e^2 + f^2 = 1000$, где e и f также не могут быть нечетными; $e = 2g$, $f = 2h$ и $g^2 + h^2 = 250$, где g и h не могут быть четными, так как 250 не делится на 4.

Следовательно, $g = (2m + 1)$, $h = (2n + 1)$ и $4m^2 + 4m + 4n^2 + 4n =$ $= 248$;

$$m^2 + m + n^2 + n = 62.$$

Подобрать пары m и n поможет следующая таблица

m	$m^2 + m$
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56

Находим две пары: $m_1 = 2$, $n_1 = 7$; и $m_2 = 4$ и $n_2 = 6$.

Тогда $a_1 = 2^3(2m_1 + 1) = 8 \cdot 5 = 40$, $b_1 = 2^3(2n_1 + 1) = 8 \cdot 15 = 120$, $40^2 + 120^2 = 16\,000$.

$a_2 = 2^3(2m_2 + 1) = 8 \cdot 9 = 72$, $b_2 = 2^3(2n_2 + 1) = 8 \cdot 13 = 104$, $72^2 + 104^2 = 16\,000$.

К задаче 77. Если $A = 5k$ или $A = 5k \pm 1$, то N_1 делится на 10. Если $A = 5k \pm 2$, то $N_2 = A^3 + A = A\left(A^2 + 1\right)$. Один из этих множителей четный, тогда $A\left(A^2 + 1\right) = A\left(25 \cdot k^2 \pm 20k + 4 + 1\right) = 5A\left(5k^2 \pm 4k + 1\right)$, то есть N_2 делится на 2 и на 5.

К задаче 78. Ясно, что $X = Б$, $Z = А$, $T = Б$.

$$\begin{array}{r} \times\, XYZT \\ 101 \\ \hline XYZT \\ +\,XYZT \\ \hline БАОБАБ \end{array}$$

Имеем:

$$\begin{array}{r} БYАБ \\ \ldots БYАБ \\ \hline БАОБАБ \end{array}$$

Так как $Y + Б = Б$, то $Y = 0$; $Y + 1 = А$, следовательно, $А = 1$; $Б + А = 10$, т.е. $Б = 9$.

Итак: $БАОБАБ = 910\,919$.

К задаче 79. Проведем через точку Q прямые KL и MN параллельные сторонам параллелограмма.

Треугольник BQM подобен треугольнику DQK. Следовательно, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{e}{f}$. Отсюда видим, что $\frac{e}{f} = \frac{b}{d}$ и треугольники AMQ и QNC подобны.

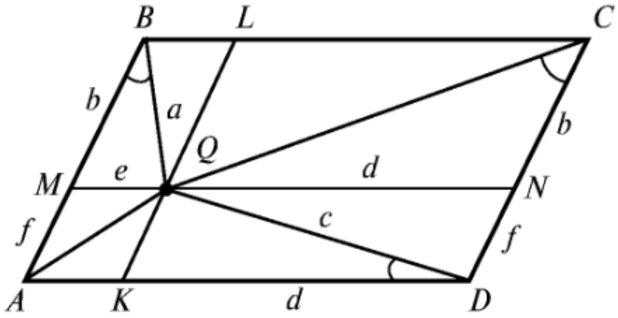


Рис. к задаче 79

Поэтому $\angle QCN = \angle MQA$, но $\angle MQA = \angle QAD$, откуда $\angle QAD = \angle QCN$.

К задаче 80. $N = 1 + 2^{1993} + 3^{1993} + \ldots + 1991^{1993} + 1992^{1993}$. Остатки от почленного деления этой суммы на 1993 можно записать так:

$$1+2^{1993}+...+996^{1993}+(-996)^{1993}+(-995)^{1993}+...+(-2)^{1993}+(-1)=0.$$

Если сумма остатков от почленного деления равна нулю, то N делится на 1993.

К задаче 81. Так как $55 = 5\cdot 11$, то рассматриваемое число делится на $\underbrace{11111}_{5}$ и $\underbrace{11111111111}_{11}$.

К задаче 82. Сначала опустим перпендикуляр на диаметр окружности из точки B, расположенной вне окружности.

Для этого, соединив точку B с концами диаметра A и C, получаем треугольник ABC. Соединив точки D и F, в которых боковые стороны треугольника пересекаются с окружностью, соответственно с точками C и A, получаем точку O, которая является точкой пересечения высот треугольника. Прямая, проведенная через точки B и O, является высотой, то есть перпендикулярна диаметру AC. Точки пересечения этого перпендикуляра с окружностью обозначим точками M и N.

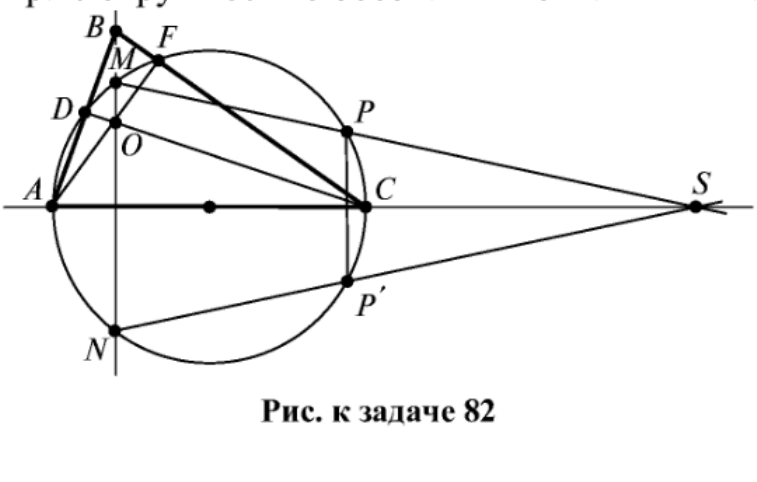


Рис. к задаче 82

Теперь перейдем к построению перпендикуляра, опущенного на диаметр из точки P.

Проведем прямую через точки M и P до пересечения с линией диаметра в точке S. Затем проведем прямую через точки N и S. Точка P', в которой эта прямая пересекает окружность, симметрична относительно диаметра точке P. Отрезок PP' перпендикулярен диаметру AC.

К задаче 83. Обозначим $\sqrt[10]{2} = a$. Тогда $a^2 + 7 < 8a$, $a^2 - 8a + 7 < 0$.

Корни этого уравнения 1 и 7. Таким образом, неравенство выполняется при $1 < a < 7$.

Так как $1 < \sqrt[10]{2} < 7$, то рассматриваемое неравенство выполняется.

К задаче 84. Если $p + q = -x_1 - x_2 + x_1 \cdot x_2 = 198$, то $(x_1 - 1) \times$ $\times (x_2 - 1) - 1 = 198$, $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 199$.

Так как 199 простое число, то возможны два решения:

$$x_1 - 1 = 1; \quad x_2 - 1 = 199; \quad \to \quad x_1 = 2, \; x_2 = 200;$$

$$x_1 - 1 = -1, \quad x_2 - 1 = -199; \quad \to \quad x_1 = 0, \; x_2 = -198.$$

К задаче 85. $x + (x-2) + (x+2) + (x+4) = 4x + 4 = 4052; \; x = 1012.$

Искомые числа: 1010, 1012, 1014, 1016

К задаче 86. Из условия задачи следует, что N делится на 7, 11 и 13.

$$N = 7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001.$$

К задаче 87. $a\,a\,a\,a\,a\,a\,a\,a\,a = a \cdot 111111111$. Следовательно, на 37 должно делиться число 111111111.

Так как $37 \cdot 3 = 111$, то любое число вида $\underbrace{111...111}_{3k}$ делится на 37.

К задаче 88. $a = 2^{45} = 32^9$, $b = 3^{36} = 81^9$, $c = 4^{27} = 64^9$, $d =$ $= 5^{18} = 25^9$, в порядке возрастания $d < a < c < b$.

К задаче 89. Обозначим $x^{100} = t$, $y^{100} = z$. Тогда решаемое уравнение примет вид

$$\left(16t^2 + 1\right)\left(z^2 + 1\right) = 16tz,$$

$$\frac{16t^2+1}{t}=\frac{16z}{z^2+1}=A, \qquad 16t^2-At+1=0, \qquad Az^2-16z+A=0,$$

$$t=\frac{A\pm\sqrt{A^2-64}}{32}, \qquad z=\frac{8\pm\sqrt{64-A^2}}{A}.$$

Решение возможно только при $A^2 - 64 = 0$ или $A = 8$. При этом $t = 1/4$, $z = 1$, откуда $x=\sqrt[100]{1/4}, \quad y=\sqrt[100]{1}=1.$

К задаче 90. Так как общих методов решения уравнений четвертой степени не существует, пытаемся угадать некоторые простейшие значения корней:
пробуем $x = 1$, получаем $1 + 2 – 16 – 2 + 15 = 0$; $x_1 = 1$ является корнем уравнения; пробуем $x = –1$, получаем $1 – 2 – 16 + 2 + 15 = 0$; $x_2 = –1$ также является корнем этого уравнения. Следовательно, уравнение делится на $(x – 1)(x + 1) = x^2 – 1$;

$$(x^4 + 2x^3 – 16x^2 – 2x + 15):(x^2 – 1) = x^2 + 2x – 15.$$

Корни уравнения $x^2 + 2x – 15 = 0$ находятся легко. Это $x_3 = 3$ и $x_4 = –5$, таким образом, корни исходного уравнения:

$$x_1 = 1,\ x_2 = –1,\ x_3 = 3,\ x_4 = –5.$$

К задаче 91. $S_{AOB}=\frac{R^2}{2}, S_{APO}=\frac{xR}{2}, S_{PQO}=\frac{xy}{2}, S_{BOQ}=\frac{yR}{2};$

$$S_{APQB}=\frac{R^2}{2}+\frac{xR+xy+yR}{2}; \qquad (*)$$

$$\frac{x}{R}=\operatorname{tg}\beta,\ \ \frac{y}{R}=\operatorname{tg}\gamma;$$

$$\alpha+\beta+\gamma=90^\circ, \quad \alpha=45^\circ, \quad \gamma+\beta=45^\circ;$$

$$\operatorname{tg}(\gamma+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}45^\circ=1,$$

или $\quad \frac{x}{R}+\frac{y}{R}=1-\frac{x}{R}\cdot\frac{y}{R}, \qquad xR+yR+xy=R^2$

и, подставляя это выражение в (*), получаем

$$S_{APQB}=\frac{R^2}{2}+\frac{R^2}{2}=R^2.$$

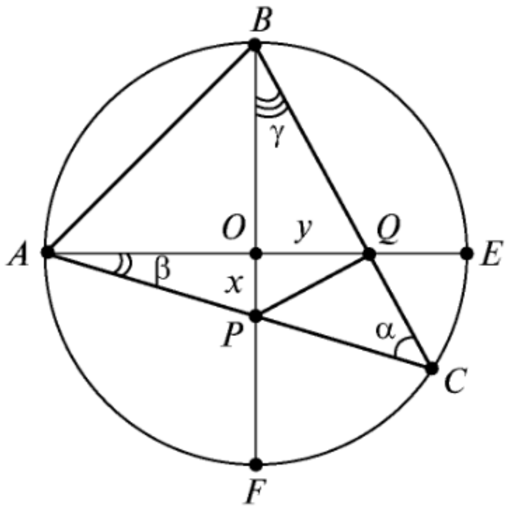


Рис. к задаче 91

К задаче 92. Отметим, что $1991 = 11\cdot181$. Докажем, что $12^5 + 9^5 + 8^5 + 6^5$ делится на 1991:

$12^5 + 9^5 + 8^5 + 6^5 = 4^5(3^5 + 2^5) + 3^5(3^5 + 2^5) = (3^5 + 2^5)(4^5 + 3^5) = 275\cdot1267;$

$275 = 25\cdot11$, $1267 = 181\cdot7$, таким образом, $12^5 + 9^5 + 8^5 + 6^5 = 1991\cdot175$.

Докажем теперь исходную задачу, обозначив $m = 5\cdot k$, где k — нечетно.

$$12^m + 9^m + 8^m + 6^m = (3^m + 2^m)(4^m + 3^m) = [(3^5)^k + (2^5)^k]\cdot[(4^5)^k + (3^5)^k].$$

Так как $a^k + b^k$ при нечетных k делится на $a + b$, то первая скобка делится на $3^5 + 2^5 = 275 = 11\cdot25$, а вторая скобка делится на $4^5 + 3^5 = 1267 = 181\cdot7$.

Таким образом, рассматриваемая сумма делится на $11\cdot181=1991$.

К задаче 93. Очевидно, что число N делится на 111...11 и может быть записано в виде

$$N = 111\ldots11\cdot100\ldots002.$$

Так как исходное число представлено в виде двух сомножителей, один из которых примерно в 9 раз больше другого, то два сомножителя, отличающихся на единицу, следует искать, разделив второй сомножитель на 3, и умножив первый из них на 3.

В результате получаем:

$10000000002:3 = 3333333334$, $111111111\cdot3 = 333333333$, то есть $N = 3333333333\cdot3333333334$. Что и требовалось доказать.

К задаче 94. Исходный текст программы на языке Pascal (скомпилировано в среде PascalABC.NET):

```
program InPower;
const
  L       = 32767;
type
  iArray   = array [1..L] of integer;
var
  x,y,i,j  : integer;
  a        : iArray;
procedure multiply(var a: iArray; b: integer); // умножение в столбик
var
  iR,dR,i :integer;
begin
  dR:=0;
  for i:=1 to L do
  begin
    iR:=a[i]*b+dR;
    if iR>=10 then
      begin
        a[i]:=iR-10*trunc(iR/10);
        dR:=trunc(iR/10);
      end
    else
      begin
        a[i]:=iR;
        dR:=0;
      end
  end;
end;
begin
  write('Enter X,Y. [X number from 1 to 9] Z=X^Y:');
  read(x,y);
  a[1]:=x;
  for i:=2 to y do
  multiply( a, x);
  writeln(x,'^',y,'=');
  i:=L;
  while (a[i]=0) do // Пропуск пустых элементов массива
  dec(i);
  for j:=0 to i-1 do
  write(a[i-j]);
  readln();
end
```

Примеры работы программы

Формула	**Результат**
2^64=	18446744073709551616
2^256=	115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007913129639936
2^512=	13407807929942597099574024998205846127479365820592393377723561443721764030073546976801874298166903427690031858186486050853753882811946569946433649006084096
3^64=	3433683820292512484657849089281
3^256=	139008452377144732764939786789661303114218850808529137991604824430036072629766435941001769154109609521811665540548899435521
3^512=	193233498322889151054540687220195810554014657616033285501845376289024667464155370000179394297860293543900823292945861195051535091013329408840980404787286395425605501337273994827780623224073723381210433996682422765917915046589858829952724365 41441

Исходный текст программы в среде Mathcad

```
x := 2
y := 256
buff_size := 4096
InPower(x,y)=x^y=...
InitArray(length) := | for i ∈ 0.. length − 1
                     |    array_i ← 0
                     | array
Myltiply(array, number) := | dR ← 0
                           | for i ∈ 0.. length(array) − 1
                           |   | iR ← array_i·number + dR
                           |   | if iR ≥ 10
                           |   |   | array_i ← iR − 10·trunc(iR/10)
                           |   |   | dR ← trunc(iR/10)
                           |   | otherwise
                           |   |   | array_i ← iR
                           |   |   | dR ← 0
                           | array
```

```
InPower(x, y) := | a ← InitArray(buff_size)
                 | a_0 ← x
                 | for  i ∈ 2.. y
                 |   a ← Myltiply(a, x)
                 | i ← buff_size − 1
                 | while  a_i = 0
                 |   i ← i − 1
                 | s ← ""
                 | for  j ∈ 0.. i
                 |   s ← concat(s, num2str(a_(i−j)))
                 | s
2^256 = InPower(x, y)
InPower (x, y) = "115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007913129639936"
```

К задаче 95. Расчет количества зерен достаточно прост. Мы имеем дело с геометрической прогрессией, в которой $b_1 = 1$, $q = 2$ и $n = 64$. Сумма членов этой прогрессии определяется формулой

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = 2^{64} - 1\,;$$

$$2^{64} - 1 = 18446744073709551616 - 1 \approx 1{,}84 \cdot 10^{19} \text{ зерен}$$

(см. решение задачи 94).

Полагая, что одно зерно весит 1 г, получаем, что масса такого количества зерна равна $1{,}84 \cdot 10^{13}$ т. В настоящее время на Земле проживает около 7 миллиардов человек. Если разделить все это зерно поровну между всеми землянами, то каждому досталось бы по 2600 т — железнодорожный состав из 65 сорокатонных вагонов.

К задаче 96. Решение задачи в среде Mathcad. Size — размер очереди, каждый (eachN)-й выбывает.

```
Schitalka(size, eachN) := | for i ∈ 0.. size − 1
                          |    a_i ← 1
                          | i ← 0
                          | j ← 0
                          | count ← size
                          | while count ≥ 1
                          |    | i ← i + 1  if i < size
                          |    | i ← 1  otherwise
                          |    | if a_(i−1) = 1
                          |    |    | j ← j + 1  if j < eachN − 1
                          |    |    | otherwise
                          |    |    |    | j ← 0
                          |    |    |    | a_(i−1) ← 0
                          |    |    |    | count ← count − 1
                          | i
Schitalka(300, 3) = 191
```

К задаче 97. Конечно. Даже если какая либо сторона нечетна, то, умножив все три числа на 2, получим пифагоров треугольник, у которого все стороны четны. Но так как мы рассматриваем только «не подобные» пифагоровы тройки, у которых нет общего множителя, то у таких треугольников все стороны не могут быть четными.

К задаче 98. Нет. Это хорошо видно из формулы Пифагора.

К задаче 99. Обязательно две. Это также хорошо видно из формулы Пифагора.

К задаче 100. Гипотенуза и один из катетов. Если нечетны оба катета, то

$$a = 2m + 1,\ \ b = 2n+1 \ \text{ и } \ a^2 + b^2 = 4\cdot(m^2 + n^2) + 4(m + n) + 2.$$

Видно, что это число делится на 2, но не делится на 4, т. е. такое число не является квадратом.

К задаче 101. Из формулы Пифагора следует:

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b) = pq,$$

где $p = c + b$, $q = c - b$, т. е., чтобы найти b и c, необходимо разбить a^2 на два множителя одинаковой четности p и q (что такое разбиение всегда осуществимо, будет видно из последующих задач), и тогда $c = \dfrac{p+q}{2}$, $b = \dfrac{p-q}{2}$.

К задаче 102. $a^2 = 121$. В этом случае возможно единственное разбиение на множители: $p = 1$, $q = 121$. Тогда $c = 0{,}5(121 + 1) = 61$, $b = 0{,}5(121 - 1) = 60$. Таким образом, катет, равный 11, может иметь только один пифагоров треугольник со сторонами (11, 60, 61).

К задаче 103. $a^2 = 144$. В данном случае возможны несколько разбиений и, соответственно, несколько пифагоровых троек:

$p = 72$, $q = 2$, тогда $c = 37$, $b = 35$;

$p = 36$, $q = 4$, тогда $c = 20$, $b = 16$,

$p = 18$, $q = 8$, тогда $c = 13$, $b = 5$,

$p = 24$, $q = 6$, тогда $c = 15$, $b = 9$.

Таким образом, четыре пифагоровых треугольника могут иметь катет, равный 12:

(12,35,37), (5,12,13), (9,12,15), (12,16,20).

Последний треугольник является подобным треугольнику (3, 4, 5).

К задаче 104. $a = 91 = 7\cdot 13$, $a^2 = 8281$. В данном случае возможны следующие разбиения этого числа:

$p = 8281$, $q = 1$, тогда $c = 4141$, $b = 4140$,

$p = 1183$, $q = 7$, тогда $c = 595$, $b = 588$,

$p = 49$, $q = 169$, тогда $c = 109$, $b = 49$,

$p = 637$, $q = 13$, тогда $c = 325$, $b = 312$.

Таким образом, четыре пифагоровых треугольника могут иметь катет, равный 91:

(91,4140,4141), (91, 588,595), (49,91,109), (91,312,325).

К задаче 105. Докажем, что одна из сторон треугольника делится на 3, одна (может быть та же) делится на 4 и одна делится на 5.

Делимость на 3: пусть нечетные стороны c и b не делятся на 3, иначе ничего доказывать не надо. Они могут быть записаны в виде:

$$c = 3m \pm 1 \quad \text{и} \quad b = 3n \pm 1\,; \quad a^2 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b).$$

Нетрудно видеть, что либо $c + b$, либо $c - b$ делятся на 3 и, следовательно, a также должно делиться на 3.

Делимость на 4: гипотенуза c и катет a нечетны и не делятся на 4. Тогда $c = 2m \pm 1, \quad a = 2n \pm 1$,

$$b^2 = c^2 - a^2 = 4\left(m^2 - n^2\right) \pm 4(m \pm n) = 4(m - n)(m \pm n \pm 1).$$

Одно из выражений в скобках четное и произведение $(m - n)(m \pm n \pm 1)$ делится на 2. Таким образом, правая часть анализируемого выражения для b^2 делится на 8. Но так как это есть полный квадрат, то b^2 должно делиться на 16, а b должно делиться на 4.

Делимость на 5. Заметим, что квадрат любого числа, которое не делится на 5, при делении на 5 дает в остатке либо +1, либо –1:

$$(5m \pm 1)^2 = 25m^2 \pm 10m + 1;$$

$$(5m \pm 2)^2 = 25m^2 \pm 20m + 4 = \left(25m^2 \pm 20m + 5\right) - 1.$$

Гипотенуза c и катет a нечетные числа, и допустим, что они не делятся на 5:

$c = 5m \pm 1, \quad a = 5n \pm 1 \quad$ или $\quad c = 5m \pm 2$ и $a = 5n \pm 2$.

Варианты $c = 5m \pm 1, \ a = 5n \pm 2$ и $c = 5m \pm 2, \ a = 5n \pm 1$ не подходят, так как остаток от деления $c^2 - a^2$ на 5 будет равен ± 2 или ± 3 и, следовательно, $c^2 - a^2$ не может быть полным квадратом.

Итак, если

$$c = 5m \pm 1, \ a = 5n \pm 1, \text{ то } b^2 = c^2 - a^2 = 25\left(m^2 - n^2\right) \pm 10(m \pm n),$$

если

$$c = 5m \pm 2, \quad a = 5n \pm 2, \text{ то } b^2 = c^2 - a^2 = 25\left(m^2 - n^2\right) \pm 20(m \pm n).$$

В обоих случаях b^2 делится на 5. Но так как это полный квадрат, то он обязан делиться на 25, а b должно делиться на 5. Таким образом, произведение abc должно делиться на 60.

Для заметок

Для заметок

Учебное издание

Генин Леонид Григорьевич

ЗАДАЧИ И ИХ РЕШЕНИЯ
ДЛЯ ЛЮБИТЕЛЕЙ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Пособие для учащихся старших классов и абитуриентов

Редактор издательства *М.П. Соколова*
Технический редактор *Т.А. Дворецкова*
Корректор *В.В. Сомова*
Компьютерная верстка *М.Н. Маркиной*

Подписано к печати 16.07.2014

Печать офсетная	Формат 60×84/16	Физ. печ. л. 4,0
Тираж 300 экз.	Изд. № 38	Заказ

ЗАО «Издательский дом МЭИ», 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14
тел/факс: (499) 551-77-37, адрес в Интернете: http://www.idmei.ru,
электронная почта: info@idmei.ru

Отпечатано в Академиздатцентре «Наука» РАН, 117864, Москва, ул. Профсоюзная, д. 90