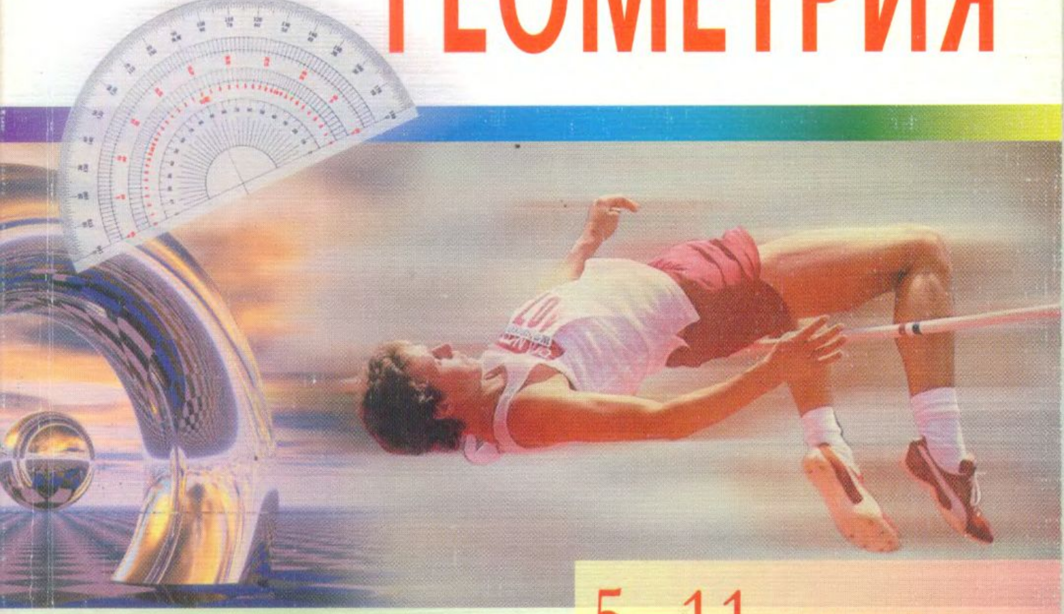
А. В. Фарков

Учимся решать олимпиадные задачи

ГЕОМЕТРИЯ



5–11 классы

А. В. Фарков

Учимся решать олимпиадные задачи

ГЕОМЕТРИЯ

5–11 классы

2-е издание

Москва
Айрис-пресс
200⁻

УДК [372.016:51](072)
ББК 74.200.58+22.1
Ф24

Серийное оформление *О. Е. Бауриной*

Фарков, А. В.

Ф24 Учимся решать олимпиадные задачи. Геометрия. 5–11 классы / А. В. Фарков. — 2-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2007. — 128 с.: ил. — (Школьные олимпиады).

ISBN 978-5-8112-2509-5

В предлагаемом пособии рассмотрены основные методы и приемы решения олимпиадных задач по геометрии. Представлена подборка почти 200 олимпиадных геометрических задач, многие из которых встречались на олимпиадах разного уровня.

Пособие предназначено для учащихся 5–11 классов, желающих самостоятельно познакомиться с основными приемами и методами решения олимпиадных задач по геометрии.

ББК 74.200.58+22.1
УДК [372.016:51](072)

ISBN 978-5-8112-2509-5

Введение

Олимпиадная задача по математике — это задача повышенной трудности, нестандартная как по формулировке, так и по методам решения. Среди олимпиадных задач встречаются как нетривиальные задачи, для решения которых требуются необычные идеи и специальные методы, так и задачи более стандартные, но которые можно решить оригинальным способом.

Олимпиадные задачи по математике встречаются иногда в контрольных работах по математике, их предлагают на разнообразных математических соревнованиях, и, конечно же, без них не обойтись на математических олимпиадах разного уровня.

Практически в каждой олимпиадной работе по математике встречается, как минимум, одна задача по геометрии. И именно геометрические олимпиадные задачи вызывают наибольшие трудности у учеников. При этом можно утверждать, что как раз геометрия лучше всего развивает нестандартное мышление и помогает выделить математически одаренных людей.

Геометрические олимпиадные задачи очень разнообразны. Это и задачи на разрезание, и на построение и нахождение углов. Но чаще всего встречаются задачи, которые используют в своем решении какую-то необычную идею, как правило, дополнительное построение.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся методы и приемы решения разнообразных типов олимпиадных задач по геометрии.

При этом больше внимания будем уделять задачам планиметрическим, а не стереометрическим. Дело в том, что планиметрические задачи на олимпиадах встречаются значительно чаще, и не только в 7–9 классах, но и в 10–11 классах. Конечно же, будут рассмотрены и типичные стереометрические задачи.

В 5–6 классах наиболее часто встречаются различные задачи на разрезания. Рассмотрим одну из наиболее трудных задач такого типа.

Задача 1. Разделите квадрат 5×5 клеток с вырезанной центральной клеткой на четыре равные части. Найдите как можно больше способов. Разрезать можно только по сторонам квадратов.

Решение. Так как всего в квадрате остается 24 клетки, а надо разделить исходную фигуру на четыре равные части, то каждая из частей будет содержать по 6 клеток. Рассмотрим, какие фигуры можно получить из 6 клеток (рис. 1).

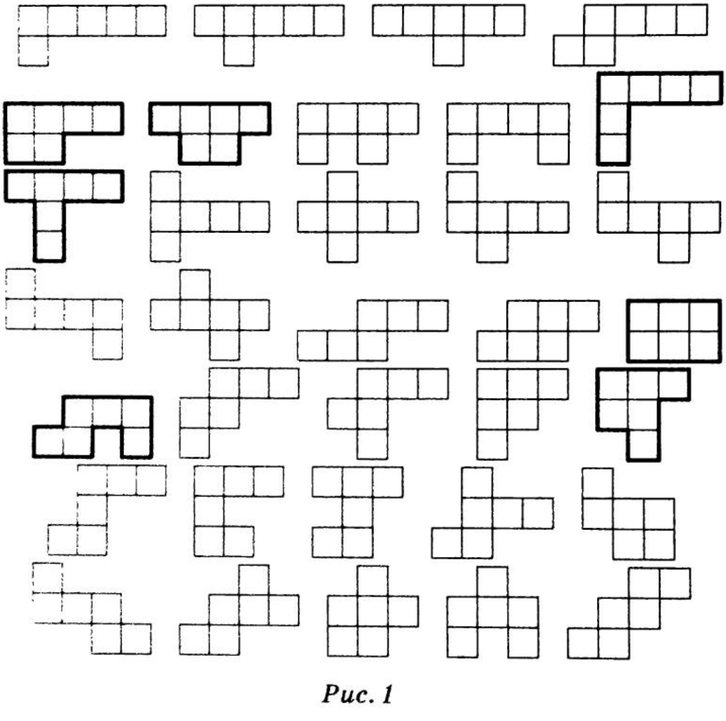


Рис. 1

Располагая по-разному выделенные нами фигуры в квадрате 5×5, получим следующие 7 способов (они показаны на рис. 2).

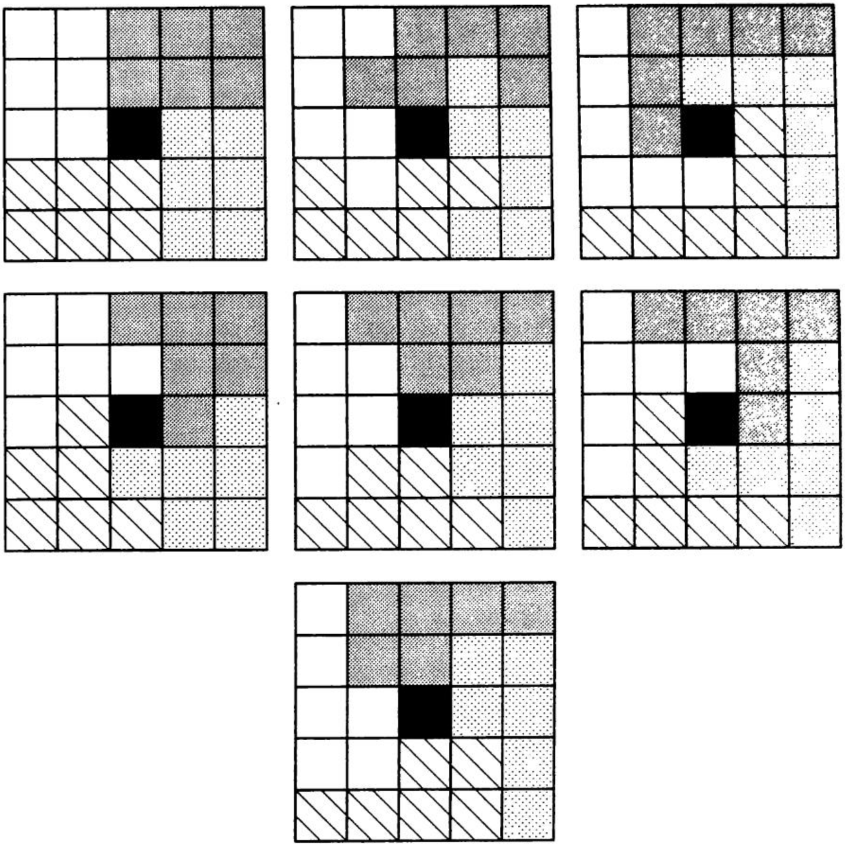


Рис. 2

Как видно, из 34 различных шестиклеточных фигур решение получилось только для семи из них (на рис. 1 они выделены). Сможете ли вы найти еще решения?

Иногда в 5–6 классах встречаются и задачи на подсчет числа фигур. Рассмотрим одну из таких задач.

Задача 2. Сколько треугольников изображено на рис. 3?

Решение. Подсчет треугольников начнем с тех треугольников, которые не разбиты на другие треугольники. Таких треуголь-

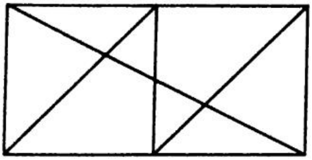


Рис. 3

ников будет по 3 в каждом квадрате, то есть 6. Теперь посчитаем число треугольников, состоящих из 2 треугольников. В каждом квадрате таких треугольников будет по 3, итого их 6. Теперь посчитаем число треугольников, состоящих из 3 фигур (2 треугольников и 1 четырехугольника), всего их будет 2. И наконец, подсчитаем число треугольников, содержащих по 4 фигуры: это будет 2 самых больших треугольника, получающихся от деления прямоугольника на 2 части. Таким образом, всего получается 16 треугольников.

Класс предлагаемых геометрических задач в 7–9 классах более разнообразен.

Прежде всего, это всевозможные задачи на построение углов.

Задача 3. Построить угол в 5°, если дан угол в 34°.

Решение. Данная задача имеет множество вариантов решения. Рассмотрим лишь некоторые.

Способ 1. Угол 34° можно отложить 5 раз, тогда получится угол 170°. Отняв эти 170° от величины развернутого угла, равного 180°, получим 10°, а разделив потом угол в 10° на 2 равных угла, получим угол в 5°.

Способ 2. Построим угол 30° (способ его построения основан на свойстве прямоугольного треугольника: если один из катетов прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против данного катета, равен 30°). Используя углы 34° и 30°, строим угол в 4°, который делим на 4 равные части. Таким образом, получаем угол 1°. С помощью углов 4° и 1° строим угол 5°.

Способ 3. Откладывая угол 34° четыре раза, получим угол 136°. А поскольку $136^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 1^\circ$, то, построив прямой угол и разделив его на 2 равные части, мы получим углы 90° и 45°. А отложив 5 раз угол в 1°, мы получим угол 5°.

Самостоятельно найдите еще несколько способов решения данной задачи.

В школьном курсе геометрии имеется много разнообразных задач на определение углов между некоторыми прямыми. На олимпиадах же чаще всего требуется найти угол, который составляют минутная и часовая стрелки в определенный момент времени.

Задача 4. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки часов в 8 ч 5 мин?

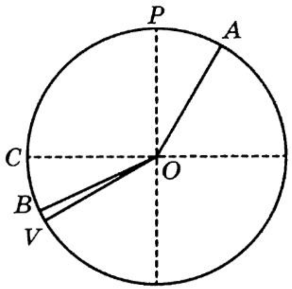


Рис. 4

Решение. Изобразим положения стрелок и обозначим соответствующие углы буквами (рис. 4). Здесь точки P, A, V, B, C соответствуют следующим положениям стрелок: P — 12 ч; A — положение конца минутной стрелки в 8 ч 5 мин; V — 8 ч; B — положение конца часовой стрелки в 8 ч 5 мин; C — 9 ч.

Угол, который нам надо найти, это угол AOB. Найдем его, как сумму углов AOP, POC и COB:

$$\angle POA = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 30^\circ, \qquad \angle POC = 90^\circ.$$

$$\angle BOC = \frac{11}{12}\angle VOC = \frac{11}{12} \cdot 30^\circ = 27{,}5^\circ.$$

Тогда искомый угол BOA будет равен сумме углов AOP, POC и COB, то есть 147,5°.

Как уже упоминалось, чаще всего на олимпиадах встречаются задачи, в которых необходимо выполнить некоторое дополнительное построение. Наиболее часто встречаются следующие дополнительные построения:

— построение некоторого отрезка с помощью соединения 2 данных точек;

— продолжение некоторого отрезка за один из его концов на расстояние, равное длине данного отрезка;

— проведение медианы, высоты, биссектрисы треугольника; средней линии треугольника, трапеции;

— построение перпендикуляра к прямой, проведение через точку прямой, параллельной другой прямой, и т. д.

Рассмотрим примеры задач, в которых встречаются данные дополнительные построения.

Задача 5. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки K — середина стороны BC, M — середина стороны CD, $AK = 6$, $AM = 3$, $\angle KAM = 60°$. Найдите длину стороны AD. Ответ обоснуйте.

Решение. Необходимо отметить, что данная задача имеет множество решений. Рассмотрим одно из них, наиболее оригинальное. Для этого выполним дополнительное построение: проведем в трапеции $AKCD$ среднюю линию ML (то есть соединим данную в условии задачи точку M с серединой одного из отрезков, также данных в условии задачи). Средняя линия трапеции будет параллельна основаниям трапеции AD и KC, причем $AL = 3$ см. Обозначим $AD = 2x$, тогда $KC = x$. Поскольку треугольник ALM — равнобедренный с углом при вершине $60°$, то он — равносторонний, поэтому $LM = 3$ см. А тогда, используя свойство средней линии трапеции, имеем:

$$\frac{2x + x}{2} = 3,$$

откуда $x = 2$, а значит, $AD = 4$ (рис. 5).

Задача 6. В треугольнике ABC проведены медианы AK и CM. Оказалось, что $\angle BAK = \angle BCM = 30°$. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

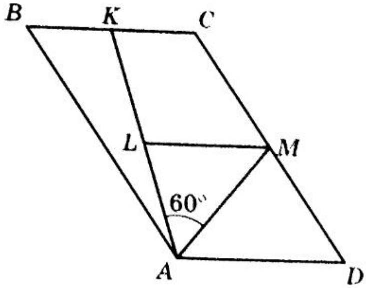


Рис. 5

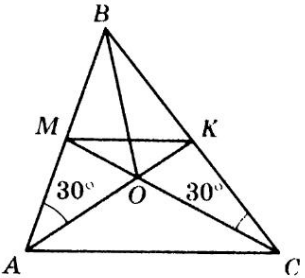


Рис. 6

Решение. Для решения данной задачи также выполним дополнительное построение, но при этом проведем уже не один, а два отрезка (рис. 6). С этой целью соединим точки M и K, B и O. Рассмотрим треугольники OKC и OMA, они будут подобны (по двум углам). По свойству медиан треугольника:

$$OC = \frac{2}{3}MC, \quad OM = \frac{2}{3}MC, \quad OA = \frac{2}{3}KA, \quad OK = \frac{1}{3}KA.$$

Так как AK и CM — медианы, то

$$AM = \frac{1}{2}AB, \quad KC = \frac{1}{2}BC.$$

Из подобия треугольников OKC и OMA следует, что

$$\frac{OK}{OM} = \frac{OC}{OA} = \frac{KC}{MA}.$$

Поскольку

$$OC = \frac{2}{3}MC, \quad OM = \frac{1}{3}MC, \quad OA = \frac{2}{3}KA, \quad OK = \frac{1}{3}KA,$$

то $MC = KA$. Тогда треугольник ABC будет равнобедренным.

Рассматривая треугольник MBC, получим по теореме синусов, что

$$\frac{MB}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin \angle CMB}.$$

Из данного равенства получим, что $\angle CMB = 90^\circ$, а значит, $\angle CBA = 60^\circ$, поэтому треугольник ABC является равносторонним.

Задача 7. На сторонах треугольника взяты соответственно точки D и E такие, что

$$\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = 2 \quad \text{и} \quad \angle ACB = 2\angle DEB.$$

Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный (рис. 7).

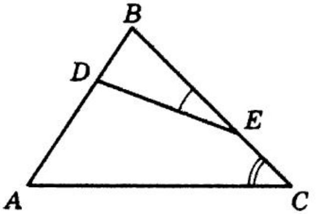


Рис. 7

Решение. Для решения данной задачи также выполним дополнительное построение: проведем CF — биссектрису угла C треугольника (рис. 8).

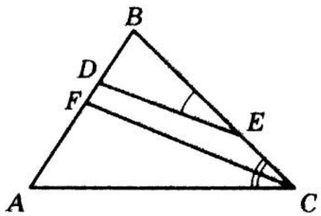


Рис. 8

Так как

$$\angle DEB = \frac{1}{2}\angle ACB = \angle FCB,$$

прямые ED и CF будут параллельны. По теореме Фалеса,

$$\frac{BF}{BD} = \frac{BC}{BE}.$$

Учитывая же, что по условию

$$\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = 2,$$

имеем

$$\frac{BF}{BD} = \frac{BC}{BE} = \frac{3}{2}.$$

Значит,

$$\frac{BF}{AB} = \frac{BF}{BD} \cdot \frac{BD}{AB} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2},$$

то есть CF является и медианой треугольника. А так как в треугольнике BCA прямая CF является биссектрисой и медианой, то треугольник будет равнобедренным, при этом $AC = BC$.

Сложность решения данной задачи заключается не только в том, что надо догадаться провести биссектрису треугольника, но и в том, что в ней используются факты: теорема Фалеса, признак равнобедренного треугольника, которые сформулированы в задачах.

Задача 8. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 9) углы при вершинах B и D — прямые, $AB = BC$, а высота BH равна 1 дм. Найдите площадь четырехугольника.

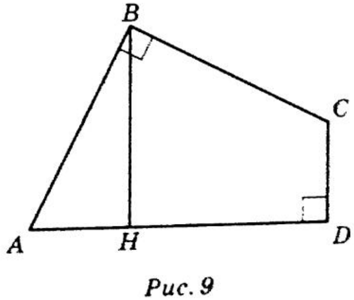


Рис. 9

Решение. Выполним дополнительное построение: проведем прямую BK, параллельную прямой AD, и продолжим отрезок DC за точку C. В результате получим два равных треугольника ABH и CBK (они прямоугольные, $AB = BC$, $\angle ABH = \angle CBK = 90^\circ - \angle HBC$), поэтому $BK = BH = 1$ дм. Тогда площадь четырехугольника $ABCD$ будет равна площади квадрата $HBKD$ со стороной 1 дм, то есть 1 дм^2 (рис. 10).

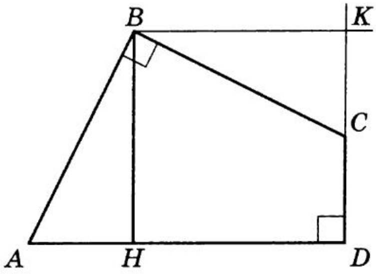


Рис. 10

В данной задаче для решения пришлось выполнить два дополнительных построения: проведение прямой, параллельной одной из данных в условии задачи, и продолжение отрезка за один из его концов.

Задача 9. Угол между диагоналями трапеции равен 120°. Одна из ее диагоналей равна 4, а высота трапеции равна 2. Найдите длину второй диагонали.

Решение. Для решения данной задачи выполним дополнительное построение: проведем прямую CK, параллельную диагонали BD. Рассмотрим $\triangle ACK$. В нем CH — высота, $AC = 4$. Рассмотрим 2 случая: $\angle AOD = 120^\circ$ и $\angle AOB = 120^\circ$ (рис. 11).

1) $\angle AOD = 120^\circ$ (этот случай и представлен на рисунке). Так как $CH = 2$, то $\angle CAH = 30^\circ$, поэтому $\angle ACH = 60^\circ$, значит, CH — биссектриса. А так как, по условию, CH — высота, то $\triangle ACK$ будет равнобедренным, значит, $AC = KC$, а значит, $BD = 4$.

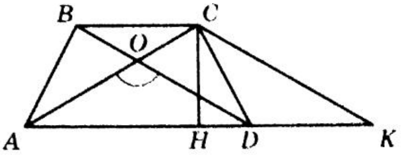


Рис. 11

2) $\angle AOB = 120°$. Тогда $\angle AOD = 60°$. Тогда CK совпадет при этом же построении с CH. Тогда вторая диагональ $BD = CH = 2$.

Иногда решить олимпиадную задачу по геометрии позволяет применение необычной идеи: решение задачи с конца, применяя также дополнительное построение.

Задача 10. Точку внутри квадрата соединили с вершинами получились четыре треугольника, один из которых – равнобедренный, с углами при основании $15°$. Докажите, что противоположный ему треугольник правильный.

Решение. Пусть $ABCD$ — квадрат, M — точка внутри него. А $\angle MDC = \angle MCD = 15°$. Решим обратную задачу. Построим на стороне AB квадрата равносторонний треугольник ABN так, что вершина N лежит внутри квадрата, как показано на рисунке. Тогда $\triangle CNB$ — равнобедренный с вершиной B. Его угол при вершине будет равен $30°$, следовательно, угол при основании будет равен $(180° - 30°) : 2 = 75°$. Отсюда $\angle DCN = 90° - 75° = 15°$. Аналогично получаем $\angle CDN = 15°$. По условию $\angle DCM = \angle CDM = 15°$. Значит, точка N лежит на луче CM и на луче DM и, следовательно, совпадает с M (рис. 12).

Проблемы в решении некоторых олимпиадных задач возникают из-за незнания некоторых фактов, которые изучаются не в геометрии. Рассмотрим одну из таких задач, которая стала «камнем преткновения» для многих участников олимпиад отнюдь не из-за проблем с геометрией.

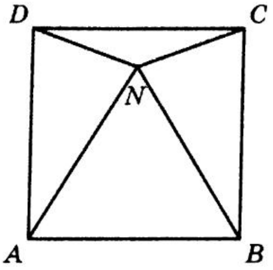


Рис. 12

Задача 11. На сторонах AD и CD квадрата $ABCD$ со стороной 3 взяты две точки M и N так, что $MD + DN = 3$. Прямые BM и CD пересекаются в точке E. Найти длину отрезка NE, если $ME = 4$.

Данная задача вызывает у учащихся на олимпиадах большие проблемы, поскольку в случае ее решения «в лоб» получается уравнение третьей степени, корнями которого не являются рациональные числа. Рассмотрим менее стандартное решение данной задачи.

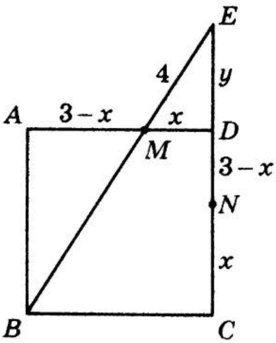


Рис. 13

Решение. Обозначив $MD = x$, $DE = y$ (рис. 13), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 3y + xy = 0, \\ x^2 + y^2 = 16. \end{cases}$$

Первое уравнение получаем, учитывая, что площадь треугольника BEC равна сумме площадей треугольника MED и трапеции $BMDC$; а второе уравнение получаем, применяя теорему Пифагора к треугольнику MED. В дальнейшем, если будем выражать одну из переменных через другую из первого уравнения и применять метод подстановки, мы придем к уравнению четвертой степени, корни которого будут иррациональными, и найти их, используя школьные знания, невозможно. Как же поступить?

Между тем, введя новые переменные:

$$\begin{cases} u = y - x, \\ 3v = xy; \end{cases}$$

можно получить систему уравнений:

$$\begin{cases} -3u + 3v = 0, \\ u^2 + 6v = 16. \end{cases}$$

Решением последней системы будут $u = 2$; $v = 2$. Тогда $x = \sqrt{7} - 1$; $y = 1 + \sqrt{7}$. Так как $NE = ND + DE = 3 - x + y$, то $NE = 5$.

При решении некоторых олимпиадных задач по геометрии применяются и специальные методы, которые позволяют найти изящное решение задачи. К одному из таких методов решения относится *метод вспомогательной окружности*. Рассмотрим суть данного метода на примере решения следующей задачи.

Задача 12. В $\triangle ABC$ дана биссектриса l_a и даны стороны $CA = b$, $AB = c$. Доказать, что $l_a < \sqrt{bc}$.

Решение. Рассмотрим вспомогательную окружность, описанную около треугольника ABC (рис. 14). Продолжив биссектрису AD до пересечения с окружностью в точке A_1, получим треугольник ACA_1. Этот треугольник подобен треугольнику ADB (по двум углам). Из подобия треугольников следует, что

$$\frac{b}{l_a} = \frac{l_a + DA_1}{c}.$$

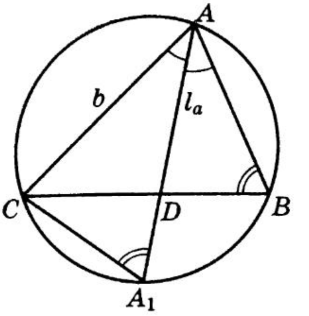


Рис. 14

А из данного равенства имеем:

$$bc = l_a^2 + l_a \cdot DA_1 > l_a^2,$$

откуда $l_a < \sqrt{bc}$.

При решении олимпиадных задач по геометрии применяется и *метод замены фигуры*. Суть метода состоит в том, что фигура, о которой идет речь в задаче, заменяется другой фигурой, но с той же искомой величиной. При этом новая фигура выбирается таким образом, чтобы искомую величину найти было легче. Наиболее часто отрезок заменяется на отрезок, ломаная — на другую ломаную, треугольник — на треугольник и т. д.

Рассмотрим применение данного метода на следующей задаче.

Задача 13. В угол вписать треугольник наименьшего периметра с вершиной в заданной точке M этого угла.

Решение. Пусть треугольник MXY вписан в угол AOB (рис. 15). Заменим ломаную $MXYM$ ломаной $M'XYM''$, где M' и M'' симметричные точки точке M относительно прямых OA и OB.

Тогда минимальная длина ломаной $MXYM$ будет равна минимальной длине ломаной $M'XYM''$, а это будет длина ломаной $M'NKM''$ или длине отрезка $M'M''$. А так как $M'N = MN$, $M''K = MK$, то треугольник MNK является искомым.

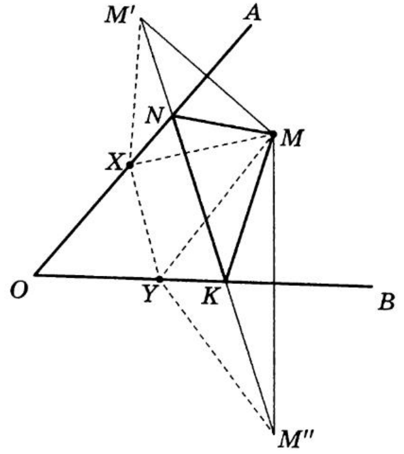


Рис. 15

Иногда найти решение той или иной задачи позволяет необычная идея.

Задача 14. Внутри треугольника взято n различных точек. Они соединяются между собой и с вершинами треугольника так, что никакие два отрезка не имеют общих внутренних точек. Доказать, что число полученных отрезков не зависит от расположения точек, и найти это число.

Решение. Данную задачу можно решить с помощью метода математической индукции. А можно и иначе. Для начала определим число получившихся отрезков, причем определим их не совсем обычно: исходя из количества треугольников, образованных этими отрезками, а число треугольников — через сумму углов всех треугольников.

Исходный треугольник разбивается указанными n точками на треугольники. Сумма всех углов получившихся треугольников равняется сумме $n \cdot 360^\circ$ (углы, образованные при n точках) и 180° (сумма углов данного треугольника). Тогда число треугольников будет равно

$$\frac{360^\circ \cdot n + 180^\circ}{180^\circ} = 2n + 1.$$

Так как каждый треугольник образуется тремя отрезками, то число сторон у этих треугольников будет $3 \cdot (2n + 1)$. Но в это число сторон треугольников вошли три стороны исходного треугольника. Вычитая их, получим $6n + 3 - 3 = 6n$. Но поскольку каждый из отрезков является стороной двух треугольников, то всего отрезков будет $3n$. А это выражение не зависит от выбора точек внутри исходного треугольника.

При решении стереометрических задач, а они, как уже отмечалось, все же встречаются на олимпиадах достаточно редко, найти оригинальное решение также часто позволяют необычные идеи.

Задача 15. Все плоские углы при вершине треугольной пирамиды являются прямыми. Боковые ребра равны 5 см, 6 см, 7 см. Найти объем пирамиды.

Решение. Короткое и оригинальное решение данной задачи получится после того, как мы перевернем пирамиду, сделав ее основанием одну из боковых граней, являющуюся прямоугольным треугольником. Тогда высотой окажется третье боковое ребро. В данном случае:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 35 \text{ см}^2.$$

Хотя задача является не очень сложной, но многие учащиеся не могли с ней справиться, поскольку решали ее традиционно: нашли сначала площадь основания (по теореме Герона), а затем у них возникли проблемы с нахождением высоты. А вот применение идеи с переворачиванием тела позволяет решить задачу очень легко.

И в заключение рассмотрим решение еще нескольких стереометрических задач.

Задача 16. На плоскости лежат 4 шара радиуса R, причем 2 из них касаются двух других шаров и 2 шара касаются трех других шаров. На эти шары сверху положены 2 шара меньшего радиуса r, касающиеся друг друга, причем каждый из них касается трех больших шаров. Найдите радиусы маленьких шаров.

Решение. Рассмотрим проекции всех 6 шаров на плоскость, на которой лежат большие шары. При этом центры больших шаров проецируются в точки A, B, C, D касания шаров с плоскостью. При этом $AB = BC = DA = BD = 2R$ (рис. 16). Тогда $ABCD$ будет ромбом, и одна из диагоналей ромба равна $2R$. Проекции малых шаров — окружности, вписанные в равносторонние треугольники ABD и ACD со сторонами $2R$. Значит,

$$r = \frac{1}{3}\frac{2R\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

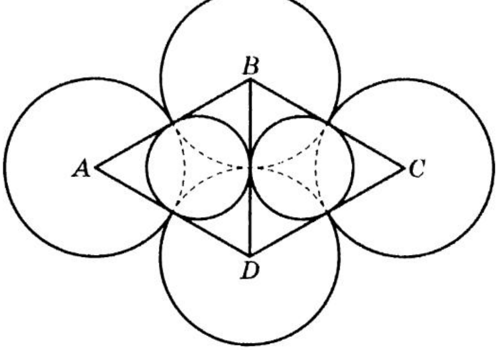


Рис. 16

Задача 17. Разбейте куб на 6 равных пирамид.

Решение. Разбиваем сначала куб на 3 равные четырехугольные пирамиды: $ABCDB_1$, $AA_1D_1DB_1$, $CC_1D_1DB_1$ (рис. 17). Равенство пирамид доказывается совмещением. Затем каждую из четырехугольных пирамид разбиваем на 2 тетраэдра, проведя диагонали в основаниях. Все пирамиды будут равны, так как основания у всех — равные прямоугольные равнобедренные треугольники, катеты равны ребру куба, боковые ребра перпендикулярны основанию.

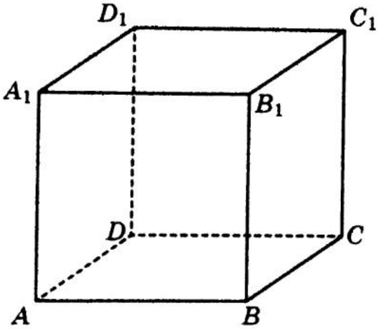


Рис. 17

Это, конечно, не все методы, которые применяются при решении геометрических задач. Иногда геометрические задачи решаются с применением принципа Дирихле, метода инвариантов и других специальных методов решения олимпиадных задач, независимо от того, какая это задача: из алгебры (сюжетная) или из геометрии. Но это уже отдельная тема для разговора.

Задачи для самостоятельного решения

В предложенной подборке олимпиадные геометрические задачи разбиты по классам, учащимся которых рекомендуется их решать. Хотя сегодня, при чрезмерном разнообразии учебников, один и тот же материал может изучаться и в предыдущем, и в последующем классе. Распределяя задачи по классам, мы в большей степени ориентировались на учебники «Математика-5 (6)» авторов Н. Я. Виленкина и др., «Геометрия 7–9 (10–11)» авторов Л. С. Атанасяна и др. Но если рассматривать учебную программу, предлагаемую прочими учебниками, задачи можно отнести и к другим классам. Кроме того, при решении задачи другим методом или способом ее можно рассмотреть соответственно в классе раньше или позже. Задача помещалась в раздел для того или иного класса, в зависимости от того, какие знания и умения применялись при ее решении.

Преимущественно предложены задачи на материал, относящийся к 5 классу, а также к 7–8 классам. Объясняется это тем, что материал, рассматриваемый в данных классах, чаще встречаются на олимпиадах.

Так как традиционные математические олимпиады проводятся чаще всего в середине учебного года, а в текстах олимпиад встречается материал, изучаемый как в первом полугодии этого учебного года, так и во втором полугодии прошлого учебного года, то для лучшей подготовки к олимпиадам советуем повторить и решение задач для младших классов.

5 класс

5.1. Рост Буратино 1 метр, а длина его носа раньше была 9 сантиметров. Каждый раз, когда Буратино врал, длина его носа удваивалась. Как только нос стал длиннее самого Буратино, тот врать прекратил. Сколько раз Буратино соврал?

5.2. Прямоугольник разрезали по ломаной линии, состоящей из трех равных отрезков. Начало разреза в точке A (рис. 18). Получили две равные фигуры. Как это сделали?

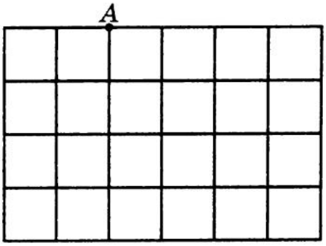


Рис. 18

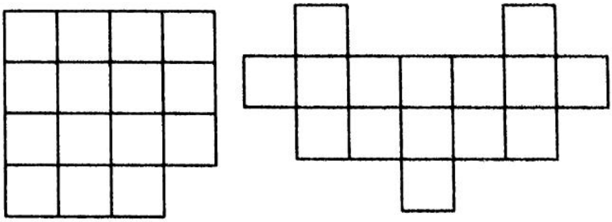
5.3. Как разрезать квадрат 4×4 прямыми линиями так, чтобы из полученных частей можно было составить 32 равных квадрата? Не разрешается оставлять неиспользованные части, а также накладывать их друг на друга.

5.4. Разрежьте квадрат 5×5 на 5 прямоугольников таким образом, чтобы у соседних прямоугольников стороны не совпадали. При этом 4 прямоугольника были бы равны, а пятый являлся квадратом. Найдите все решения.

5.5. Как разрезать квадрат 5×5 на 7 прямоугольников, среди которых нет одинаковых?

5.6. Разрежьте квадрат 5×5 на 10 одинаковых четырехугольников, не являющихся прямоугольниками.

5.7. Разрежьте каждую из фигур на три равные части (рис. 19). Резать можно только по сторонам клеточек. Части должны быть равными и по площади, и по форме.



а б

Рис. 19

5.8. Разрежьте фигуру на 2 равные части (рис. 20).

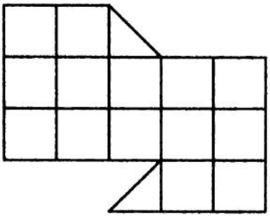
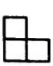
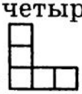


Рис. 20

5.9. Разрежьте фигуру, полученную из квадрата 7×7 вырезанием четырех угловых клеток 1×1 (рис. 21), на уголки вида  и  (уголки состоят из квадратиков размера 1×1) так, чтобы квадратики, отмеченные на рисунке, оказались только в больших уголках.

5.10. Фигура, изображенная на рис. 22, состоит из 7 одинаковых квадратов. Ее периметр равен 16. Найдите площадь фигуры.

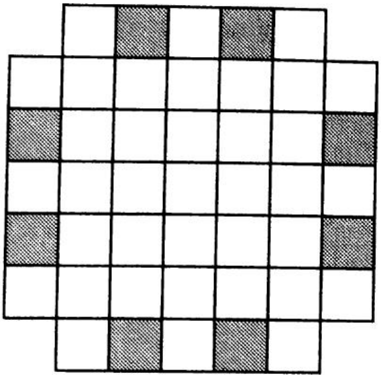


Рис. 21

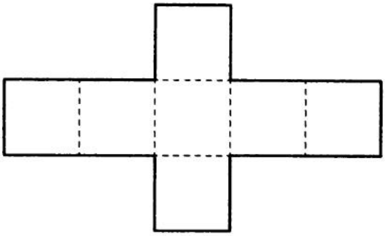


Рис. 22

5.11. Прямоугольник разбит на четыре маленьких прямоугольника. Площади трех из них известны: 3, 4, 5 (рис. 23). Найдите площадь четвертого прямоугольника.

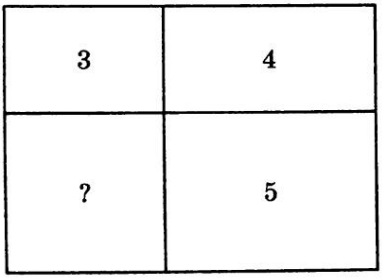


Рис. 23

5.12. На рис. 24 изображено 13 точек. Сколько квадратов с вершинами в этих точках можно нарисовать? (Точки располагаются в вершинах квадратиков со стороной 1).

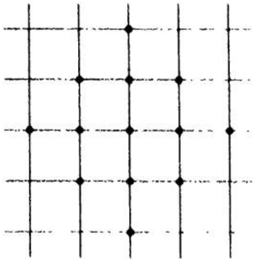


Рис. 24

5.13. Из 26 спичек длиной по 5 см сложили прямоугольник наибольшей площади. Чему равна его площадь?

5.14. У Коли есть фанерный прямоугольник со сторонами 3 см и 5 см и карандаш. Разрешается прикладывать прямоугольник к бумаге и обводить его (полностью или частично) карандашом. Любые другие действия (например, делать пометки на фанере) запрещены. Как Коле, не нарушая запрета, нарисовать квадрат со стороной 1 см? Опишите, что он должен делать и в каком порядке.

5.15. Прямоугольный параллелепипед покрасили со всех сторон и разрезали на 24 единичных кубика. У 12 кубиков оказались покрашены по 2 грани. Каковы размеры параллелепипеда?

5.16. Коробка из-под игрушки имеет форму параллелепипеда. Площадь верхней ее грани равна 6 дм^2, площадь передней грани — 2,5 дм^2, площадь боковой грани — 2,4 дм^2. Найдите объем коробки.

5.17. Из 18 одинаковых кубиков сложили прямоугольный параллелепипед высотой в три кубика. Найдите площадь поверхности параллелепипеда, если площадь поверхности одного кубика равна 19 см^2.

5.18. Как разделить круг тремя прямыми на 4, 5, 6, 7 частей?

5.19. Разбейте квадрат на 5 треугольников таким образом, чтобы площадь одного из них равнялась сумме площадей остальных треугольников.

5.20. Тетрадный лист бумаги сложили пополам 5 раз, каждый раз меняя направление сгиба. Затем отрезали от полученного прямоугольника 4 угла и лист развернули. Сколько дырок внутри листа оказалось?

5.21. Расположите изображенные на рис. 25 два острых угла таким образом, чтобы образовались четыре тупых угла.

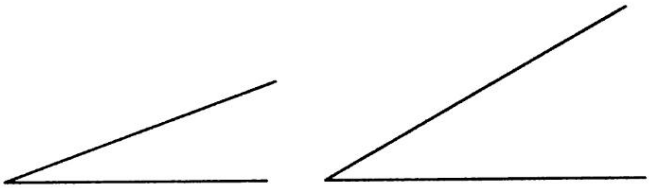


Рис. 25

5.22. Расположите четыре прямые таким образом, чтобы образовалось 16 прямых углов.

5.23. Сколько треугольников на рис. 26?

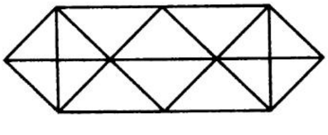


Рис. 26

5.24. Изображенные на рис. 27 фигуры 1, 2, 3 и 4 являются квадратами. При этом периметр первой фигуры равен 16 см, периметр второй — 24 см. Найдите периметр фигуры 4.

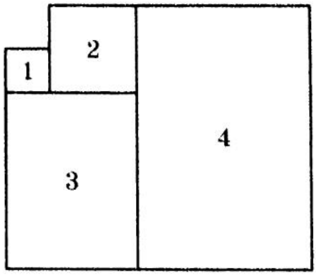


Рис. 27

5.25. Сколько различных по величине углов изображено на рис. 28?

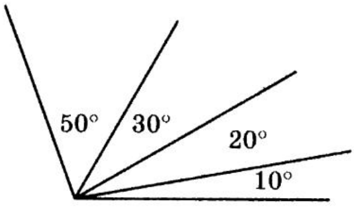


Рис. 28

5.26. Диагональ делит четырехугольник с периметром 26 см на два треугольника с периметрами 22 см и 18 см. Найдите длину этой диагонали.

5.27. Прямоугольник состоит из двух одинаковых квадратов, имеющих общую сторону. Его периметр равен 18 см. Найдите площадь прямоугольника.

5.28. Сколько треугольников на рис. 29?

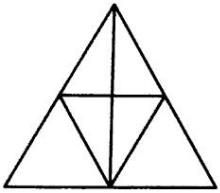


Рис. 29

5.29. От каждой вершины деревянного куба отпилили по одинаковому кусочку так, что место спила имеет форму треугольника. Сколько вершин и сколько ребер у получившегося тела?

5.30. Разрежьте прямоугольник на 3 треугольника таким образом, чтобы среди полученных треугольников лишь 1 был прямоугольный.

5.31. Оконная рама представляет собой прямоугольник $ABCD$, разбитый на три меньших равных между собой прямоугольника (рис. 30). Известно, что периметр прямоугольника $ABCD$ равен 6 м. Найдите длину внутренней T-образной части.

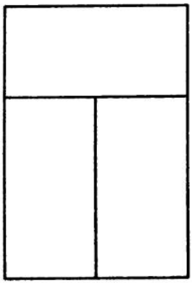


Рис. 30

5.32. Разрежьте квадрат на три части, из которых можно было бы сложить треугольник с тремя острыми углами и различными сторонами.

6 класс

6.1. Длина ребра куба — 0,5 м. Этот куб разрезали на кубики, длина ребра каждого из которых равна 2 мм. Затем кубики уложили в один сплошной ряд. Чему равна его длина?

6.2. Участок, засаженный клубникой, имеет форму прямоугольника, длина которого в 3 раза больше ширины. Участок окружен оградой, которая отстоит от сторон участка на 2 м. Площадь, ограниченная оградой, на 128 м^2 больше площади самого участка. Определите длину ограды.

6.3. Можно ли из фигурок, изображенных на рис. 31, сложить квадрат? Фигурки можно брать в неограниченном количестве.

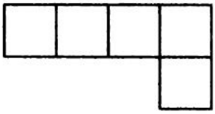


Рис. 31

6.4. На рис. 32 имеется квадрат со стороной 1. Из двух противоположных вершин квадрата проведено две дуги так, как показано на рисунке. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

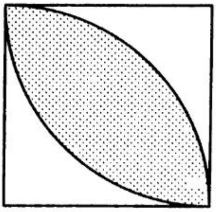


Рис. 32

6.5. На каждой стороне квадрата со стороной 1 построено по полуокружности, как показано на рис. 33. Найдите площадь заштрихованной части (четырех лепестков).

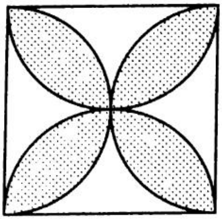


Рис. 33

6.6. С центром в вершинах квадрата проведено 4 дуги. Также проведена окружность с центром в середине квадрата. Найдите площадь заштрихованной фигуры на рис. 34, если сторона квадрата равна 1.

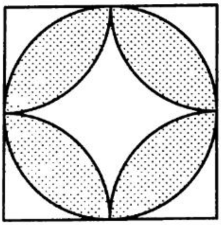


Рис. 34

7 класс

7.1. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки в 15 ч 30 мин?

7.2. Найдите угол между часовой и минутной стрелкой в 12 ч 20 мин.

7.3. Найдите угол между часовой и минутной стрелкой, если часы показывают 12 ч 35 мин.

7.4. Найдите угол между часовой и минутной стрелкой в 7 ч 38 мин.

7.5. Узнайте, через сколько минут после того, как часы показали ровно 4 ч, минутная стрелка догонит часовую.

7.6. Стрелки часов только что совпали. Через сколько минут они будут смотреть в противоположные стороны?

7.7. Сейчас угол между часовой и минутной стрелками настенных часов прямой. Чему может быть равен угол между этими стрелками через полчаса?

7.8. На сторонах AB, BC и AC равностороннего треугольника ABC взяты соответственно точки D, E, F, так что $AD = BE = CF$. Каков вид треугольника DEF? Докажите.

7.9. Через точку В проведены четыре прямые так, что $AB \perp BD$, $BE \perp BC$, и проведена прямая AC, пересекающая данные прямые так, что $AB = BC$. Прямая AC пересекает прямую BD в точке D. Прямая AC пересекает BE в точке E. Докажите, что $\triangle ABE = \triangle BCD$.

7.10. Дан угол в $13°$. Как получить угол в $11°$?

7.11. Дан угол в $37°$. Постройте циркулем угол в $3°$.

7.12. Как с помощью циркуля и линейки разделить угол величиной в $19°$ на 19 равных частей?

7.13. Из точки O на плоскости выходят два луча. Как проверить, используя только циркуль, равен ли угол между ними $108°$?

7.14. В треугольнике ABC биссектрисы углов BAC и ABC пересекаются в точке O. Найдите угол ACB, если угол AOB равен $125°$.

7.15. Разделите треугольник с углами 15°, 105° и 60° на три равнобедренных треугольника.

7.16. Какой треугольник надо взять, чтобы после проведения в нем одного отрезка получить все известные виды треугольников: равносторонний, равнобедренный, разносторонний, прямоугольный, остроугольный, тупоугольный?

7.17. Треугольник ABC является прямоугольным с гипотенузой AB. На прямой AB по обе стороны от гипотенузы отложены отрезки $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол KCM.

7.18. У звезды $ACEBD$ равны углы при вершинах A и B, углы при вершинах E и C, а также длины отрезков AC и BE (рис. 35). Докажите, что $AD = BD$.

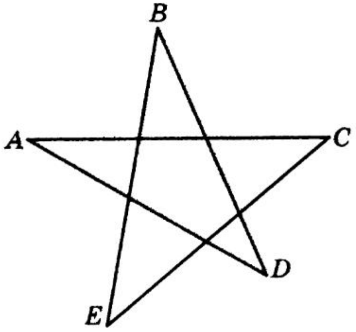


Рис. 35

7.19. Какие треугольники можно разрезать на два равнобедренных треугольника?

7.20. В равностороннем треугольнике ABC с длиной стороны a точки M, N, P, Q, O расположены так, что N лежит на стороне AB, Q — на стороне BC, а M и P — на стороне AC. При этом O является точкой пересечения отрезков NP и MQ. Известно, что $MA + AN = PC + CQ = a$. Найдите величину угла NOQ.

7.21. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 32°. Найдите угол между основанием этого треугольника и высотой треугольника, проведенной из вершины угла при основании.

7.22. Угол между двумя высотами остроугольного треугольника ABC равен 60°, и точка пересечения высот делит одну из них в отношении $2 : 1$, считая от вершины треугольника. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

7.23. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°. Докажите, что отрезок перпендикуляра, проведенного к гипотенузе через ее середину до пересечения с катетом, втрое меньше большего катета.

7.24. Разделите угол 90° на три равные части с помощью циркуля и линейки.

7.25. Дан угол 63°. С помощью циркуля и линейки разделите его
1) на 3 равные части;
2) на 7 равных частей.

8 класс

8.1. Малыш и Карлсон разделили круглый торт двумя перпендикулярными разрезами на 4 части. Карлсон взял себе одну наименьшую часть и одну наибольшую часть, а остальные две отдал Малышу. Кому торта досталось не меньше половины?

8.2. Существует ли выпуклый 2007-угольник, все углы которого выражаются целым числом градусов.

8.3. Расстояние между серединами сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ равно расстоянию между серединами его диагоналей. Найдите угол, образуемый прямыми BC и AD при их пересечении.

8.4. В треугольнике ABC точка D делит сторону BC в отношении $BD : DC = 1 : 3$, а точка O делит AD в отношении $AO : OD = 5 : 2$. В каком отношении прямая BO делит отрезок AC?

8.5. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, выходящих из той же вершины.

8.6. На реке расположено два острова A и B. Туристы, отправившись от острова A, желают попасть на остров B, побывав поочередно на обоих берегах реки. Как они должны проложить маршрут, чтобы путь имел бы наименьшую длину (берега реки считать параллельными прямыми линиями, а острова A и B — точками)?

8.7. В результате измерения четырех сторон и одной из диагоналей некоторого четырехугольника получились числа 2; 4; 5,5; 10; 15. Чему равна длина измеренной диагонали?

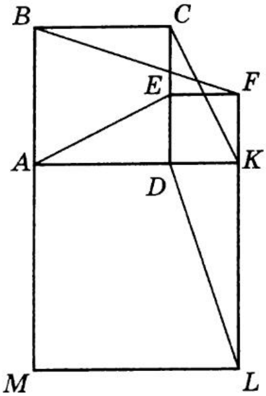


Рис. 36

8.8. Квадрат $ABCD$ со стороной 2 см и квадрат $DEFK$ со стороной 1 см стоят рядом на верхней F стороне AK квадрата $AKLM$ со стороной 3 см. Между парами точек A и E, B и F, C и K, D и L натянуты паутинки. Паук поднимается снизу вверх по маршруту $AEFB$ и спускается по маршруту $CKDL$ (рис. 36). Какой маршрут короче?

8.9. В квадрате $ABCD$ проведены отрезки CE и CF, где E — середина AB, F — середина AD (рис. 37). Докажите, что CE и CF делят BD на три равные части.

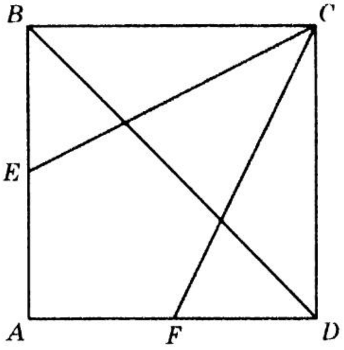


Рис. 37

8.10. Разрежьте прямоугольник 1×5 на 5 частей, из которых можно сложить квадрат.

8.11. Как циркулем определить, является ли прямоугольником пластина, имеющая форму четырехугольника?

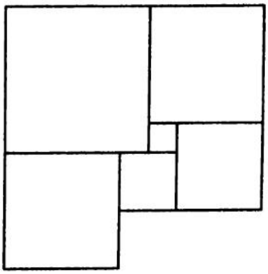


Рис. 38

8.12. Фигура на рис. 38 состоит из одних квадратов. Найдите сторону левого нижнего, если сторона самого маленького равна 1.

8.13. Диагональ AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ делится другой диагональю пополам. Известно, что $\angle ADB = 2\angle CBD$. На диагонали BD нашлась такая точка K что, $CK = KD + AD$ (рис. 39). Докажите, что $\angle BKC = 2\angle ABD$.

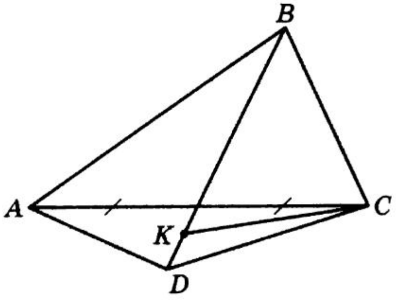


Рис. 39

8.14. Докажите, что в трапеции разность боковых сторон меньше разности оснований.

8.15. В прямоугольный треугольник вписать прямоугольник с вершиной в вершине прямого угла и наименьшей диагональю.

8.16. E и F — середины сторон BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что отрезок EF делит диагонали AC и BD в одном и том же отношении.

8.17. Вершина A квадрата $ABCD$ соединена прямой с некоторой точкой M, лежащей на стороне CD, при этом $AM = 5$ см. Биссектриса AE угла BAM пересекает сторону BC в точке E. Определите сумму отрезков DM и BE.

8.18. На доске был нарисован параллелограмм $ABCD$ и отмечены середина E стороны AB и середина F стороны CD. Дежурный стер параллелограмм, но оставил точки A, E, F. Как по этим точкам восстановить параллелограмм?

8.19. В некоторой трапеции длина одной из диагоналей равна сумме длин оснований трапеции, а угол между диагоналями равен $60°$. Докажите, что эта трапеция равнобокая.

8.20. Равнобокая трапеция $ABCD$ разбивается диагональю AC на два равнобедренных треугольника. Определите углы трапеции.

8.21. На неограниченной клетчатой бумаге нарисован отрезок с концами в узлах сетки. Как с помощью одной только линейки разделить отрезок на 11 равных частей?

8.22. Можно ли разделить равносторонний треугольник на 2008 равносторонних треугольников? Если да, то как? Если нет — то почему?

8.23. Равнобокая трапеция с длинами оснований 1 см и 2 см и боковой стороной длиной в 1 см разбита на четыре одинаковые фигуры (рис. 40). В результате верхнее основание разделилось на четыре отрезка. Найдите отношение длины большего отрезка к меньшему.

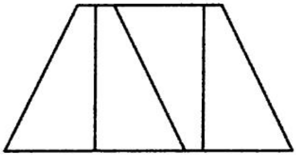


Рис. 40

8.24. На медиане BM треугольника ABC взята произвольная точка D. Через точку D проведена прямая, параллельная стороне AB, а через вершину C — прямая, параллельная медиане BM. Эти две прямые пересекаются в точке E. Докажите, что $AB = DE$.

8.25. Выпуклый бумажный четырехугольник разрезали на четыре части по отрезкам, соединяющим середины противоположных сторон. Докажите, что из этих частей можно сложить параллелограмм.

8.26. Хорда удалена от центра окружности на расстояние h. В каждый из двух сегментов круга, стягиваемый этой хордой, вписано по квадрату так, что пара соседних вершин каждого квадрата лежит на хорде, а другая пара соседних вершин — на соответствующей дуге окружности. Найдите разность длин сторон квадратов.

8.27. На диагонали прямоугольника выбрали точку и провели через нее прямые, параллельные сторонам. По разные стороны от диагонали образовались два прямоугольника. Докажите, что их площади равны.

8.28. Когда у прямоугольника площадью 144 см^2 одну из сторон удлинили на 1 см, а другую — укоротили на 1 см, его площадь уменьшилась на 1 см. Какими могли быть стороны исходного прямоугольника? Укажите все возможности.

8.29. Точка M внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ расположена так, что площади треугольников ABM, BCM, CDM и LMA равны. Верно ли, что $ABCD$ — параллелограмм, а M — точка пересечения его диагоналей?

8.30. На одной из сторон треугольника дана точка. Провести через эту точку прямую так, чтобы она разделила площадь треугольника на 2 равные части.

8.31. Парус имеет вид четырехугольника $ABCD$, углы A, C и D которого равны 45° (рис. 41). Найдите площадь паруса, если $BD = 4$ м.

8.32. Каждая сторона одного треугольника больше каждой стороны другого треугольника. Верно ли, что площадь первого обязательно больше площади второго?

8.33. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его площадь пополам. В каком отношении она делит боковые стороны треугольника?

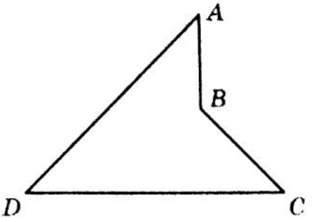


Рис. 41

8.34. Прямоугольный лист бумаги разрезали на три треугольных куска. Площадь одного из них равна половине суммы площадей других кусков. Как относятся площади полученных кусков?

8.35. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, точка E — середина стороны CD. Докажите, что если площадь треугольника ABE равна половине площади четырехугольника $ABCD$, то AD параллельна BC.

8.36. Две противоположные стороны AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ лежат на перпендикулярных прямых. Расстояние между серединами сторон BC и AD равно 8 см. Найдите расстояние между серединами диагоналей AC и BD.

8.37. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ дано: E — середина CD, F — середина AD, K — точка пересечения AC и BE. Докажите, что площадь треугольника BKF в два раза меньше площади треугольника ABC.

8.38. Дан разносторонний прямоугольный треугольник ABC. Сколько треугольников, подобных треугольнику ABC, можно получить, проводя различные прямые внутри треугольника через точку E, лежащую на меньшем катете?

8.39. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса острого угла B, которая пересекла катет AC в точке L. На отрезках CL и LA как на сторонах построили два квадрата. Найдите отношение площадей этих квадратов.

8.40. Площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, в два раза больше площади прямоугольного треугольника. Найдите острые углы прямоугольного треугольника.

8.41. Пусть a и b — катеты прямоугольного треугольника, а c — гипотенуза. Что больше: $a^3 + b^3$ или c^3?

8.42. Вершину A прямоугольника $ABCD$ соединили с серединами сторон BC и CD. Может ли один из этих отрезков оказаться вдвое длиннее другого?

8.43. Можно ли равносторонний треугольник со стороной 9 см разрезать на два треугольника, периметры которых равны 20 см и 23 см?

8.44. Точка D — середина стороны AC треугольника ABC, DE и DF — биссектрисы треугольников ABD и CBD. Отрезки BD и EF пересекаются в точке M. Докажите, что $DM = EF$.

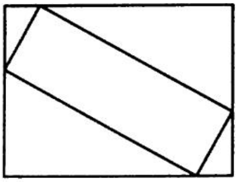


Рис. 42

8.45. В прямоугольник со сторонами 3 и 4 м вписан прямоугольник (рис. 42), стороны которого относятся как $1 : 3$. Найдите стороны вписанного прямоугольника.

8.46. Две противоположные вершины прямоугольника с длинами сторон a и b совмещены. Найдите длину сгиба.

8.47. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке M. Известно, что $AM = 1$, $BM = 2$, $CM = 4$. При каких значениях DM четырехугольник $ABCD$ является трапецией?

8.48. Из трех разных вершин треугольника проведены биссектриса, медиана и высота соответственно. Могут ли медиана и биссектриса разделить высоту на три равные части?

8.49. Можно ли двумя прямолинейными разрезами, проходящими через две вершины треугольника, разделить его на четыре части так, что три из них — равновеликие треугольники?

8.50. Из листа бумаги вырезали произвольный треугольник. Можно ли так загнуть три его угла, чтобы оставшаяся часть треугольника оказалась накрытой без просветов и наложений?

8.51. Жители трех домов решили вырыть общий колодец так, чтобы от каждого дома до колодца было одинаковое расстояние. Покажите на рис. 43, где нужно расположить колодец?

Рис. 43

8.52. На окружности выбраны диаметрально противоположные точки A и B и отличная от них точка C. Касательная к окружности в точке A и прямая BC пересекаются в точке D. Докажите, что прямая, касающаяся окружности в точке C, делит пополам отрезок AD.

8.53. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB и BC в точках M и N соответственно. Прямая, проходящая через середину стороны AC параллельно прямой MN, пересекает прямые BA и BC в точках D и E соответственно. Докажите, что $AD = CE$.

8.54. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE и CD. Различные точки F и G на стороне AC таковы, что отрезок DF параллелен отрезку BC и отрезок EG параллелен отрезку AB. Докажите, что четырехугольник $DEFG$ является вписанным в некоторую окружность.

8.55. Могут ли биссектрисы двух внешних углов треугольника пересечься в точке, лежащей на описанной около треугольника окружности?

8.56. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны. Докажите, что длина перпендикуляра OH, проведенного из центра окружности к стороне AD, вдвое меньше стороны BC.

8.57. Докажите, что в неравнобедренном прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, меньше половины гипотенузы.

8.58. В прямоугольной трапеции на боковой стороне, не перпендикулярной основанию, как на диаметре построена окружность; оказалось, что она касается противоположной стороны трапеции. Докажите, что квадрат высоты трапеции в 4 раза больше произведения оснований трапеции.

8.59. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Докажите, что если $AB \parallel DE$ и $AF \parallel DC$, то и $BC \parallel EF$.

8.60. На сторонах прямоугольного треугольника построены квадраты: на катетах во внешнюю сторону, а на гипотенузе во внутреннюю. Докажите, что центры квадратов и вершина треугольника лежат на одной прямой.

8.61. На стороне AB правильного треугольника ABC взяли точку M и на отрезке MC по ту же сторону от него, что и точка B, построили правильный треугольник MKC. Докажите, что AC и BK параллельны.

8.62. С помощью циркуля и линейки разделите пополам угол, вершина которого недоступна.

8.63. Докажите, что в остроугольном треугольнике ABC расстояние от центра описанной окружности до стороны ВС вдвое меньше расстояния от точки пересечения высот треугольника до вершины A.

8.64. Пусть AH — высота остроугольного треугольника ABC, K и L — основания перпендикуляров, опущенных из точки H на стороны AB и AC. Докажите, что точки B, K, L и C лежат на одной окружности.

8.65. Пусть точки P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из вершины В треугольника ABC на биссектрисы углов BAC и BCA соответственно, а точки M и N — середины сторон AB и BC. Доказать, что длина ломаной $PMNQ$ равна половине периметра треугольника ABC.

8.66. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка O так, что $\angle OAD = \angle OCD$. Докажите, что $\angle OBC = \angle ODC$.

8.67. Площадь равнобочной трапеции равна 1 м^2. Найдите наименьшее значение диагонали трапеции.

8.68. В треугольнике ABC угол A равен 30°. На стороне AB взята точка K так, что AK равно расстоянию от центра описанной около треугольника ABC окружности до AC. Найдите BK, если $AC = a$.

8.69. Дан треугольник ABC. Из произвольной точки O отложили векторы $OA_1 = AB$, $OB_1 = BC$, $OC_1 = CA$. Концы векторов соединили. Во сколько раз площадь треугольника $A_1B_1C_1$ больше площади данного?

8.70. Квадрат несколькими сквозными разрезами, параллельными его сторонам, разделили на прямоугольники. Оказалось, что сумма периметров этих прямоугольников в 100 раз больше периметра исходного квадрата. Какое наибольшее число прямоугольников могло при этом получиться? Максимальность ответа докажите.

8.71. Докажите, что если четырехугольники $ACPH$, $AMBE$, $AHBT$, $BKXM$, $CKXP$ являются параллелограммами, то и четырехугольник $ABTE$ является параллелограммом (при этом вершины всех четырехугольников перечислены против часовой стрелки).

8.72. Как с помощью циркуля и линейки построить отрезок длиной 1 см, если дан отрезок длиной $\sqrt{5}$ см?

8.73. Построить равносторонний треугольник, три вершины которого лежат на данных параллельных прямых.

8.74. Постройте равносторонний треугольник, одна из вершин которого находится в данной точке, другая лежит на данной прямой, а третья — на данной окружности.

8.75. На продолжении CE стороны AC равностороннего треугольника ABC за вершину C построен произвольный равносторонний треугольник COE. Докажите, что треугольник CMP, где M и P середины отрезков AD и BE соответственно, — тоже равносторонний.

9 класс

9.1. Дан вектор $\overrightarrow{OB}$, $B(8; 6)$. Постройте все точки, получающиеся из точки последовательными поворотами вектора на прямые углы около начала координат. Определите вид фигуры, которая получается в результате последовательного соединения указанных точек.

9.2. Три квадрата расположены, как показано на рис. 44. Найдите угол между прямыми AC и BD.

9.3. Площадь прямоугольного треугольника равна S. Найдите площадь треугольника с вершинами в основаниях перпендикуляров, проведенных из точки пересечения медиан данного треугольника на катеты и гипотенузу.

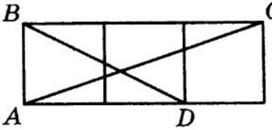


Рис. 44

9.4. Треугольник обладает следующим свойством: сумма расстояний от любой точки внутри него (включая точки на границе) до прямых, содержащих его стороны, постоянна и не зависит от выбора точки. Докажите, что данный треугольник — правильный.

9.5. Хулиган Витя вырезал из школьной стенгазеты, имеющей форму квадрата, все, что ему не понравилось. В итоге остался кусок в форме правильного восьмиугольника. Можно ли по этому восьмиугольнику узнать размеры школьной стенгазеты, если отрезанных кусков было 5 и они имели форму многоугольника?

9.6. Разбейте правильный шестиугольник на 12 равных четырехугольников.

9.7. В правильном выпуклом восьмиугольнике провели две параллельные диагонали. Докажите, что площадь закрашенной части равна площади незакрашенной части (рис. 45).

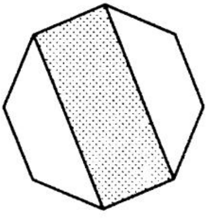


Рис. 45

9.8. На катетах прямоугольного треугольника площадью $10\ \text{см}^2$ как на диаметрах построены полуокружности, расположенные вне этого треугольника. Найдите суммарную площадь частей этих полукругов, расположенных вне круга, описанного вокруг этого треугольника.

9.9. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на 4 треугольника. Докажите, что произведение площадей двух противоположных треугольников равно произведению площадей двух других треугольников.

9.10. Найдите углы треугольника со сторонами a, b, c, если его площадь равна

$$S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

9.11. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ вне его построены равносторонние треугольники ABM и BCN. Докажите, что треугольник DMN — равносторонний.

9.12. Один из углов треугольника на $120°$ больше другого. Докажите, что биссектриса, проведенная из третьего угла этого треугольника, вдвое длиннее высоты, проведенной из этого же угла.

9.13. Один из углов треугольника равен $30°$. Докажите, что радиус описанной около этого треугольника окружности меньше половины его периметра.

9.14. Докажите, что если стороны треугольника образуют геометрическую прогрессию, то их высоты тоже образуют геометрическую прогрессию.

9.15. На координатной плоскости задан четырехугольник с вершинами в точках $(0; 6)$, $(8; 12)$, $(11; 8)$ и $(3; 2)$. Вычислите площади фигур, на которые разбивает его прямая $x + 7y - 67 = 0$.

10 класс

10.1. Существует ли в пространстве фигура, для которой выполняются следующие соотношения: $AB = CD = 8$; $AC = BD = 10$; $AB + BC = 13$ см?

10.2. Длина стороны квадрата $ABCD$ равна 6 см. Точка M удалена от каждой вершины на 17 см. Найдите расстояние от середины отрезка MA до середины каждой из сторон квадрата.

10.3. Пирамида Хеопса имеет в основании квадрат, а ее боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Может ли угол грани при вершине пирамиды быть равным $95°$?

10.4. Докажите, что правильный тетраэдр можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился квадрат.

10.5. Найдите сечение наименьшей площади, проходящее через диагональ куба.

10.6. Футбольный мяч представляет собой многогранник с 32 гранями, 20 из которых — белые правильные шестиугольники, а 12 — черные правильные пятиугольники. Сколько вершин у такого многоугольника?

11 класс

11.1. В пространстве дано несколько векторов. Известно, что длина суммы любых двух из них не больше 2. Докажите, что длина суммы любых трех из них не больше 3.

11.2. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб с углом $60°$ при вершине A. Боковое ребро, выходящее из вершины A, равно стороне ромба. Доказать, что из остальных боковых ребер можно составить прямоугольный треугольник.

11.3. На деревянном шаре нарисована окружность циркулем, раскрытым на тот же радиус, что и у шара. Какова длина этой окружности?

11.4. Какую наибольшую длину может иметь ребро правильного тетраэдра, который помещается в коробку, имеющую форму куба со стороной 1 см?

11.5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра основания AB, BC и боковое ребро AA_1 равны соответственно $2a$, a, $2a$. Определите радиус сферы, проходящей через вершины A, C, C_1 и середину E ребра BB_1.

11.6. Четыре шара радиуса r лежат на горизонтальном плоском столе и касаются друг друга. В ложбину положен пятый шар такого же радиуса. Найдите расстояние верхней точки пятого шара от плоскости стола.

11.7. Сосуд кубической формы, наполненный водой, повернули на угол 30° относительно одной из сторон основания. Найдите, какая часть первоначального объема воды при этом осталась в сосуде.

11.8. Докажите, что в параллелепипед можно вписать шар тогда и только тогда, когда площади всех граней параллелепипеда одинаковы.

11.9. Треугольную пирамиду разрезали по боковым ребрам и сделали развертку. Она оказалась квадратом со стороной 1 дм. Найдите объем пирамиды.

11.10. Найдите объем треугольной пирамиды, в основании которой лежит равносторонний треугольник со стороной $a\sqrt{2}$, а ребра равны a, a, $a\sqrt{3}$.

11.11. В правильный тетраэдр, ребро которого равно a, вписан полушар так, что три грани тетраэдра касаются его сферической поверхности, а четвертая служит ему диаметральной плоскостью. Найдите радиус полушара.

Ответы и решения

5 класс

5.1. Буратино соврал 4 раза.

5.2. Вариант разрезания показан на рис. 46.

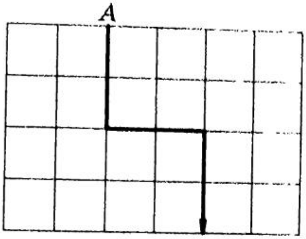


Рис. 46

5.3. Сначала квадрат 4×4 разрежем на 16 квадратов 1×1, затем каждый из полученных квадратов разрежем по диагонали на 4 треугольника, из которых, прикладывая большие стороны 2 треугольников друг к другу, можно получить по 2 квадрата (рис. 47).

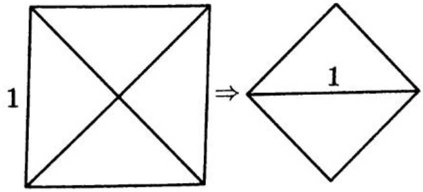


Рис. 47

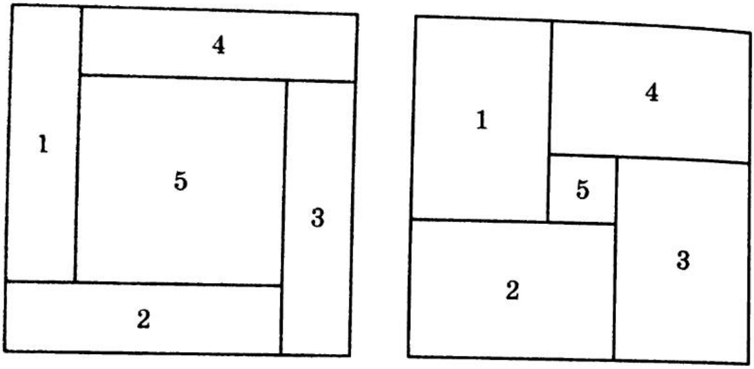


Рис. 48

5.4. 2 способа, они изображены на рис. 48.

5.5. Пример решения на рис. 49.

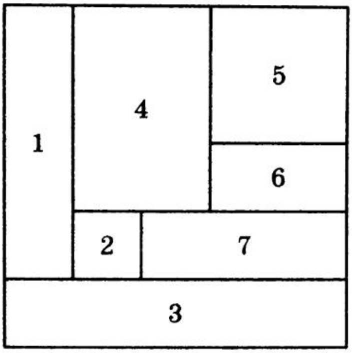


Рис. 49

5.6. Сначала разрежем квадрат на 5 прямоугольников размером 1×5. Затем каждый такой прямоугольник разрежем по диагонали среднего квадратика (рис. 50).

Рис. 50

5.7. Способы разрезания показаны на рис. 51.

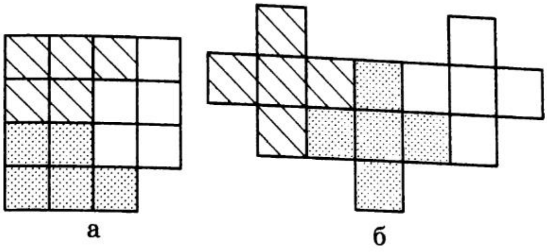


Рис. 51

5.8. См. рис. 52.

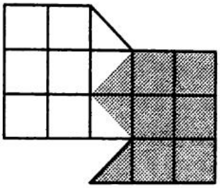


Рис. 52

5.9. Пример разрезания показан на рис. 53.

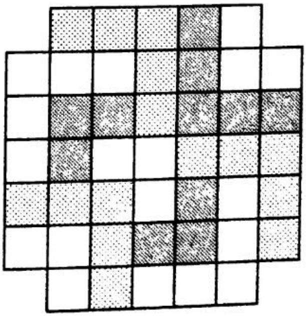


Рис. 53

5.10. Так как периметр равен 16 см, то длина одной стороны квадрата будет равна 1 см, а значит, площадь 7 квадратов будет равна 7 см^2.

5.11. Для решения этой задачи воспользуемся дополнительным построением. Пристроим к прямоугольнику, заданному в условии задачи, слева три раза его левую половину, а справа — два раза его правую половину, как показано на рис. 54.

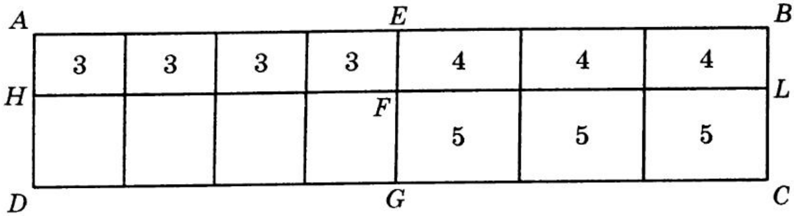


Рис. 54

Тогда площади прямоугольников $AEFH$ и $BLFE$ равны 12, а так как у них есть общая сторона EF, то и длины других сторон будут одинаковые, то есть $HF = FL$. Следовательно, длины прямоугольников $DHFG$ и $FLCG$ равны. А так как они имеют общую ширину, то равны и их площади. Так как площадь прямоугольника $FLCG$ равна 15, то и площадь прямоугольника $DHFG$ равна 15. Но прямоугольник $DHFG$ составлен из четырех прямоугольников, площадь которых надо определить. Значит, искомая площадь равна

$$\frac{15}{5} = 3\frac{3}{4}.$$

5.12. Можно нарисовать 4 квадрата со стороной 1 клетка; 5 — со стороной, равной диагонали клетки; 1 — со стороной в 2 диагонали клетки, 1 — со стороной 2 диагонали клетки. Всего получается 11 квадратов (рис. 55).

5.13. 1050 см^2. Использовать перебор, наибольшая площадь будет у прямоугольника, стороны которого состоят из 6 и 7 спичек.

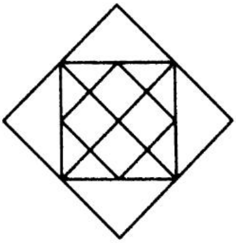


Рис. 55

5.14. Четырежды приложив шаблон, нарисуем прямоугольники размерами 5×6 и 6×5, расположенные, как показано на рис. 56. Осталось, пользуясь стороной фанерного прямоугольника как линейкой, продолжить их стороны, чтобы в правом верхнем углу образовался квадрат со стороной 1.

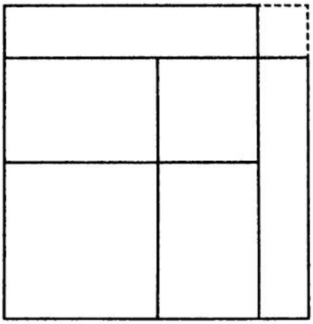


Рис. 56

5.15. Имеется 4 случая разложения числа 24 на 3 множителя: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 1 \cdot 12 = 1 \cdot 1 \cdot 24$. Рассматривая эти случаи, получаем, что параллелепипед имеет размеры $2 \times 3 \times 4$.

5.16. Обозначим длину коробки за a, ширину — за b, а высоту — за c. Тогда, учитывая условие, получим, что $ab = 6$, $ac = 2{,}5$, $bc = 2{,}4$. Перемножив эти три равенства, получим, что

$$a^2b^2c^2 = 36.$$

Но $a^2b^2c^2 = (abc)^2$ — квадрат объема коробки. Поэтому объем коробки равен 6 дм^3.

5.17. Возможны 2 варианта параллелепипеда, построенного из 18 кубиков высотой в 3 кубика: $3 \times 3 \times 2$ и $3 \times 6 \times 1$. Площади поверхности этих параллелепипедов будут равны 42 и 54 площадей одной грани. Учитывая, что площадь грани равна $\frac{19}{6}$ см^2, получим площади поверхности для построенных параллелепипедов: 133 см^2 и 171 см^2.

5.18. См. рис. 57.

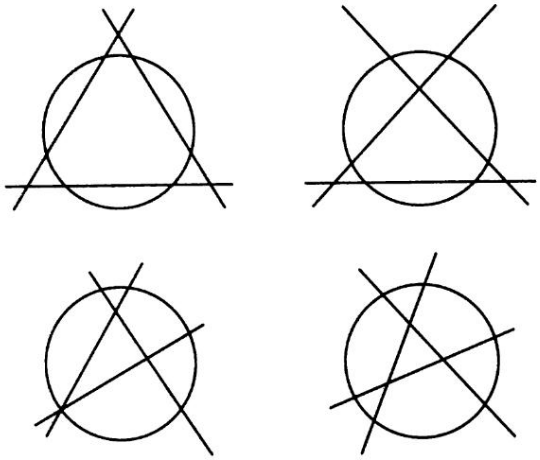


Рис. 57

5.19. Возможное разбиение приведено на рис. 58.

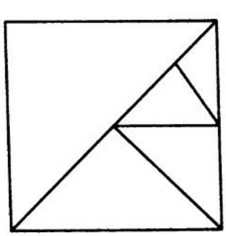


Рис. 58

5.20. После первого разворачивания дырок внутри не будет, после второго разворачивания окажется одна дырка в середине. Развернув третий раз, мы получим уже 3 дырки, а после четвертого — уже 9. Таким образом, развернув лист последний раз, мы получим 21 дырку.

5.21. На рис. 59 $\angle AOC$, $\angle AOD$, $\angle BOC$, $\angle BOD$ — тупые.

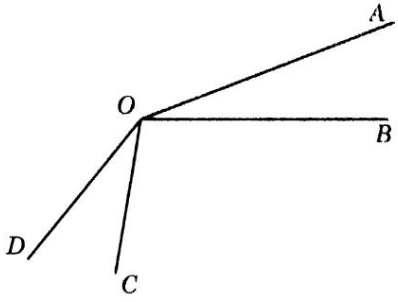


Рис. 59

5.22. Решение на рис. 60.

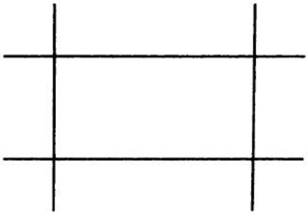


Рис. 60

5.23. Начнем с самых маленьких треугольников: их 8. Треугольников площадью в 2 раза больше — 14. Треугольников площадью в 3 раза больше самого маленького треугольника — 4 (они прямоугольные). Наконец, самых больших треугольников — 2. Итого, всего 28 треугольников.

5.24. Так как периметр первой фигуры равен 16 см, то сторона первого квадрата равна 4 см. Соответственно сторона второго квадрата будет равна 6 см. Тогда сторона третьего квадрата будет 10 см, а сторона четвертого

$$10 + 6 = 16 \text{ (см)}.$$

А это означает, что периметр четвертой фигуры равен 64 см.

5.25. 8 углов: $10°$, $20°$, $30°$, $50°$, $60°$, $80°$, $100°$, $110°$.

5.26. Сумма периметров треугольников дает в итоге сумму периметра четырехугольника и удвоенную длину диагонали. Тогда длина диагонали равна

$$(22 + 18) - 26) : 2 = 7 \text{ (см)}.$$

5.27. Как видно из рис. 61, периметр прямоугольника складывается из 6 сторон квадрата, поэтому его сторона равна

$$18 : 6 = 3 \text{ (см)}.$$

Тогда площадь квадрата будет равна 9 см^2, а площадь прямоугольника 18 см^2.

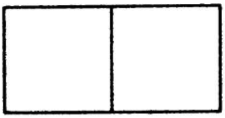


Рис. 61

5.28. 13 треугольников: 6 — маленьких, 4 — состоят из 2 маленьких треугольников, 2 прямоугольных — состоят из 3 треугольников, 1 — большой, включающий в себя 6 маленьких треугольников.

5.29. 24 вершины и 36 ребер.

5.30. См. рис. 62.

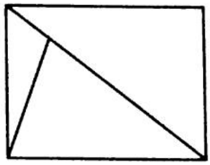


Рис. 62

5.31. Так как прямоугольник разбит на три меньших одинаковых прямоугольника, то обе «перекладины» T-образной части равны и верхняя «перекладина» разбивается вертикальной «перекладиной» на две одинаковые части. Обозначим длину вертикальной перекладины через 2 ч. Тогда периметр всего прямоугольника равен $(2\text{ ч} + 3\text{ ч}) \cdot 2 = 10$ ч. По условию, периметр прямоугольника равен 6 м или 600 см. Значит, $1\text{ ч} = 60$ см. Так как длина T-образной составляет 4 ч, то длина будет $240\text{ см} = 2\text{ м }40\text{ см}$.

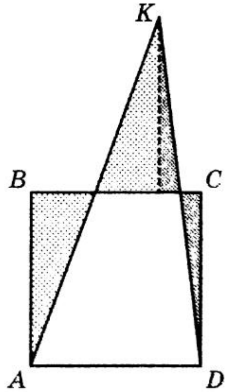


Рис. 63

5.32. Решение задачи представлено на рис. 63, где $ABCD$ — исходный квадрат, а AKD — полученный треугольник.

6 класс

6.1. Так как 0,5 м = 50 см = 500 мм, то грань можно разрезать на 500 : 2 = 250 (частей). Разрезав таким образом куб в трех плоскостях, получим $250 \cdot 250 \cdot 250 = 15\,625\,000$. Так как длина ребра кубика равна 2 мм, то длина ряда будет $15\,625\,000 \cdot 2$ мм = 31 250 000 мм = 31,25 км.

6.2. Рассмотрим арифметический способ решения задачи. Пусть $ABCD$ — участок под клубникой, $AB = x$, $BC = 3x$ (рис. 64).

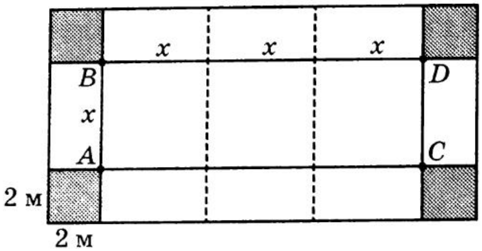


Рис. 64

1) $2 \cdot 2 = 4$ (м^2) — площадь каждого из заштрихованных квадратов.

2) $4 \cdot 4 = 16$ (м^2) — площадь четырех угловых заштрихованных квадратов.

3) $128 - 16 = 112$ (м^2) — площадь оставшейся части участка внутри ограды (без угловых квадратов, см. рис. 64), она представляет собой 8 прямоугольников с шириной 2 м и длиной x.

4) $112 : 8 = 14$ (м^2) — площадь одного из прямоугольников.

5) $x = 14 : 2 = 7$ (м) — длина этого прямоугольника, эта же ширина участка, занятого клубникой.

6) $7 \cdot 3 = 21$ (м) — длина участка, занятого клубникой.

7) $7 + 2 + 2 = 11$ (м) — длина меньшей стороны ограды.

8) $21 + 2 + 2 = 25$ (м) — длина большей стороны ограды.

9) $(11 + 25) \cdot 2 = 72$ (м) — длина всей ограды.

6.3. Из данных фигурок сначала можно сложить прямоугольник 2×5, как показано слева на рис. 65, а затем, из 10 прямоугольников 2×5 сложить квадрат 10×10, он изображен на рисунке справа.

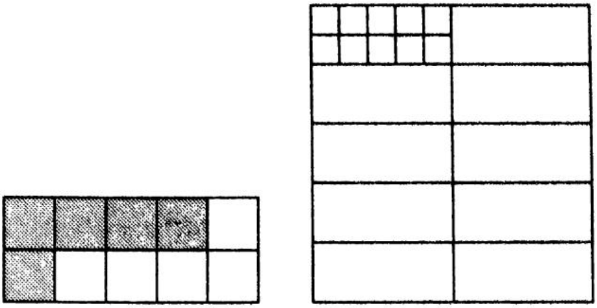


Рис. 65

6.4. Площадь четверти круга с радиусом 1 равна $\frac{\pi}{4}$. Тогда площадь квадрата без четверти данного круга будет равна $1 - \frac{\pi}{4}$. Площадь двух таких частей равна $2 - \frac{\pi}{2}$. Тогда площадь заштрихованной части равняется разности площади квадрата и площади данных двух частей, то есть

$$1 - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

6.5. Площадь круга с радиусом, равным $\frac{1}{2}$, будет равна $\frac{\pi}{4}$, а полукруга с этим же радиусом — $\frac{\pi}{8}$. Тогда площадь двух таких полукругов будет равна $\frac{\pi}{4}$. Так как площадь квадрата равна 1, то площадь двух незаштрихованных участков квадрата будет равна $1 - \frac{\pi}{4}$. Значит, площадь четырех незаштрихованных участков будет равна $2 - \frac{\pi}{2}$. Поэтому площадь заштрихованных участков будет равна

$$1 - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

6.6. Найдем сначала площадь четверти круга с радиусом, равным $\frac{1}{2}$, она будет равна $\frac{\pi}{16}$. Тогда площадь 4 таких четвертей будет равна $\frac{\pi}{4}$. Значит, площадь оставшейся части квадрата равна $1 - \frac{\pi}{4}$. Заштрихованная фигура представляет собой разность круга и этой части. Тогда ее площадь будет равна

$$\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

7 класс

7.1. В 15.00 стрелки образовывали прямой угол. За 30 мин минутная стрелка повернулась на $180°$, а часовая на $15°$. Тогда угол между ними будет равен $180° - 90° - 15° = 75°$.

7.2. В 12.00 стрелки часов сходятся вместе. После этого за 20 минут минутная стрелка проходит $\frac{1}{3}$ окружности, то есть описывает угол в $120°$. Часовая стрелка движется в 12 раз медленнее минутной (так как описывает круг за 12 часов). Поэтому она за 20 минут опишет угол в $120° : 12 = 10°$ и будет образовывать с минутной стрелкой угол в $120° - 10° = 110°$.

7.3. Изобразим модель часов (рис. 66); имеем:

$$\angle COB = \angle AOB + \angle AOC;$$

$$\angle AOB = 180° - \frac{180°}{6} = 150°; \qquad \angle AOC = \frac{210°}{12} = 17{,}5°;$$

поэтому $\angle COB = 167{,}5°$.

7.4. За 1 час минутная стрелка проходит полный круг ($360°$). Часовая же стрелка — в 12 раз меньше, то есть $30°$. Значит, в 7 ч 00 мин минутная стрелка будет отставать от часовой стрелки на $210°$. Через 38 минут минутная стрелка повернется на угол

$$\frac{38}{60} \cdot 360° = 228°,$$

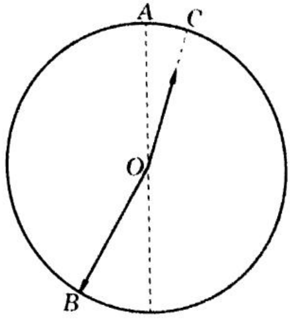


Рис. 66

а часовая на угол в 12 раз меньше, то есть на 19°. Тогда в 7 ч 38 мин угол между ними будет

$$210^\circ + 19^\circ - 228^\circ = 1^\circ.$$

7.5. В момент, когда часы показывают 4 часа, между часовой и минутной стрелкой будет 20 минутных делений. Чтобы стрелки совпали, минутная стрелка должна пройти x минутных делений, а часовая $\frac{x}{12}$ минутных делений. Таким образом, получаем уравнение:

$$20 + \frac{x}{12} = x.$$

Решая данное уравнение, получим $x = 21\frac{9}{11}$. Таким образом, минутная стрелка догонит часовую стрелку через $21\frac{9}{11}$ минуты.

7.6. Обозначим за x минут — промежуток времени, который пройдет до того момента, когда часовая и минутная стрелки будут смотреть в разные стороны. Минутная стрелка за это время пройдет x минутных делений циферблата, а часовая — $\frac{x}{12}$ минутных делений. В момент, когда стрелки часов будут смотреть в разные стороны, их будет разделять 30 минутных делений циферблата. Поэтому имеем уравнение:

$$x - \frac{x}{12} = 30,$$

решением которого будет

$$x = 32\frac{8}{11}.$$

Таким образом, через $32\frac{8}{11}$ минуты после того, как минутная и часовая стрелки совпадут, они будут «смотреть» в противоположные стороны.

7.7. За полчаса минутная стрелка повернется на $180°$, а часовая — на $15°$. Рассмотрим два случая. Если минутная стрелка опережает часовую стрелку, то через полчаса между ними будет угол $180° - 15° + 90° = 255°$. Учитывая, что угол между прямыми (аналогично, и лучами) берется меньший, то ответом будет $360° - 255° = 105°$. Если же часовая стрелка опережает минутную, то угол между ними через полчаса будет $180° - 15° - 90° = 75°$. Таким образом, в зависимости от того, какая из стрелок была впереди, ответом будет: угол между стрелками через полчаса будет $105°$ или $75°$.

7.8. Так как $\triangle DBE = \triangle ECF = \triangle FAD$ (по двум сторонам и углу между ними), то $DE = EF = FD$. Поэтому $\triangle DEF$ — равносторонний.

7.9. Имеем $AB = BC$, поэтому

$$\angle BAC = \angle BCA, \quad \angle ABE = 90° - \angle EBD,$$

$\angle CBD = 90° - \angle EBD$ (рис. 67).

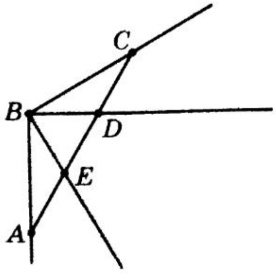


Рис. 67

Отсюда $\angle ABE = \angle CBD$.

Имеем: $AB = BC$, $\angle BAC = \angle BCA$, $\angle ABE = \angle CBD$.

Значит, $\triangle ABE = \triangle BCD$.

7.10. Один из возможных вариантов: отложить 13 раз угол по 13°, тогда разность развернутого угла и угла в 169° даст искомый угол: $180^\circ - 13 \cdot 13^\circ = 11^\circ$.

Самостоятельно найдите еще способы решения данной задачи.

7.11. Возможные варианты:

1) $10 \cdot 37^\circ - 360^\circ = 10^\circ$, $10^\circ \cdot 3 = 30^\circ$, $37^\circ - 30^\circ = 7^\circ$, $10^\circ - 7^\circ = 3^\circ$.

2) $2 \cdot 37^\circ = 74^\circ$, $75^\circ - 74^\circ = 1^\circ$, $3 \cdot 1^\circ = 3$.

7.12. Построим окружность с центром в вершине угла, отложим 19 раз угол 19°. В результате получим угол в $1^\circ = 19^\circ \cdot 19 - 360^\circ$. С помощью этого угла делим данный угол на 19 частей.

Найдите и другие способы решения данной задачи.

7.13. Так как $108^\circ \cdot 10 = 360^\circ \cdot 3$, то десять углов по 108° должны составить три полных угла. Циркулем чертим окружность с центром в вершине угла 108°. Окружность пересечет угол в двух точках A и B, углу 108° будет соответствовать дуга окружности AB. Отложим на окружности эту дугу от точки B девять раз. Если после этого мы попадем в точку A, то данный угол будет равен 108°, а если не попадем, то не равен 108°.

7.14. Обозначив $\angle BAO = x$, выразим другие углы: $\angle ABO = 180^\circ - 125^\circ - x = 55^\circ - x$; $\angle A = 2x$, $\angle B = 110^\circ - 2x$ (рис. 68). Тогда $C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

7.15. Разделим угол треугольника величиной 105° на три угла: 15°, 30°, 60° (рис. 69). Тогда в полученных треугольниках $\angle ACB = \angle KBC = 15^\circ$, $\angle BAD = \angle DBA = 60^\circ$, $\angle DBK = \angle BKD = 30^\circ$. А значит, треугольники DBA, DBK и KBC являются равнобедренными.

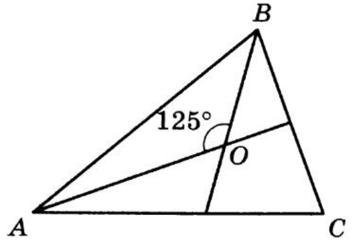


Рис. 68

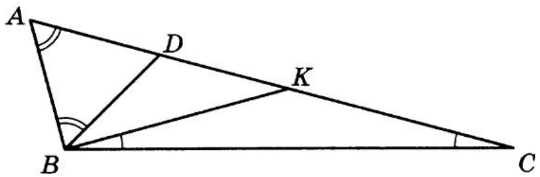


Рис. 69

7.16. Надо взять треугольник с углами 60°, 30°, 90°.

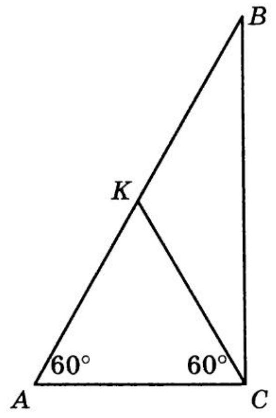


Рис. 70

На рис. 70 $\triangle ABC$ — прямоугольный, $\triangle AKC$ — остроугольный, $\triangle KBC$ — тупоугольный, $\triangle AKC$ — равносторонний, $\triangle CKB$ — равнобедренный, $\triangle ACB$ — разносторонний.

7.17. Угол CAB является внешним углом треугольника CKA, поэтому он равен сумме углов KCA и CKA (рис. 71). Так как по условию $AK = AC$, то треугольник CAK является равнобедренным, а значит,

$$\angle KCA = \angle CKA = \frac{1}{2}\angle CAB.$$

Аналогично, рассуждая про треугольник BCM, получим, что

$$\angle BCM = \angle BMC = \frac{1}{2}\angle CBA.$$

Таким образом,

$$\angle KCM = \angle KCA + \angle ACB + \angle BCM =$$

$$= \angle ACB + \frac{1}{2}(\angle CAB + \angle CBA) = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ.$$

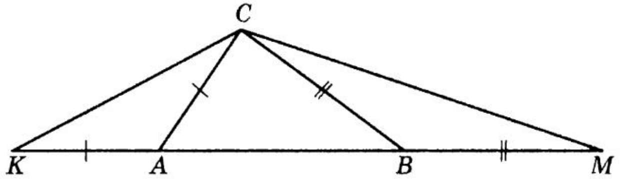


Рис. 71

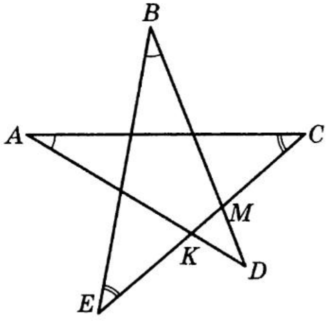


Рис. 72

7.18. В силу равенства $\triangle ACK = \triangle BEM$ получаем, что $\angle AKC = \angle BME$ и $AK = BM$ (рис. 72). Тогда $\angle MKD = \angle KMD$ и $\triangle KMD$ будет равнобедренным. Поэтому $KD = MD$. Тогда $AK + KD = BM + MD$, а значит, $AD = BD$.

7.19. Рассмотрим возможные случаи получения равнобедренных треугольников, разрезая больший угол треугольника (рис. 73).

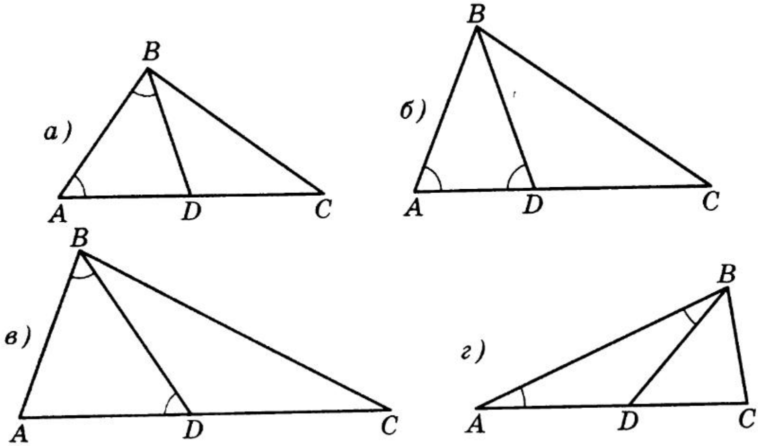


Рис. 73

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

а) Пусть $\angle ABD = \angle BAD = \alpha$, $\angle CBD = \angle BCD = \beta$. Тогда, учитывая, что $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, $\angle ABD + \angle CBD = \angle B$, имеем: $\alpha + \beta = 90°$. А это означает, что $\angle B = 90°$, то есть прямоугольный треугольник можно разрезать на два равнобедренных треугольника.

б) Пусть $\angle BAD = \angle BDA = \alpha$, $\angle CBD = \angle BCD = \beta$. Тогда $\angle ABD = 180° - 2°\alpha$. Учитывая, что сумма углов треугольника равна $180°$, имеем: $\alpha + 180° - 2\alpha + 2\beta = 180°$ или $\alpha = 2\beta$. Так как α и β — углы треугольника, то получаем, что если в треугольнике средний угол больше меньшего угла в 2 раза, то такой треугольник можно разрезать на 2 равнобедренных.

в) Обозначив $\angle BDA = \angle ABD = \alpha$, $\angle DBC = \angle DCB = \beta$, аналогично получим, что $\alpha = 2\beta$. Тогда $\angle B = 3\beta = 3\angle C$, то есть получаем, что если в треугольнике больший угол в три раза больше какого-то из углов треугольника, то такой треугольник можно разрезать на два равнобедренных.

г) Обозначив $\angle BAD = \angle ABD = \alpha$, $\angle BDC = \angle CBD = \beta$, аналогично, получим: $\beta = 2\alpha$, то есть тот же вывод, что и в случае в).

Таким образом, если треугольник является прямоугольным, или в нем средний угол больше меньшего в 2 раза, или больший угол треугольника больше какого-то угла треугольника в 3 раза, то такой треугольник можно разрезать на два равнобедренных треугольника.

7.20. Из условия задачи вытекает, что

$$AN = MC, \qquad AP = CQ, \qquad \angle A = \angle C = 60^\circ.$$

Следовательно, треугольники NAP и MCQ равны по двум сторонам и углу между ними, и в них

$$\angle ANP = \angle QMC \quad \text{и} \quad \angle APN = \angle CQM.$$

А т. к. во всяком треугольнике сумма углов равна 180°, то

$$\angle NOQ = \angle MOP = 180^\circ - \angle QMC + \angle APN) =$$
$$= 180^\circ - (180^\circ - \angle C - \angle MQC + \angle CQM) = 60^\circ.$$

7.21. Данный угол не может быть при основании равнобедренного треугольника, так как в этом случае сумма внутренних углов треугольника была бы больше 180°. Значит, данный угол находится при вершине. Тогда смежный с ним, внутренний угол треугольника, будет равен 148°, соответственно углы при основании будут по 16°. Значит, угол между основанием треугольника и высотой треугольника, проведенной из вершины угла при основании, будет равен $180^\circ - 90^\circ - 16^\circ = 74^\circ$.

7.22. Пусть AD и CE — данные высоты, O — точка пересечения (рис. 74). Из того, что в прямоугольном треугольнике AOE угол AOE равен 60°, следует, что

$$OE = \frac{1}{2}AO.$$

Так как по условию задачи:

$$OD = \frac{1}{2}AO, \quad \text{то} \quad OD = OE.$$

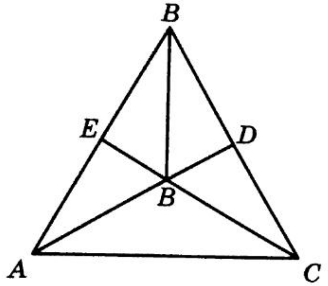


Рис. 74

Значит, прямоугольные треугольники OEB и ODB равны по гипотенузе и катету. Тогда $BE = BD$, откуда следует, что

$$\triangle ABD = \triangle CBE.$$

Отсюда следует, что $AB = BC$. В то же время

$$\angle ABC = 90° - \angle BAD = \angle AOE = 60°.$$

Значит, треугольник ABC равносторонний.

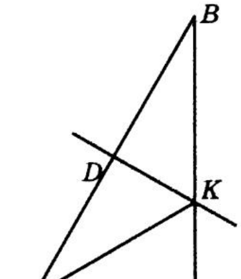


Рис. 75

7.23. Пусть в прямоугольном треугольнике $\angle B = 30°$, $AD = BD$, $DK \perp AB$ (рис. 75). Выполним дополнительное построение, соединив точки A и K. Прямоугольные треугольники BDK и ADK будут равны (по двум катетам), значит,

$$\angle DAK = \angle DBK = 30°.$$

Тогда $\angle KAC = 30°$. Тогда и треугольники ADK и ACK будут равны по гипотенузе и острому углу. Используя свойство угла $30°$ в прямоугольных треугольниках BDK и ACK, имеем:

$$CK = DK = \frac{1}{2}BK,$$

откуда $DK = \frac{1}{3}BC$.

7.24. Построим равносторонний треугольник AKB так, чтобы одна из его сторон AB лежала на стороне прямого угла, а одна из вершин A находилась в вершине прямого угла (рис. 76). Разделив пополам угол треугольника KAB, мы в результате разделим угол $90°$ на три равные части.

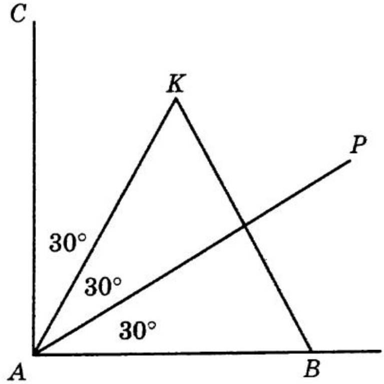


Рис. 76

7.25. Пусть $\angle ABC = 63°$. Для того, чтобы разделить его на требуемое число частей, построим равносторонний треугольник произвольных размеров, но так, чтобы одна из его вершин совпадала с точкой B, а одна из сторон лежала бы на стороне угла BC (рис. 77). В результате получим $\angle ABD = 3°$. Построив из точки B перпендикуляр и дважды отложив от луча BA угол, равный $3°$, мы получим $\angle KBM = 21°$. Поскольку угол $21°$ составляет треть угла $63°$, то, отложив внутри угла в $63°$ от каждой стороны его по углу $21°$, мы в результате разделим угол 63° на три части. А с помощью угла MAD в 9°, откладывая его 6 раз от стороны BC угла ABC, мы разделим угол 63° на семь равных частей.

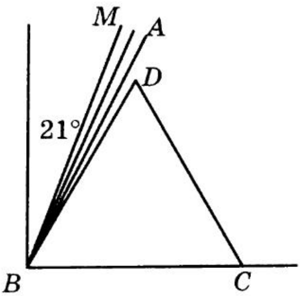


Рис. 77

8 класс

8.1. Проведем 2 разреза, центральносимметричные уже сделанным (рис. 78). Куски 1, 2, 6, 9 достались Малышу, а симметричные им 7, 8, 4 и 3 — Карлсону, которому отошла еще и середина 5. Поэтому Карлсону досталось не менее половины торта.

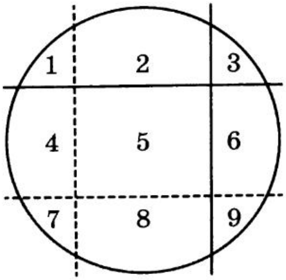


Рис. 78

8.2. Если каждый угол выпуклого многоугольника выражается целым числом градусов, то внешние углы многоугольника будут не меньше 1°. Тогда сумма всех 2007 углов будет не меньше 2007°. А так как сумма всех внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°, то получаем противоречие. Значит, такого 2007-угольника не существует.

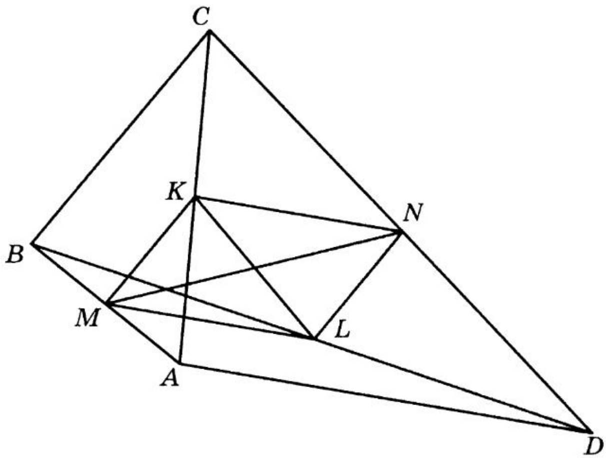


Рис. 79

8.3. Обозначим за M, N, K, L середины отрезков AB, CD, AC и BD (рис. 79). В треугольнике ABC MK — средняя линия, поэтому MK параллельна BC и

$$MK = \frac{1}{2}BC.$$

В треугольнике BCD LN параллельна BC и

$$LN = \frac{1}{2}BC.$$

Тогда $MKNL$ — параллелограмм. Но так как $KL = MN$, то $MKNL$ — прямоугольник. Тогда угол между прямыми BC и AD равен углу между параллельными им прямыми MK и ML, а

$$\angle KML = 90^\circ,$$

значит, и угол между прямыми BC и AD есть прямой.

8.4. Пусть BO пересекает AC в точке E. Проведем $DM \parallel BE$ до пересечения с AC в точке M. По теореме Фалеса, $AE : EM = 5 : 2$, $EM : MC = 1 : 3$. Пусть $AE = 5k$, $EM = 2k$, тогда $MC = 3EM = 6k$, $AE : EC = 5 : 8$.

8.5. Достроим треугольник до параллелограмма так, чтобы медиана стала половиной диагонали. Из неравенства треугольника следует, что диагональ (равная удвоенной медиане) меньше суммы двух соседних сторон параллелограмма. А поэтому медиана будет меньше полусуммы сторон треугольника, выходящих из той же вершины.

8.6. Построим точки, симметричные точкам A и B относительно прямых a и b: A_1 и B_1. Проведем прямую A_1B_1. Соединим точки пересечения данной прямой с прямыми a и b отрезками (рис. 80).

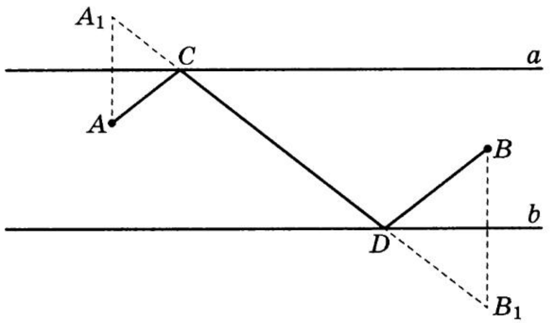


Рис. 80

Кратчайший путь — $ACDB$.

8.7. Воспользуемся неравенством треугольника: каждая сторона треугольника меньше суммы двух других, но больше их разности. Если длина диагонали равна 15, то из оставшихся чисел (длин сторон) должны получиться две пары, дающие в сумме больше, чем 15. Однако это не так. Поэтому диагональ не может быть равна 15. Аналогично не подходит и 10. Если длина диагонали равна 2, то из оставшихся чисел должны получиться две пары, разность которых меньше, чем 2. Однако это не так. Аналогично не подходит и 4. Тогда остается лишь одно число (число 5,5), которое удовлетворяет неравенству треугольника, а значит именно такова длина диагонали.

8.8. Прямоугольные треугольники с гипотенузами AE и CK, FB и DL равны по двум катетам, значит, $AE = CK$ и $FB = DL$. Так как $EF = KD$, как стороны квадрата, то $AE + EF + FB = CK + KD + DL$. Значит, длина обоих маршрутов одинакова.

8.9. Точки пересечения отрезков CE и CF с диагональю BD являются точками пересечения медиан треугольников ABC и ADC. Поскольку медианы треугольника делятся в точке пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины, а треугольники ABC и ADC равны, то расстояния между точками пересечения медиан равны расстоянию от них до вершин B и D.

8.10. Исходный прямоугольник разрежем на 5 частей: на 4 прямоугольных треугольника с катетами 1 и 2 и квадрат 1×1 (рис. 81). Затем сложим квадрат, как показано на рисунке.

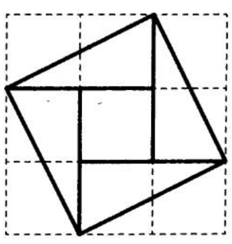


Рис. 81

8.11. Необходимо измерить циркулем: 1) длины противоположных сторон четырехугольника; 2) диагонали четырехугольника. В случае равенства противоположных сторон четырехугольника получим, что он является параллелограммом, а в случае равенства диагоналей получим, что параллелограмм является прямоугольником.

8.12. Обозначим сторону самого большого квадрата за x, тогда, двигаясь от большого квадрата по часовой стрелке, последовательно выразим через x стороны других квадратов: $x-1$, $x-2$, $x-3$. Обозначив сторону искомого квадрата за y, получим 2 выражения для длины верхней стороны фигуры: $x+x-1=$ $=y+x-2+x-3$. Из данного равенства находим: $y=4$.

8.13. Отложим на продолжении отрезка BD за точку D отрезок DE, равный AD (рис. 82). $\angle ADB$ — внешний угол при вершине равнобедренного треугольника ADE, поэтому

$$\angle AED = \frac{1}{2}\angle ADB = \angle CBD.$$

Так как углы CBD и AEB равны и являются накрест лежащими углами при прямых AE и BC и секущей BE, то прямые AE и BC — параллельны. Отсюда и из условия, что диагональ AC делится прямой BE пополам, следует, что $ABCE$ — параллелограмм. Следовательно, $\angle ABD = \angle KEC$. Далее, имеем

$$CK = KD + AD = KD + DE = KE,$$

то есть треугольник CKE — равнобедренный (его углы C и E равны).

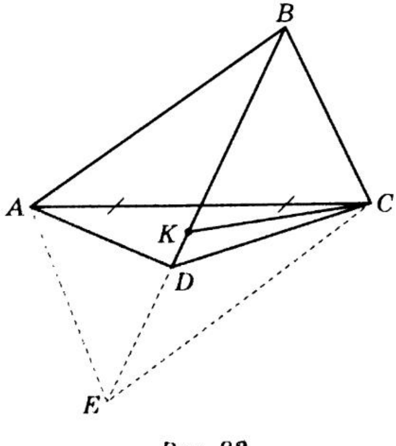


Рис. 82

Поскольку угол BKC — внешний для этого треугольника, получаем, что

$$\angle BKC = 2\angle KEC = 2\angle ABD.$$

8.14. Выполним дополнительное построение: проведем прямую CE, параллельную большей боковой стороне трапеции AB (рис. 83). Тогда $DE = AD - AE = AD - BC$. В треугольнике CDE верно неравенство $CE - CD < DE$. Так как $DE = AD - BC$, $CE = AB$, то

$$AB - CD < AD - BC.$$

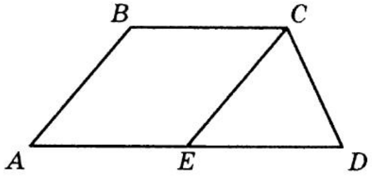


Рис. 83

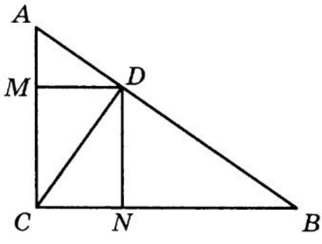


Рис. 84

8.15. Пусть дан треугольник ABC с прямым углом C. Так как наименьшей диагональю будет перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, то для построения прямоугольника необходимо построить перпендикуляр из точки C на гипотенузу AB, а затем из точки D провести перпендикуляры к прямым AC и BC (рис. 84). Тогда по построению, $MDNC$ будет искомым прямоугольником с наименьшей диагональю.

8.16. Рассмотрим один из возможных способов решения.

Пусть отрезок EF пересекает AC в точке X, а BD в точке Y. Проведем через вершины A и D прямые, параллельные прямой EF и пересекающие прямую BC в точках K и M соответственно. По теореме Фалеса, получим, что $EK = EM$ (рис. 85). Тогда, по теореме о пропорциональных отрезках, учитывая, что $BE = EC$, получаем

$$\frac{CX}{EK} = \frac{CE}{EK} = \frac{BY}{YD},$$

что и требовалось доказать.

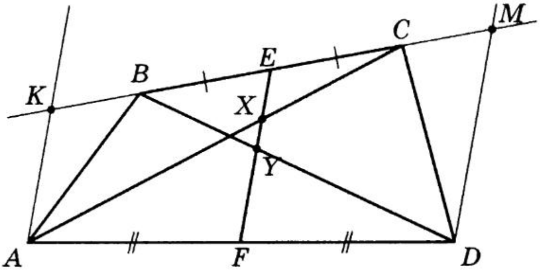


Рис. 85

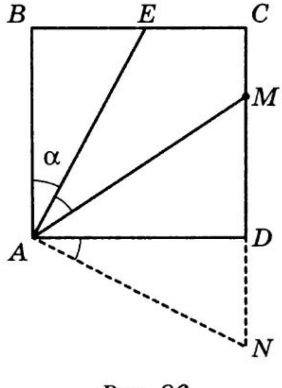


Рис. 86

8.17. Выполним дополнительное построение: продолжим отрезок MD на отрезок DN, равный BE, и соединим N с A. Обозначим угол BAE через α (рис. 86). Треугольники ABE и ADE

будут равны по двум катетам, поэтому $\angle DAN = \alpha$, а

$$\angle MAN = 90^\circ - 2\alpha + \alpha = 90^\circ - \alpha = \angle MNA.$$

Значит, треугольник AMN будет равнобедренным. Тогда

$$MN = AM = 5 \text{ см},$$

т. е. $MD + BE = 5$ см.

8.18. План построения:

1) соединяем точки A и E;

2) отложим на прямой AE отрезок EB, равный отрезку EA;

3) через точку F проведем прямую, параллельную прямой AB;

4) отложим на данной прямой $FC = AE$ и $FD = AE$;

5) точки A, B, C, D соединяем отрезками.

$ABCD$ — искомый параллелограмм (рис. 87).

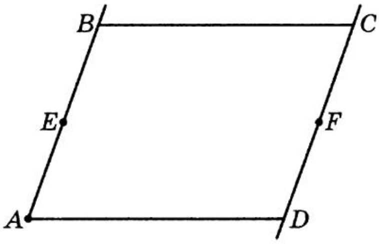


Рис. 87

8.19. Пусть в трапеции $ABCD$, где AD и BC — основания, длина диагонали BD равна сумме длин AD и BC. Отметим на BD точку O так, чтобы $BO = BC$, тогда по условию $OD = AD$ и треугольники BCO и ADO будут равнобедренными. Углы ADO и CBO при их вершинах равны, поэтому углы AOD и COB при основаниях также равны, следовательно, отрезки AO и OC лежат на одной прямой и образуют вторую диагональ трапеции. Угол BOC острый, как угол при основании равнобедренного треугольника, следовательно, он равен углу между диагоналями трапеции и по условию равен 60°, аналогично угол AOD

равен 60°. Отсюда следует, что в треугольниках BCO и ADO все углы равны 60° и эти треугольники равносторонние. Следовательно, треугольники AOB и DOC равны по двум углам и прилежащим сторонам, откуда следует, что трапеция — равнобочная.

8.20. Так как $\angle B > 90^\circ$, то $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 88). Но $BC \parallel AD$, AC — секущая, значит, $\angle CAD = \angle 2$. Так как $\angle 3 \neq \angle 2$ (иначе $\angle A = \angle C$, чего не может быть), то $\angle 3 = \angle D$. Но $\angle D = \angle A$, поэтому $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$, тогда $\angle 3 = 2\angle 1 = 2\angle 2$. В результате имеем: $\angle 2 + \angle 3 + \angle 3 = 180^\circ$; $\angle 2 + 2\angle 2 + 2\angle 2 = 180^\circ$; $5\angle 2 = 180^\circ$; откуда: $\angle 2 = 36^\circ$. Тогда углы трапеции будут 72°, 108°, 108°, 72°.

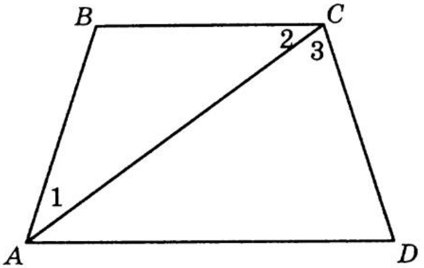
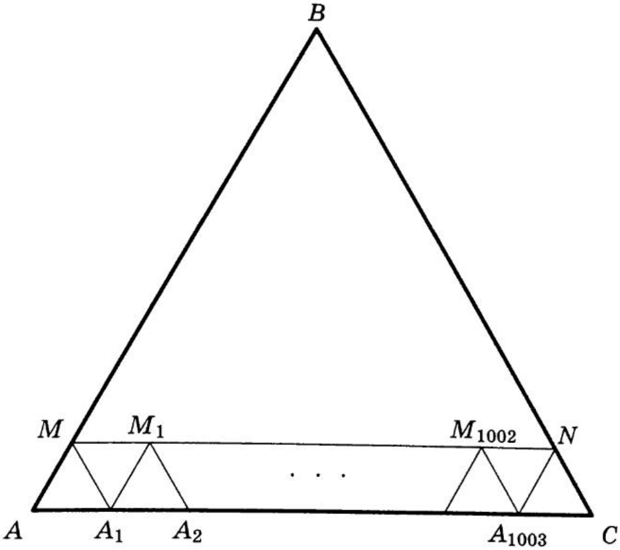


Рис. 88

8.21. Построим параллелограмм так, чтобы данный отрезок был его диагональю, а одна пара сторон — отрезками, содержащими узлы 11 клеток. Соединяя узлы попарно на этих сторонах параллельными отрезками, получим деление диагонали на 11 равных частей.

8.22. На 2008 треугольников разделить можно. План построения:

1. Отложить $AM = \frac{1}{1004}AB$.
2. Провести MN, параллельную AC.
3. На AC отложить 1004 отрезка, равных AM.



Треугольники $AMA_1, A_1M_1A_2, \ldots, A_{1003}NC$ — равносторонние

Рис. 89

4. Из точек $A_1, A_2, \ldots A_{1003}$ провести прямые, параллельные прямой AB.

В полосе (рис. 89) получается 2007 треугольников, они все равносторонние и равны между собой, а 2008-й треугольник — это $\triangle MBN$.

8.23. Обозначим за x длину меньшего отрезка. На верхнем основании трапеции укладывается три маленьких и один большой отрезок, поэтому длина большого отрезка будет равна $1 - 3x$. На нижнем основании трапеции, имеющем длину 2 см, укладывается три больших и один маленький отрезок. В итоге имеем уравнение: $3(1 - 3x) + x = 2$. Решением данного уравнения является $x = \frac{1}{8}$. Тогда $1 - 3x = \frac{5}{8}$. Так как $\frac{5}{8} : \frac{1}{8} = 5$, то больший отрезок в пять раз длиннее меньшего.

8.24. Проведем через точку M прямую параллельно стороне AB, обозначим ее пересечение с CE через F. Треугольники ABM и MFC равны по стороне и прилежащим к ней углам, поэтому

$AB = MF$. Кроме того, MD параллелен FE, а MF параллелен DE, поэтому четырехугольник $MDEF$ параллелограмм и $MF = DE$. Так как $AB = MF$ (из равенства треугольников ABM и MFC) и $MF = DE$, то $AB = DE$, что и требовалось доказать.

8.25. Переложим части данного четырехугольника так, чтобы их вершины A, B, C, D оказались в одной точке и совпали отрезки AK и BK, BP и CP и т. д. (рис. 90). При этом получается четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно равны.

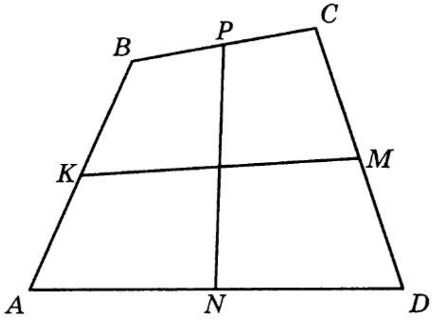


Рис. 90

8.26. Обозначим длины сторон большого и малого квадратов через $2x$ и $2y$ соответственно, радиус окружности — через R. Тогда расстояния от центра окружности до вершин вписанных квадратов, лежащих на окружности, дают выражения:

$$(2x - h)^2 + x^2 = R^2, \quad (2y + h)^2 + y^2 = R^2.$$

Отсюда получим $x - y = \frac{4}{5}h$. Тогда, разность длин сторон квадратов будет равна $\frac{8}{5}h$.

8.27. Диагональ делит исходный прямоугольник и два внутренних прямоугольника на равные треугольники (рис. 91). Отнимая от равных треугольников равные, получим фигуры равной площади.

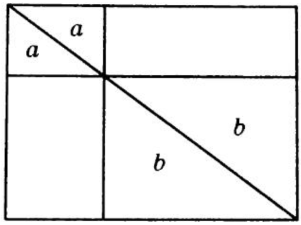


Рис. 91

8.28. Обозначим стороны исходного прямоугольника через a и b. Тогда его площадь будет равна ab, а площадь нового прямоугольника равна $(a - 1)(b - 1) = ab + a - b - 1$. Вычитая из старой площади новую, получаем, что $b - a + 1 = 1$, откуда $a = b$. Таким образом, исходный прямоугольник квадрат. А так как его площадь равна $144 \text{ см}^2 = 12^2 \text{ см}^2$, то обе его стороны равны 12 см.

8.29. Для выяснения истинности утверждения рассмотрим произвольный треугольник ABC, у которого $AB \neq BC$ и углы A и C — острые. Построим симметричный данному треугольнику относительно прямой AC треугольник ADC. Середину общей стороны AC обозначим M. Из того, что медиана делит треугольник на две равновеликие части, следует, что четырехугольник $ABCD$ и M удовлетворяют условию задачи. Но $ABCD$ не является параллелограммом. Поэтому рассматриваемое утверждение неверно.

8.30. Пусть данная точка M, а искомая прямая — MK. Определим положение точки K. Выполним дополнительное построение. Проведем из точки C высоту и медиану треугольника CD и CE, а из M перпендикуляр на основание треугольника AB (рис. 92).

Так как медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника, то $S_{BCE} = S_{CEA}$. А так как прямая MK делит треугольник также на два равновеликих, то $S_{BMK} = S_{BCE}$. Но

$$S_{BMK} = \frac{BK \cdot MP}{2} \quad \text{и} \quad S_{BCE} = \frac{BE \cdot CD}{2}.$$

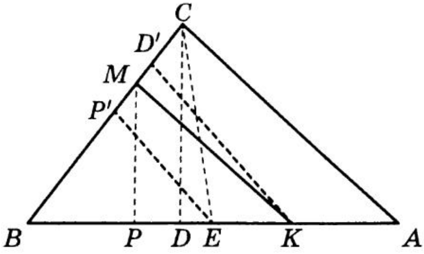


Рис. 92

Откуда получаем: $BK \cdot MP = BE \cdot CD$. Следовательно,

$$\frac{BE}{BK} = \frac{MP}{CD}.$$

Зная длины трех отрезков BE, MP и CD, можно построить отрезок BK. Для этого на стороне BC откладываем отрезки $BP' = MP$ и $BD' = CD$. Искомая точка K на отрезке AB получается проведением прямой параллельной $P'E$, проходящей через точку D' (рис. 92).

Значит, прямую MK надо провести таким образом, чтобы BK являлся четвертым пропорциональным.

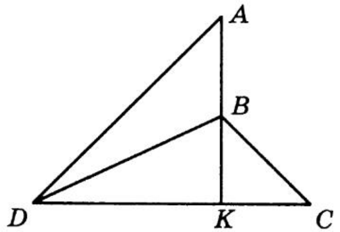


Рис. 93

8.31. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке K. В треугольнике ADK $\angle A = \angle D = 45°$, поэтому $CD \perp AB$, а треугольники ADK и CBK — прямоугольные и равнобедренные (рис. 93). Обозначим $AK = DK = a$, $BK = CK = b$. Площадь четырехугольника $ABCD$ равна сумме площадей треугольников ADK и CBK, т. е.

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Заметим, что из прямоугольного треугольника DKB имеем

$$DB^2 = DK^2 + KB^2 = a^2 + b^2.$$

Поэтому площадь четырехугольника равна $\frac{DB^2}{2}$, т. е. 8 м^2.

8.32. Нет, соответствующий пример показан на рис. 94.

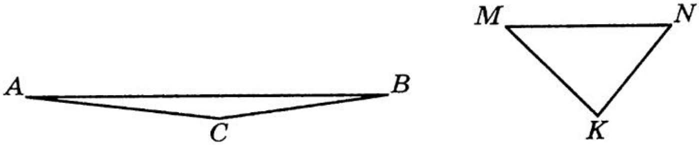


Рис. 94

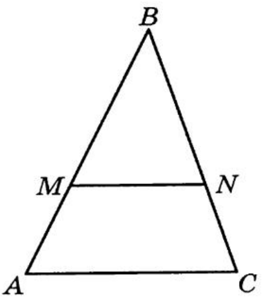


Рис. 95

8.33. Так как $MN \parallel AC$, то $\triangle ABC$ и $\triangle MBN$ будут подобными (рис. 95). Учитывая, что $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle MBN}$, получим

$$\frac{AB}{MB} = \sqrt{2}.$$

Тогда $AB = \sqrt{2}MB$ и

$$AM = AB - MB = \sqrt{2}MB - MB = (\sqrt{2} - 1)MB.$$

Поэтому $\frac{AM}{MB} = (\sqrt{2} - 1)$, следовательно

$$\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NB} = (\sqrt{2} - 1).$$

8.34. Для решения задачи необходимо рассмотреть несколько возможных случаев получения указанных треугольников, а также необходимо доказать, какие именно из треугольников имеют наибольшую и наименьшую площади.

Прямоугольник можно разрезать на три треугольника тремя способами (рис. 96).

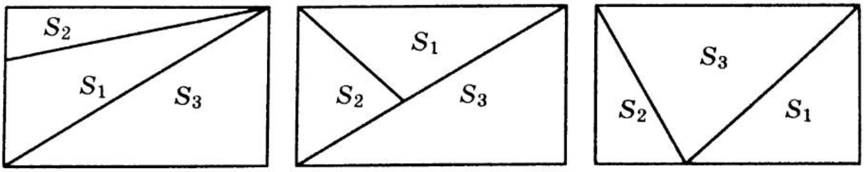


Рис. 96

Во всех трех случаях:

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = S_3, \\ S_1 = \dfrac{S_2 + S_3}{2}. \end{cases}$$

Обозначив $S_2 = x$ и выражая из системы S_1 и S_3, получим: $S_1 = 2x$, $S_3 = 3x$. Тогда $S_2 : S_1 : S_3 = 1 : 2 : 3$.

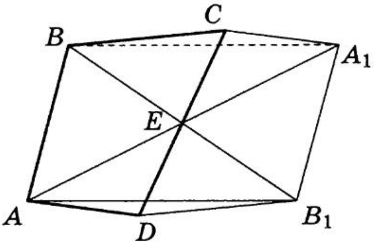


Рис. 97

8.35. Рассмотрим симметрию относительно точки E. Точки A и A_1, B и B_1 симметричны относительно точки E. Площадь параллелограмма AB_1A_1B в 4 раза больше площади треугольника ABE. А площадь многоугольника $ABCA_1B_1D$ тоже в 4 раза больше площади треугольника ABE, т. е. равна площади параллелограмма AB_1A_1B. Отсюда следует, что точка D лежит на AB_1 , а точка C лежит на BA_1 (рис. 97).

8.36. Пусть E и F — середины сторон BC и AD, а M и K — середины диагоналей AC и BD (рис. 98). Соединим последовательно точки K, F, M, E. Так как KF — средняя линия DBA, то $KF \parallel AB$ и

$$KF = \frac{AB}{2}.$$

Аналогично, так как EM — средняя линия CAB, то $EM \parallel AB$ и

$$EM = \frac{AB}{2}.$$

Следовательно, $KFME$ — параллелограмм. Так как KE — средняя линия DBC, то $KE \parallel DC$. По условию $AB \perp CD$ и по доказанному, $KF \parallel AB$, значит, $KE \perp KF$, то есть $KFME$ — прямоугольник. Так как диагонали прямоугольника равны, то $MK = EF = 8$ см.

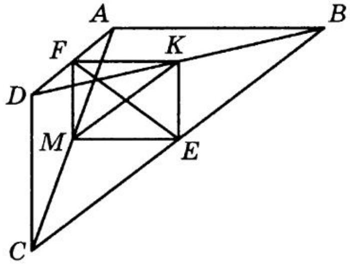


Рис. 98

8.37. Рассмотрим один из возможных способов решения.

Проведем в треугольнике ADC среднюю линию EF (рис. 99). Тогда

$$\frac{S_{\triangle BKF}}{S_{\triangle BEF}}, \tag{1}$$

так как высоты этих треугольников, проведенные из вершины F, совпадают. Кроме того, так как прямые EF и AC параллельны, то длины перпендикуляров, опущенных из точки B на прямые EF и AC, относятся как $BE : BK$, поэтому

$$\frac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{EF \cdot BE}{AC \cdot BK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BE}{BK}. \tag{2}$$

Перемножая почленно равенства (1) и (2), получим то, что требовалось доказать:

$$\frac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2}.$$

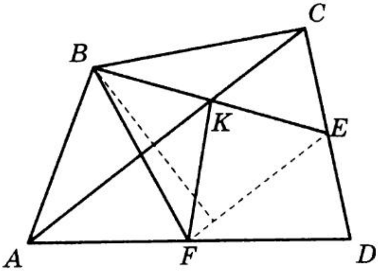


Рис. 99

8.38. Проведем прямую EM, параллельную прямой AC; прямую EK, параллельную прямой AB, и прямую ED, перпендикулярную прямой AB. Построим также угол CEP, равный углу CAB. Тогда мы получим пять треугольников MBE, KEC, MED, EBD, EPC, подобных треугольнику ABC (рис. 100).

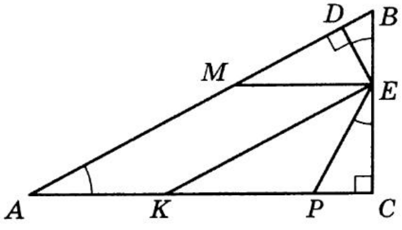


Рис. 100

8.39. Применяя свойство биссектрисы угла треугольника и учитывая, что треугольник является равнобедренным и прямоугольным, имеем (рис. 101):

$$\frac{S_{LMPA}}{S_{CKNL}} = \frac{LA^2}{LC^2} = \left(\frac{LA}{LC}\right)^2 = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{2AC^2}{AC^2} = 2.$$

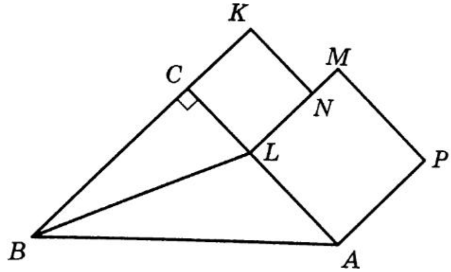


Рис. 101

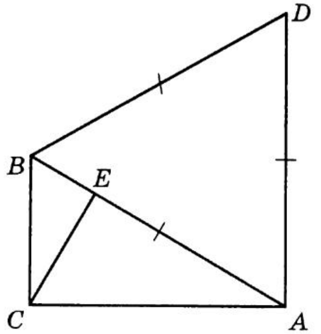


Рис. 102

8.40. Выполним дополнительное построение: проведем в прямоугольнике высоту CE (рис. 102). Обозначим для удобства:

$$AC = b, \quad BC = a, \quad AB = c, \quad CE = h, \quad BE = x.$$

Учитывая, что $S_{ABD} = 2S_{ABC}$, а $S_{ABD} = \dfrac{c^2\sqrt{3}}{4}$, получим, что

$$S_{ABC} = \frac{c^2\sqrt{3}}{8}.$$

Так как $S_{ABC} = \dfrac{ch}{2}$, то $\dfrac{c^2\sqrt{3}}{8} = \dfrac{ch}{2}$ и $h = \dfrac{c\sqrt{3}}{4}$. Так как треугольники CEB и AEC подобны, то

$$\frac{BE}{CE} = \frac{CE}{AE} \quad \text{или} \quad \frac{x}{h} = \frac{h}{c-x}.$$

Подставляя в эту пропорцию значение $h = \dfrac{c\sqrt{3}}{4}$, получим уравнение относительно переменной x: $16x^2 - 16cx + 3c^2 = 0$, корнями которого будут

$$x_1 = \frac{c}{4}, \quad x_2 = \frac{3c}{4}.$$

Рассмотрим треугольник BCE. Если $x = \frac{c}{4}$, то

$$\operatorname{tg} B = \frac{CE}{BE} = \frac{c\sqrt{3} \cdot 4}{4 \cdot c} = \sqrt{3}$$

и в этом случае $\angle B = 60^\circ$, $\angle A = 30^\circ$. Если $x = \frac{3c}{4}$, то $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$.

8.41. Равенство $a^2 + b^2 = c^2$ умножим на c: $a^2c + b^2c = c^3$. Так как $c > a$ и $c > b$, то $a^2c > a^3$, $b^2c > b^3$. Тогда $a^2c + b^2c > a^3 + b^3$. Но $a^2c + b^2c = c^3$, значит, $c^3 > a^3 + b^3$.

8.42. Допустим, что $AM = 2AK$. Тогда, так как

$$AK = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}} \quad \text{и} \quad AM = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}},$$

получим, что $AB = \text{a} = 0$, чего не может быть (рис. 103).

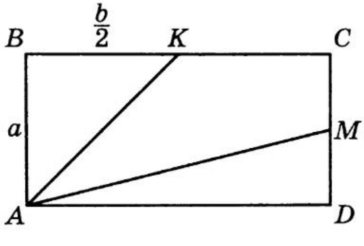


Рис. 103

8.43. Так как треугольник разрезается на два треугольника, то линия разреза должна проходить через одну из вершин. Пусть этой вершиной будет вершина B треугольника ABC, а прямая, которая делит треугольник на два треугольника, — прямая

BD. Обозначим $BD = x$, $AD = y$, тогда $DC = 9 - y$. Пусть периметр треугольника ABD равен 20, а периметр треугольника BDC — 23. Тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 9 + x + y = 20, \\ 9 + x + 9 - y = 23. \end{cases}$$

Решая данную систему уравнений, найдем $x = 8$, $y = 3$. Тогда $AD = 3$, $DC = 6$. Выполним дополнительное построение и проведем высоту треугольника BM (рис. 104). Так как в равностороннем треугольнике высота BM будет и медианой треугольника, то $BM = 4{,}5$ см. Из прямоугольных треугольников и по теореме Пифагора найдем BM^2.

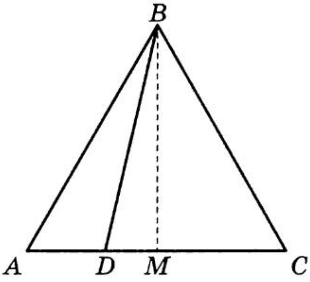


Рис. 104

Из треугольника ABM: $BM^2 = 9^2 - 4{,}5^2 = 60{,}75$.

Из треугольника DBM: $BM^2 = 8^2 - 1{,}5 = 61{,}75$. Так как $60{,}75 \neq 61{,}75$, то получаем противоречие. А это означает, что равносторонний треугольник разрезать, таким образом, невозможно.

8.44. По свойству биссектрисы треугольника

$$BE : ED = BD : DA \quad \text{и} \quad BD : DC = BF : FC,$$

но $AD = DC$, значит, $BE : EA = BF : FC$. Следовательно, $EF \parallel AC$, откуда

$$EM : MF = AD : DC = 1 : 1,$$

то есть DM — медиана треугольника EDF. Но

$$\angle EDF = \angle EDB + \angle FDB = \frac{1}{2}\angle ADB + \angle CDB =$$
$$= \frac{1}{2}(\angle ADB + \angle CDB) = 90^\circ.$$

Таким образом, $DM = \frac{1}{2}EF$ — по свойству медианы прямоугольного треугольника.

8.45. Треугольники AA_1D_1 и DD_1C_1 являются подобными, поэтому соответствующие стороны этих треугольников пропорциональны, то есть:

$$\frac{AA_1}{DD_1} = \frac{A_1D_1}{D_1C_1} = \frac{AD_1}{DC_1} = 3. \qquad (3)$$

Обозначая $AD_1 = y$, $C_1D = z$ (рис. 105), найдем $DD_1 = 4 - y$, $CC_1 = 3 - z = AA_1$. Подставляя вместо AA_1, DD_1, AD_1, C_1D соответственно $3 - z$, $4 - y$, y, z, из равенств (3) находим

$$y = \frac{27}{8}, \quad z = \frac{9}{8}.$$

Тогда $D_1C_1 = x = \frac{\sqrt{106}}{8}$, соответственно,

$$3x = A_1D_1 = \frac{3\sqrt{106}}{8}.$$

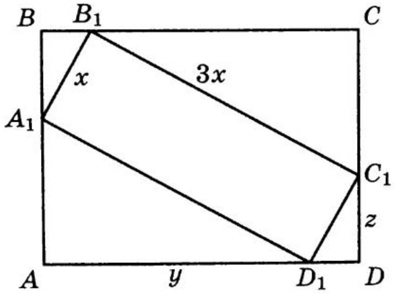


Рис. 105

8.46. Пусть в прямоугольнике $ABCD$ совмещены вершины A и C. Тогда A и C будут симметричны относительно прямой FE, которая перпендикулярна AC (рис. 106). Так как A и C совмещены, то $AO = CO$. Треугольники AOE и ADC — подобны (по двум углам), поэтому

$$\frac{OE}{CD} = \frac{AO}{OD}.$$

Обозначим $AB = x$, $BC = y$, тогда

$$AO = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Учитывая, что

$$\frac{OE}{CD} = \frac{AO}{OD},$$

находим

$$OE = \frac{x\sqrt{x^2 + y^2}}{2y}.$$

Так как треугольники AOE и COF равны (по катету и острому углу), то $OE = OF$, поэтому

$$EF = 2OE = \frac{x\sqrt{x^2 + y^2}}{y}.$$

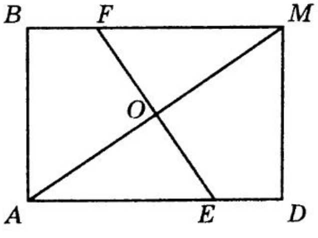


Рис. 106

8.47. Возможны два варианта: основаниями трапеции являются стороны AB и CD или AD и BC.

Рассмотрим *первый случай*. Тогда должно выполняться $\triangle AMB \sim \triangle CMD$, откуда

$$\frac{AM}{MC} = \frac{BM}{DM} \quad \text{и} \quad DM = \frac{MC \cdot BM}{AM}, \quad DM = \frac{4 \cdot 2}{1} = 8.$$

Во *втором случае* подобными треугольниками будут AMD и BMC. Тогда

$$\frac{AM}{MC} = \frac{BM}{DM},$$

откуда

$$DM = \frac{1 \cdot 2}{4} = 0{,}5.$$

Таким образом четырехугольник $ABCD$ является трапецией, если DM равно 8 или 0,5.

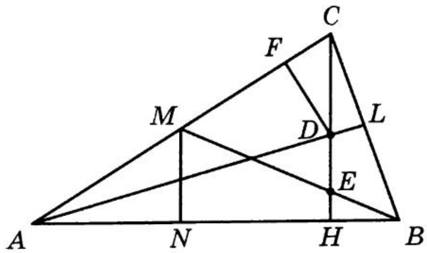


Рис. 107

8.48. Пусть в треугольнике ABC проведены биссектриса AL, медиана BM и высота CH, причем AL и CH пересекаются в точке D, BM и CH — в точке E (рис. 107). Допустим, что точки D и E делят высоту CH на три равные части. Опустим из точки M на прямую AB перпендикуляр MN. Он будет равен половине высоты CH. Значит, отрезок EH, который меньше, чем MN, равен трети высоты. Тогда отрезок DH должен составлять две трети высоты. Опустим из точки D перпендикуляр DF на сторону AC. По свойству биссектрисы угла $DF = DH$. Но это невозможно, ибо в таком случае катет DF прямоугольного треугольника CDF оказывается вдвое длиннее его гипотенузы CD, составляющей треть высоты CH. Значит, наше допущение неверно, и медиана с биссектрисой разделить высоту треугольника на три равные части не могут.

8.49. Чтобы выполнялось равенство $S_{AOB} = S_{BOD} = S_{AOE}$, необходимо, чтобы $AO = OD$, $BO = OE$ (рис. 108). Но тогда точка O лежит на двух средних линиях треугольника ABC, что невозможно. Поэтому разрезать треугольник так нельзя.

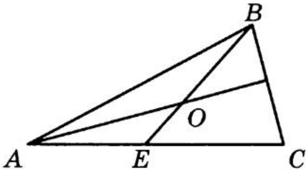


Рис. 108

8.50. Да. Пусть $\angle A$ — наибольший в $\triangle ABC$ (рис. 109). Проведем среднюю линию треугольника: MN. Она поделит высоту AH пополам. Загнем $\triangle ABC$ по MN, тогда A и H совпадут. При этом: $AM = HM$, $AN = HN$. Тогда высоты треугольников CMH и HNB: MD и NF будут и медианами, поэтому, загибая данные треугольники по MD и NF, получим, что треугольники DMH и DMC; BNF и HNF совместятся.

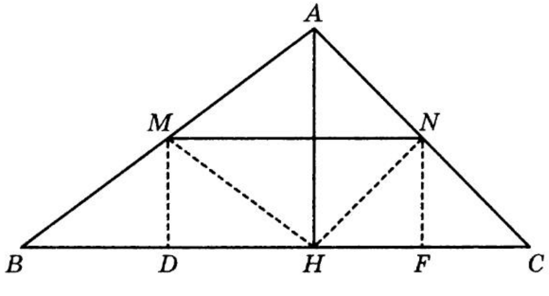


Рис. 109

8.51. Колодец надо вырыть в центре окружности, проходящей через три указанные точки.

8.52. Пусть MC пересекается с AD в точке E (рис. 110). Тогда $AE = CE$, как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки. Выполним дополнительное построение: проведем AB и OC. Так как $OB = OC$, то $\angle OBC = \angle OCB$. Так как прямые OC и CE перпендикулярны, то

$$\angle ECD = \angle BCM = 90^\circ - \angle OCB = 90^\circ - \angle OBC.$$

Рассмотрим треугольник ABD: $\angle BDA = 90^\circ - \angle OBC$, значит, $\angle BDA = \angle ECD$, а значит, треугольник ECD — равнобедренный, поэтому $CE = DE$. Но так как $AE = CE$, то $AE = DE$.

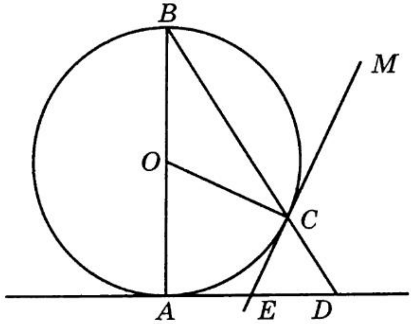


Рис. 110

8.53. Очевидно, $BM = BN$, как отрезки касательных к окружности, проведенные из точки B. Кроме этого, прямые DE и MN параллельны, значит, $BD = BE$. Проведем прямые через точки A и C, параллельные прямой DE (рис. 111). Тогда $AGCF$ — трапеция. В ней ED параллельна основаниям и делит диагональ трапеции AC пополам. Поэтому на этой прямой лежат средние линии треугольников AFC и AGC. Значит, точки D и E являются серединами сторон трапеции AF и CG. А так как $AF = CG$, то

$$AD = \frac{AF}{2} = \frac{CG}{2} = CE.$$

8.54. Утверждение задачи равносильно тому, что сумма величин углов DFG и DEG равна 180°. Обозначим точку пересече-

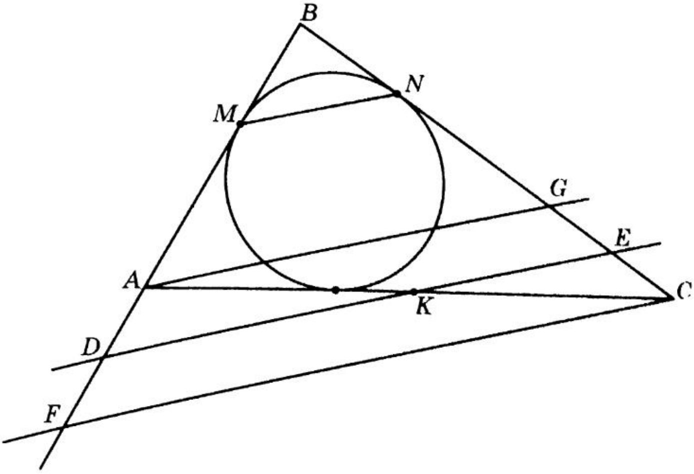


Рис. 111

ния высот треугольника ABC через O. Углы ODB и OEB прямые, поэтому четырехугольник $BDOE$ вписанный, следовательно, углы OBD и OED равны, как опирающиеся на общую дугу OD. Отрезок EG параллелен стороне AB, следовательно, $\angle CEG = \angle CBA$, и

$$\angle DEG = \angle OED + 90^\circ - \angle CEG = 90^\circ - \angle BAC + 90^\circ - \angle CBA = \\ = 180^\circ - (180^\circ - \angle ACB) = \angle ACB.$$

В силу параллельности отрезка DF стороне BC верно равенство

$$\angle DFG = 180^\circ - \angle ACB,$$

следовательно, четырехугольник $DEGF$ является вписанным, что и требовалось доказать.

8.55. Допустим, что биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекутся в точке D, лежащей на описанной окружности (рис. 112).

Тогда сумма вписанных углов BAC и BDC равна 180°. С другой стороны,

$$\angle CBD = \frac{180^\circ - \angle CBA}{2} \quad \text{и} \quad \angle BCD = \frac{180^\circ - \angle BCA}{2},$$

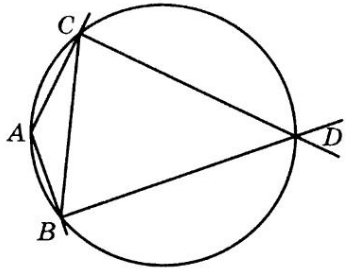


Рис. 112

откуда

$$\angle BDC = 180^\circ - \angle CBD - \angle BCD = \frac{\angle CBA + \angle BCA}{2}.$$

Получается, что

$$\angle BAC + \angle BDC = \angle BAC + \frac{\angle CBA + \angle BCA}{2} = 180^\circ.$$

Но из треугольника ABC получаем также, что

$$\angle BAC + \angle CBA + \angle BCA = 180^\circ.$$

Значит, $\angle CBA + \angle BCA = 0^\circ$, что невозможно.

8.56. Выполним дополнительное построение: проведем диаметр DK (рис. 113). Тогда $\angle KBD = 90^\circ$, а четырехугольник $AKBC$ будет трапецией ($KB \perp BD$, $AC \perp BD \Rightarrow KB \parallel AC$). Так как четырехугольник вписанный, то $AK = BC$.

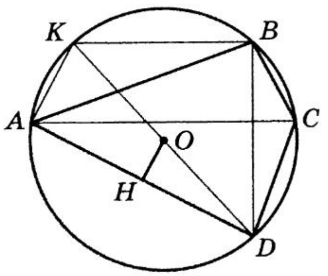


Рис. 113

Так как KD — диаметр, то $\triangle AKD$ — прямоугольный, поэтому $KA \perp AD$ и $OH \perp AD$. Треугольники же OHD и KAD будут подобными (по 2 углам), а значит,

$$\frac{KA}{OH} = \frac{KD}{OD} = \frac{2R}{R} = 2.$$

8.57. Выполним дополнительное построение: проведем медиану CO, $CO = \frac{1}{2}AB$ (рис. 114). Так как в прямоугольном треугольнике CDO катет CD короче гипотенузы CO, то $h < CO$, а значит,

$$h < \frac{1}{2}AB.$$

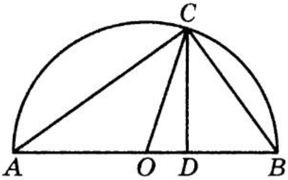


Рис. 114

8.58. Задача имеет несколько вариантов решения. Рассмотрим один из наиболее простых. Выполним дополнительное построение: соединим точку касания M окружности с прямой AB с центром окружности O и проведем прямую CE, параллельную боковой стороне трапеции AB. Точку E соединим с центром окружности O (рис. 115). Так как треугольники OCK и OEK будут равны по гипотенузе и катету, то $CK = EK$, и значит, $BM = AM$, то есть $AM = AB$. В прямоугольнике $ABCE$ верно $BC = AE$. Так как AM — касательная к окружности, а AD — секущая, то $AM^2 = AD \cdot AE$. Учитывая, что $AM = \frac{1}{2}AB$, получаем

$$AB^2 = 4BC \cdot AD.$$

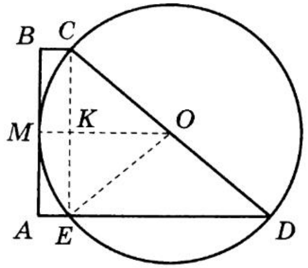


Рис. 115

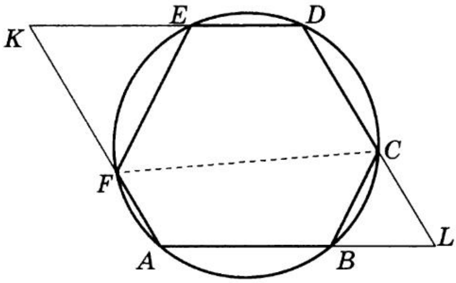


Рис. 116

8.59. Для решения задачи выполним дополнительное построение: продолжим стороны AB и CD, AF и DE (рис. 116). Тогда фигура $KDLA$ является параллелограммом.

Противоположные углы параллелограмма BAF и CDE равны. Оба эти угла вписаны в окружность, поэтому дуги BDF и CAF, на которые они опираются, тоже равны. Значит, равны и дополнительные к ним дуги BAF и CDE, а вместе с ними и опирающиеся на них вписанные углы BEF и CBE. Но последние два угла являются внутренними накрест лежащими углами при прямых BC и EF и секущей BE. Поэтому $BC \parallel EF$.

8.60. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC угол C — прямой. Обозначим центры квадратов, построенных на сторонах треугольника AC, BC и AB, через D, E, F (рис. 117). Докажем, что точки D и E лежат на прямой CF. Углы C и F — прямые, поэтому четырехугольник $ACFB$ — описанный. Отсюда углы ABC и AFC равны. С другой стороны, в треугольнике AFD угол

AFD равен углу ABC, поэтому точка D лежит на прямой FC. Аналогично, точка E лежит на прямой FC.

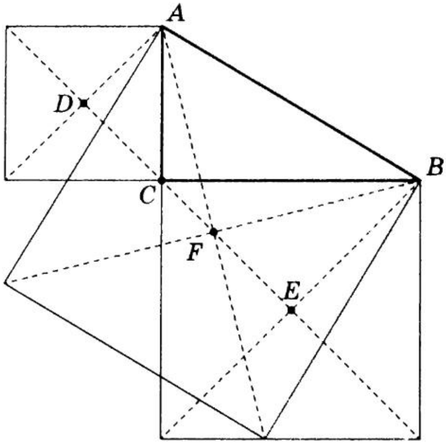


Рис. 117

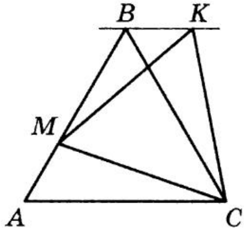


Рис. 118

8.61. Треугольники ABC и MKC — равносторонние, поэтому $\angle ABC = \angle MKC = 60^\circ$ (рис. 118). Данные углы можно рассматривать как вписанные, опирающиеся на одну дугу MC. Значит, точки M, B, K, C лежат на одной окружности. Поэтому:

$$\angle KMC = \angle KBC = 60^\circ = \frac{1}{2}\angle KC.$$

Тогда

$$\angle BAC + \angle ABK = 60^\circ + (60^\circ + 60^\circ) = 180^\circ.$$

Прямые AC и BK пересечены AB и сумма внутренних односторонних углов при прямых AC и BK и секущей AB равна 180°, поэтому прямые AC и BK будут параллельны.

8.62. Рассмотрим один из возможных вариантов решения задачи.

Выберем на сторонах угла произвольно по две точки: A, N, B, M (рис. 119), и рассмотрим получившиеся треугольники ABC и NMC. Проведем в каждом из этих треугольников биссектрисы углов. Точка пересечения биссектрис углов треугольника ABC принадлежит и биссектрисе угла C. Аналогично, точка пересечения двух биссектрис углов треугольника NMC также лежит на биссектрисе угла C. Проводим через эти две точки прямую, которая и будет биссектрисой угла C.

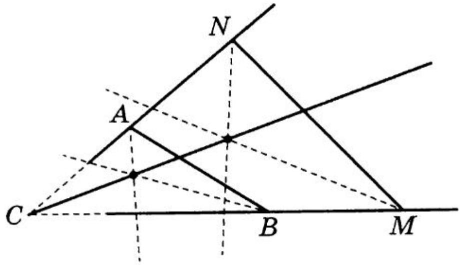


Рис. 119

Найдите другие способы решения.

8.63. Пусть OS — расстояние от центра описанной окружности O до стороны BC (рис. 120), а PA — расстояние от точки пересечения высот треугольника до вершины A. Выполним дополнительное построение: проведем диаметр CN. Тогда OS окажется средней линией треугольника BCN, а значит, будет равна половине BN. Поскольку $\angle NBC$ — прямой, то $NB \perp BC$; $AK \perp BC$, значит, прямые NB и AK параллельны. Аналогично, прямые NA и BP будут параллельны. Таким образом, $ANBP$ — параллелограмм, поэтому

$$AP = NB = 2OS.$$

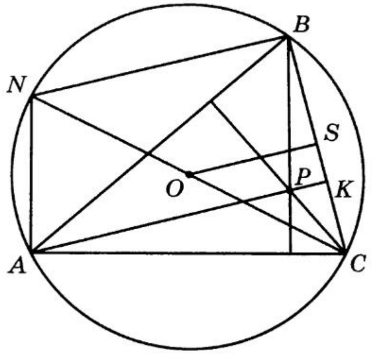


Рис. 120

8.64. Углы AKH и ALH прямые, поэтому четырехугольник $AKHL$ — вписанный, следовательно, углы KAH и KLH равны, как опирающиеся на общую дугу KH (рис. 121). Значит,

$$\angle KLC = 90^\circ + \angle KAH = 90^\circ + 90^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle ABC,$$

поэтому в четырехугольнике $BKLC$ сумма противоположных углов при вершинах B и L равна

$$\angle KLC + \angle KBC = \angle KLC + \angle ABC = 180^\circ,$$

следовательно, вокруг него можно описать окружность, что и требовалось доказать.

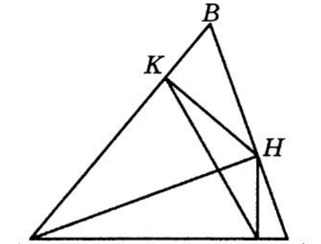


Рис. 121

8.65. Длина ломаной $PMNQ$ складывается из длин отрезков PM, MN и NQ. Отрезок MN — средняя линия треугольника ABC, поэтому его длина равна половине длины AC. Далее, треугольники BAP и BCQ — прямоугольные, а отрезки MP и QN являются в них медианами, проведенными к гипотенузам, следовательно, их длины равны половинам этих гипотенуз, т. е. половинам сторон AB и BC соответственно. Значит, длина ломаной равна сумме половин длин сторон треугольника ABC, т. е. его полупериметру.

8.66. Для доказательства требуемого равенства выполним дополнительное построение: построим отрезок OE, равный по длине и параллельный отрезку AD (рис. 122). Тогда $AOED$ — параллелограмм, следовательно, $\angle OED = \angle OAD = \angle OCD$ и четырехугольник $OCED$ — вписанный в некоторую окружность.

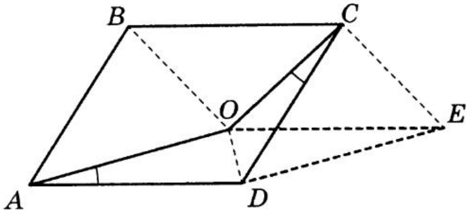


Рис. 122

Значит, $\angle ODC = \angle OEC$, как углы, опирающиеся на одну и ту же хорду. Но четырехугольник $OBCE$ — тоже параллелограмм. Поэтому $\angle OEC = \angle OBC$, откуда и следует, что

$$\angle OBC = \angle ODC.$$

8.67. Проведем в равнобочной трапеции диагональ и высоту. Так как средняя линия трапеции равна длине отрезка AF, а $S_{ABCD} = AF \cdot CF$, то $AF \cdot CF = 1$ (рис. 123).

Обозначим $AF = m$, $CF = h$, тогда $m \cdot h = 1$. Из прямоугольного треугольника ACF, обозначив $AC = d$, получим:

$$m^2 \cdot h^2 = d^2.$$

Так как $m^2 + h^2 = (m - h)^2 + 2mh$, то, учитывая, что $m \cdot h = 1$, имеем:

$$d^2 = (m - h)^2 + 2.$$

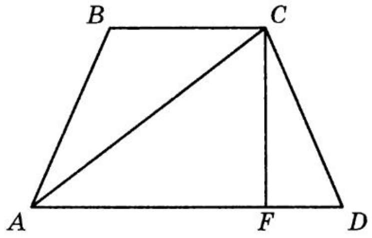


Рис. 123

Так как $(m-h)^2+2 \geqslant 2$, то минимальное значение диагонали будет равно $\sqrt{2}$ м, оно получится при $m = h$.

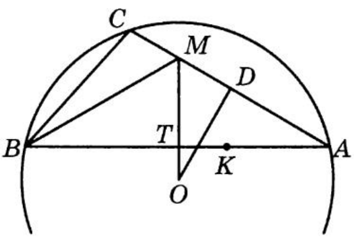


Рис. 124

8.68. Проведем через центр O описанной около треугольника ABC окружности прямую $OM \perp AB$ и пусть $M \in AC$, $T \in AB$. Пусть $OD \perp AC$. Тогда D — середина стороны AC, то есть $AD = \frac{a}{2}$ (рис. 124). Кроме того, треугольник ABM — равнобедренный с углами при основании $30°$. Пусть $OD = x$. Тогда из треугольника DOM имеем

$$DM = \frac{x}{\sqrt{3}},$$

и, следовательно, $AM = \frac{a}{2} + \frac{x}{\sqrt{3}}$. Далее, из треугольника TAM получаем

$$AT = AM \cdot \cos 30° = AM \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

то есть

$$AB = AM \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} + x,$$

и, следовательно,

$$BK = AB - AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

8.69. Для решения задачи докажем равенство площадей треугольников OA_1B_1 и ABC. Для этого построим вектор $A_1D = BC$ (рис. 125). Треугольники OA_1D и ABC равны. Площадь каждого из них равна половине параллелограмма OA_1DB_1. Но площадь OA_1B тоже равна половине площади OA_1DB_1. Значит, площади треугольников OA_1B_1 и ABC равны. Аналогично равны площади треугольников OA_1C_1 и ABC, OC_1B_1 и ABC. Значит, площадь треугольника $A_1B_1C_1$ больше площади треугольника ABC в 3 раза.

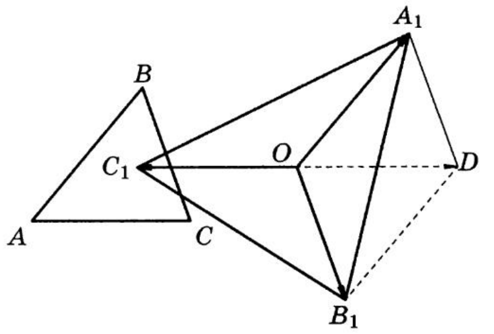


Рис. 125

8.70. Пусть всего сделано x горизонтальных разрезов и y вертикальных. Длина стороны квадрата равна a. Сумма периметров получившихся прямоугольников равна $(2x + 2)a + (2y + 2)a$. По условию $(2x + 2)a + (2y + 2)a = 400a$, откуда $x + y = 198$. Общее число получившихся прямоугольников равно

$$(x+1)(y+1) = (x+1)(199 - x) = 199 + 198x - x^2$$

и, как квадратичная функция от x, достигает максимума при

$$x = \frac{-198}{-2 \cdot 1} = 99.$$

Тогда число прямоугольников получится равным 10 000.

8.71. Для доказательства требуемого утверждения применим векторный метод. Так как $ACPH$ — параллелограмм, то

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HP}, \quad \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AH}. \tag{4}$$

Так как $AMBE$ — параллелограмм, то

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{EB}, \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AE}. \tag{5}$$

Так как $AHBT$ — параллелограмм, то

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{TB}, \quad \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AT}. \tag{6}$$

Так как $BKXM$ — параллелограмм, то

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{MX}, \quad \overrightarrow{KX} = \overrightarrow{BM}. \tag{7}$$

Так как $CKXP$ — параллелограмм, то

$$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{PX}, \quad \overrightarrow{KX} = \overrightarrow{CP}. \tag{8}$$

Для доказательства того, что четырехугольник $ABTE$ является также параллелограммом, достаточно доказать, что $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BT}$.

Так как $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{KX} = \overrightarrow{BM}$ (формулы (5) и (7)), то $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{XK}$. Поскольку и $\overrightarrow{KX} = \overrightarrow{CP}$ (в силу (8)), то $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{PC}$. А так как и $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AH}$ (в силу (4)), то $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{HA}$. А учитывая (6), получаем $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BT}$, что и означает, что $ABTE$ — параллелограмм.

8.72. Построим прямоугольный треугольник с катетами $\sqrt{5}$ и $2\sqrt{5}$. Так как гипотенуза данного треугольника равна 5 см, то, разделив ее на 5 равных частей, получим отрезок длиной 1 см.

8.73. На средней из трех заданных параллельных прямых возьмем произвольную точку и обозначим ее A, повернем верхнюю прямую на 60° вокруг точки A, повернутая прямая пересечет нижнюю прямую в точке, которую обозначим B, тогда A и B — вершины искомого треугольника, AB — его сторона. Из точки A проведем дугу радиуса AB до пересечения с верхней прямой, получим точку C — третью вершину треугольника.

8.74. Для построения равностороннего треугольника достаточно осуществить поворот плоскости вокруг данной точки на 60°. Точки пересечения данной прямой и окружности будут являться двумя вершинами искомого треугольника.

8.75. Треугольники ACD и BCE равны (первый из них переходит во второй при повороте на 60° против часовой стрелки). Следовательно, отрезки CM и CP, как медианы этих треугольников, равны и угол между ними 60°. Значит, треугольник CMP — равносторонний.

9 класс

9.1. Построенными точками будут точки A, C, D. Соединив точки (рис. 126), получим четырехугольник, у которого полудиагонали равны и взаимно перпендикулярны, поэтому это квадрат.

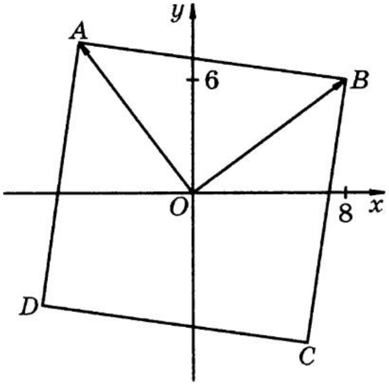


Рис. 126

9.2. Введем систему координат следующим образом: центр ее в точке A, ось абсцисс направим вдоль луча AD, а ось ординат — вдоль луча AB. За единичный отрезок возьмем сторону квадрата. Найдем в данной системе координат координаты векторов

$\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$: $\overrightarrow{AC}(3; 1)$, $\overrightarrow{BD}(2; -1)$. Найдем скалярное произведение данных векторов: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 5$. С другой стороны,

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BD}\right| \cdot \cos\alpha,$$

где α — искомый угол. Так как

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}, \quad \text{а} \quad \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5},$$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 5$, то $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому $\alpha = 45^\circ$ (угол между двумя прямыми есть минимальный из углов, образующихся при пересечении этих углов).

9.3. Пусть ABC — заданный треугольник с прямым углом при вершине C и пусть $AC = b$ и $BC = a$ (рис. 127). Пусть $CD \perp AB$ и $CD = h$ и пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда расстояния от точки M — точки пересечения медиан $\triangle ABC$ — до сторон треугольника будут равны $\dfrac{b}{3}$, $\dfrac{a}{3}$, $\dfrac{h}{3}$ а площадь искомого треугольника S_1 равна

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{3} \cdot \frac{b}{3} + \frac{a}{3} \cdot \frac{h}{3} \sin\alpha + \frac{b}{3} \cdot \frac{h}{3} \cdot \cos\alpha\right).$$

Но $a\sin\alpha + b\cos\alpha = c$, где c — гипотенуза ABC. Следовательно,

$$S_1 = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right) ab + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right) hc = \frac{2}{9} S.$$

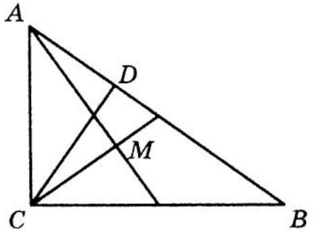


Рис. 127

Так как $\angle MBC = \angle MKC = 60^\circ$, то через точки M, K, B, C можно провести окружность. Тогда $\angle KBC = \angle KMC = 60^\circ$ (как вписанные). Поэтому $\angle BAC + \angle ABK = 60^\circ + (60^\circ + 60^\circ) = 180^\circ$, а значит, BK и AC будут параллельными.

9.4. По условию точку можно выбрать в любом месте треугольника ABC, в частности в его вершинах, откуда следует, что высоты треугольника равны между собой. Пусть AD и CE — высоты, опущенные из вершин A и C соответственно (рис. 128), тогда прямоугольные треугольники ADC и ACE равны между собой по гипотенузе и катету, поэтому величины углов BAC и BCA равны. Аналогично, рассматривая прямоугольные треугольники ABK и ABD, мы докажем их равенство, а значит, равны и величины углов ABC и BAC. Таким образом, в треугольнике все углы равны, а значит, треугольник ABC будет равносторонним, а значит, и правильным.

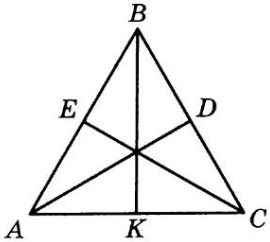


Рис. 128

9.5. Так как оставшийся кусок имеет форму правильного восьмиугольника, а отрезанных кусков — пять, то они могут иметь не больше одной общей стороны со стороной восьмиугольника. Значит, минимум три стороны восьмиугольника принадлежат квадрату. Поэтому форма искомой стенгазеты будет квадрат со стороной, равной расстоянию между противоположными сторонами восьмиугольника. Вырезаны же были: либо пять треугольников, либо четыре треугольника и один четырехугольник, причем два треугольника (или один треугольник и четырехугольник) в сумме составляют один из оставшихся трех треугольников.

9.6. Центр шестиугольника соединяем с тремя вершинами шестиугольника, как показано на рис. 129. Получили три параллелограмма, которые делим каждый на четыре равные части. В результате получаем требуемое разбиение.

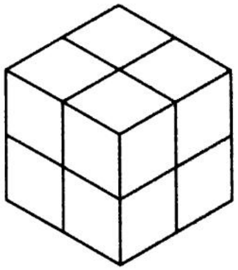


Рис. 129

9.7. На рис. 130 показано, как можно разбить правильный восьмиугольник на 12 многоугольников (6 из закрашенной области и 6 из незакрашенной области). Многоугольники с одинаковой площадью обозначены одинаково. Поэтому площади закрашенной и незакрашенной частей многоугольника равны.

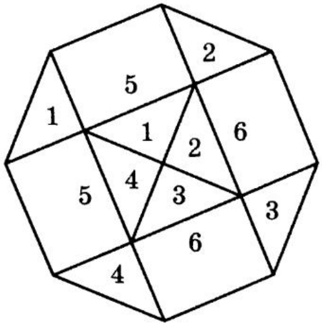


Рис. 130

9.8. Обозначим через b и a радиусы полуокружностей, построенных на катетах AC и CB соответственно, а радиус круга, построенного на гипотенузе, — через c. Искомая площадь (она на рис. 131 закрашена) находится следующим образом:

$$S = \frac{\pi a^2}{2} + \frac{\pi b^2}{2} + S_{\triangle ABC} - \frac{\pi c^2}{2} = \\ = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 - c^2) + S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABC} = 10\ (\text{см}^2).$$

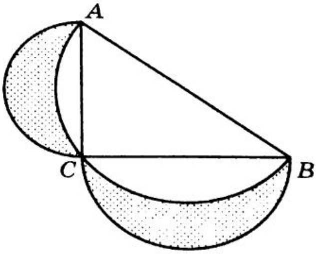


Рис. 131

9.9. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник. Тогда (все данные приведены на рис. 132):

$$S_1 = \frac{ad\sin(180^\circ - x)}{2}; \quad S_2 = \frac{ab\sin x}{2};$$
$$S_3 = \frac{bc\sin(180^\circ - x)}{2}; \quad S_4 = \frac{bc\sin x}{2}.$$

Поэтому

$$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4 = \frac{abcd\sin^2 x}{4},$$

что и требовалось доказать.

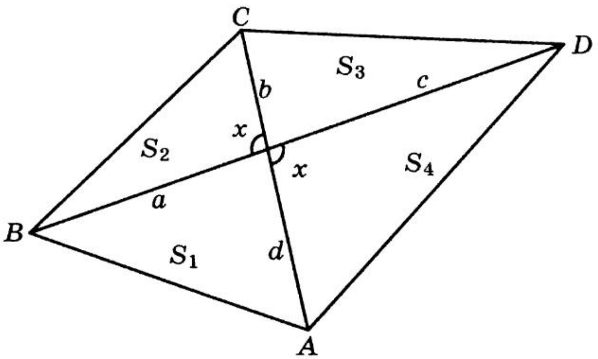


Рис. 132

9.10. Пусть S — площадь треугольника. С одной стороны,

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C,$$

но, по условию

$$S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

Выразим из данных формул $\sin C$:

$$\sin C = 1 + \frac{(a-b)^2}{2ab}.$$

Так как $\sin C \leqslant 1$, то $\dfrac{(a-b)^2}{2ab} \leqslant 0$. Но $\dfrac{(a-b)^2}{2ab} \geqslant 0$, поэтому

$$\frac{(a-b)^2}{2ab} = 0.$$

Тогда $\sin C = 1$, значит, $\angle C = 90°$. Так как $a = b$, то $\angle A = \angle B = 45°$.

9.11. Обозначим угол A за α, и пусть $AO = a$, $AB = b$ (рис. 133). Тогда найдем стороны треугольника DMN, применяя теорему косинусов к треугольникам AMD, BMN, CDN:

$$MD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha + 60°) = MN^2 = DN^2.$$

Так как квадраты сторон треугольника DMN равны, то и сами стороны будут равны, т. е. треугольник будет равносторонним.

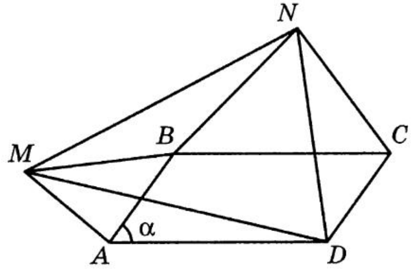


Рис. 133

9.12. Пусть у данного треугольника ABC величина угла B на $120°$ больше величины угла A, равной α. Пусть M — точка пересечения биссектрисы угла C со стороной AB и пусть N — основание высоты, опущенной из вершины C на продолжением стороны AB. Величина угла C равна $60° - 2\alpha$, тогда величина угла ACM равна $30° - \alpha$, а величина угла BMC будет равна $30°$, поэтому

$$\frac{NC}{MC} = \sin 30° = \frac{1}{2}.$$

9.13. Пусть в треугольнике ABC угол A равен $30°$, а O — центр описанной окружности. Поскольку вписанный угол BAC вдвое меньше центрального угла BOC, опирающегося на ту же дугу, то $\angle BOC = 60°$. Поскольку $OB = OC$ и $\angle BOC = 60°$, то треугольник BOC — равносторонний. А это означает, что сторона BC равна радиусу описанной окружности (сторону BC можно было найти и по теореме синусов: $BC = 2R\sin 30° = R$). Так как $BC < AB + AC$, то

$$\frac{BC}{2} < \frac{AB}{2} + \frac{AC}{2},$$

откуда получим:

$$\frac{BC}{2} + \frac{BC}{2} < \frac{AB}{2} + \frac{AC}{2} + \frac{BC}{2}.$$

А это и означает, что $BC < \dfrac{AB + AC + BC}{2}$.

9.14. Пусть стороны треугольника равны b, bq, bq^2, площадь треугольника S, тогда высоты треугольника соответственно равны: $\dfrac{2S}{b}$, $\dfrac{2S}{bq}$, $\dfrac{2S}{bq^2}$, то есть тоже образуют геометрическую прогрессию.

9.15. Отметим координаты указанных точек на плоскости и построим прямую, заданную уравнением $x + 7y - 67 = 0$ (рис. 134).

Замечаем, что координаты точки $C(11; 8)$ удовлетворяют уравнению прямой. Таким образом, получили четырехугольник $ABCD$, который разбивается данной в условии прямой a на четырехугольник и треугольник. Выясним вид четырехугольника $ABCD$. Для этого найдем координаты векторов AB

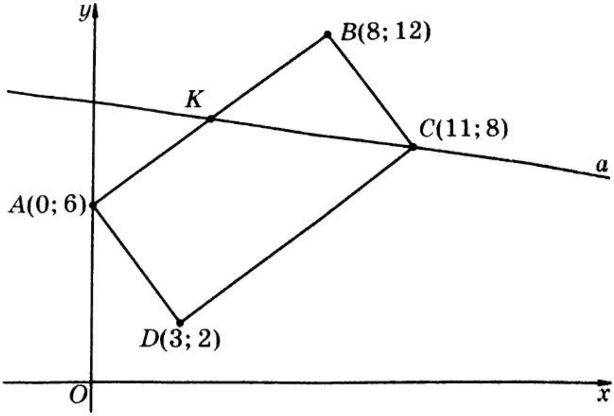


Рис. 134

и DC: $\overrightarrow{AB}\{8; 6\}$, $\overrightarrow{DC}\{8; 6\}$. Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, то четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом. Выясним, не является ли данный параллелограмм прямоугольником. Для этого найдем координаты вектора AD и скалярное произведение векторов AD и DC. Так как $\overrightarrow{AD}\{3; -4\}$ и $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$, то параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником, а $AKCD$ — прямоугольной трапецией. Найдем координаты точки K. Для этого найдем координаты середины отрезка AB и подставим их в уравнение прямой. Получим, что координаты середины отрезка (4; 9) удовлетворяют уравнению прямой, а значит, точка $K(4; 9)$ лежит на прямой a. Для нахождения площадей трапеции и треугольника найдем длины отрезков: $AD = 5$, $DC = 10$, $AK = 5$. Тогда

$$S_{AKCD} = \frac{AK + DC}{2} \cdot AD = 37{,}5.$$

Так как $S_{AKCD} = 50$, то $S_{CBK} = 50 - 37{,}5 = 12{,}5$.

10 класс

10.1. Данная фигура существует. Ее можно получить из 2 равных треугольников ABC и BCD, приложенных друг к другу по стороне BC под некоторым углом (рис. 135).

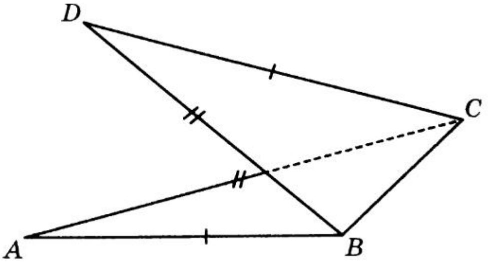


Рис. 135

10.2. Рассмотрим $\triangle AMB$ (рис. 136), в нем KH — средняя линия, поэтому

$$KH = \frac{1}{2}MB = 8{,}5 \text{ (см)}.$$

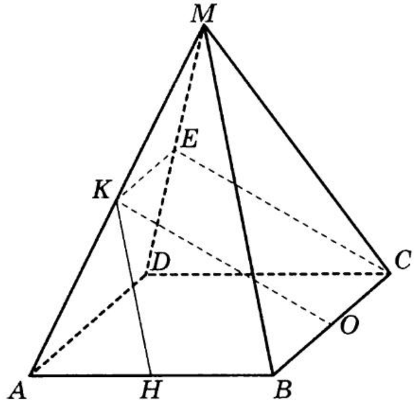


Рис. 136

Проведем $KE \parallel AD$, $KECO$ — параллелограмм ($KE \parallel AD$, $AD \parallel BC$), поэтому $KE \parallel OC$;

$$KE = OC = \frac{1}{2}AD.$$

Применяя теорему косинусов для $\triangle DMC$ и $\triangle EMC$, находим $\angle DMC = \dfrac{271}{289}$ и $EC = 9{,}5$ см. Значит, и $KO = 9{,}5$ см.

Оставшиеся два расстояния от точки K до сторон AD и DC будут по 8,5 см и 9,5 см. Они находятся аналогично тому, как нашли KH и KO.

10.3. Боковая поверхность пирамиды состоит из четырех равнобедренных и равных треугольников. Разрежем боковую поверхность пирамиды по боковым ребрам и развернем на плоскости. Тогда получим фигуру, изображенную на рис. 137. При этом общая точка треугольников — вершина пирамиды. Если бы угол грани при вершине пирамиды был $95°$, то сумма четырех углов была бы равна $380°$. А это невозможно, так как сумма углов при вершине пирамиды меньше $360°$ (это видно из рис. 137).

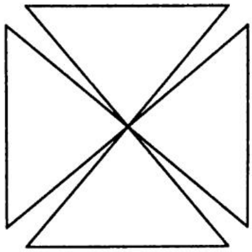


Рис. 137

10.4. Рассмотрим середины ребер AC, AD, BC и BD — точки K, L, M, N. Так как KL и MN параллельны (KL и MN параллельны AC), то точки K, L, M и N лежат в одной плоскости (рис. 138). $KLMN$ — искомое сечение, так как $LK = KN$ и $KL \perp KN$. Последнее вытекает из того, что $AB \perp CD$.

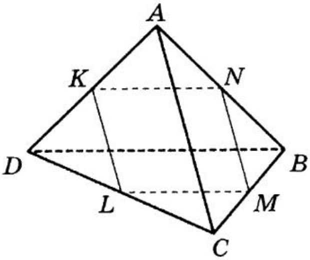


Рис. 138

10.5. Минимальная площадь сечения получается, если точка M является серединой DC. Найдя длины диагоналей ромба BMD_1N, находим площадь сечения, как площадь ромба (рис. 139). В результате получаем:

$$S_{\text{сеч.}} = \sqrt{\frac{3}{2}}a^2.$$

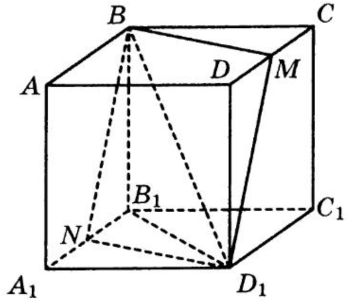


Рис. 139

10.6. Так как между ребрами, гранями и вершинами выпуклого многогранника есть связь, выражаемая формулой Эйлера: В + Г – Р = 2, где В — число вершин, Г — число граней, Р — число ребер, то В = Р + 2 – Г. Граней у данного многогранника 32. Число ребер будет равно

$$\frac{20 \cdot 6 + 12 \cdot 5}{2} = 90.$$

Тогда В = 90 + 2 – 32 = 60. Таким образом, многоугольник имеет 60 вершин.

11 класс

11.1. Обозначим три вектора из данных через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Заметим, что $2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{b} + \vec{c}) + (\vec{a} + \vec{c})$. Отложим последовательно три вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c} + \vec{a}$.

Тогда $\overrightarrow{AD} = 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. Длина данного вектора будет не больше длины ломаной $ABCD$, каждое звено которой не длиннее 2. Получается, что длина $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ не превосходит $6 : 2 = 3$, что и требовалось доказать.

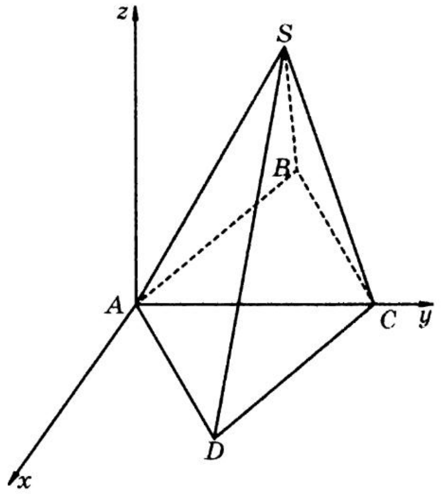


Рис. 140

11.2. Пусть $SABCD$ — данная пирамида. Введем прямоугольную декартовую систему координат, как на рис. 140. Обозначим сторону ромба через a, тогда координаты всех четырех вершин пирамиды будут следующие:

$$A(0;0;0), \quad B\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), \quad C(0; a\sqrt{3}; 0),$$

$$D\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), \quad S(x; y; \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}).$$

Зная координаты всех вершин ромба, найдем квадраты длин ребер DS, BS, CS:

$$DS^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (a^2 - x^2 - y^2) =$$

$$= -ax - a\sqrt{3}y + 2a^2;$$

$$BS^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (a^2 - x^2 - y^2) =$$
$$= -ax - a\sqrt{3}y + 2a^2;$$
$$CS^2 = x^2 + (y - a\sqrt{3})^2 + (a^2 - x^2 - y^2) = -2a\sqrt{3}y + 2a^2.$$

Так как $CS^2 = BS^2 + DS^2$, то из ребер CS, BS, DS можно составить прямоугольный треугольник.

11.3. На рис. 141 обозначим $AO = AC = R$ — радиус шара. Пусть $AB = x$, $BC = r$. Применяя теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам ABC и CBO, получим:

$$\begin{cases} x^2 + r^2 = R^2, \\ r^2 + (R - x)^2 = R^2. \end{cases}$$

Решая данную систему, найдем $x = \frac{R}{2}$, тогда $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. А значит, длина искомой окружности будет равна $\pi R\sqrt{3}$.

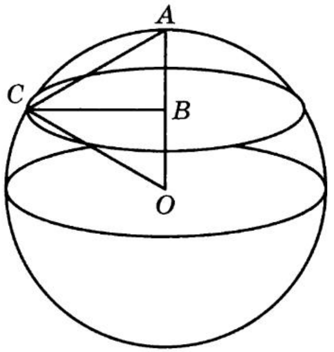


Рис. 141

11.4. Радиус сферы $R_т$, описанной около тетраэдра, не будет превосходить радиуса сферы $R_к$, описанной около куба. Обозначим сторону тетраэдра через a. Она будет равна $\frac{2\sqrt{3}}{3}R_т$. Найдем самый большой тетраэдр, удовлетворяющий условию $R_т = R_к$. Это будет тетраэдр, ребра которого будут диагоналями куба. В этом случае $R_к = \frac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому

$$a = \frac{2\sqrt{6}}{3}R_т = \frac{2\sqrt{6}}{R_к} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}\text{ (см)}.$$

11.5. Для решения задачи введем координатную систему таким образом, что начало координат совпадет с точкой B, а оси OX, OY, OZ направим соответственно по ребрам BA, BC, BB_1, как на рис. 142.

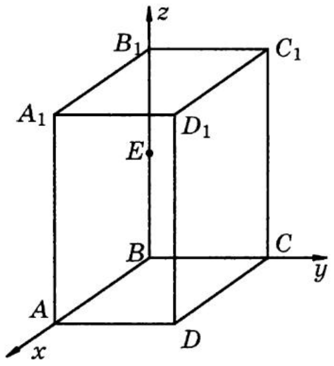


Рис. 142

Тогда координаты точек A, C, C_1, E будут: $A(2a, 0, 0)$, $C(0, a, 0)$, $C_1(0, a, 2a)$, $E(0, 0, a)$. А так как центр сферы равноудален от точек A, C, C_1, E на расстояние R (R — радиус сферы), то получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} (x-2a)^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + (y-a)^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + (y-a)^2 + (z^2 - 2a)^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 + (z^2 - a) = R^2. \end{cases}$$

В данной системе уравнений x, y, z — координаты искомого центра сферы.

Вычтем из второго уравнения системы третье и найдем $z = a$. Вычтем из третьего уравнения четвертое и, подставляя

$z = a$, найдем $y = a$. И наконец, вычитая из первого уравнения второе и подставляя $y = a$, найдем $x = \frac{5}{4}a$. Таким образом, центр сферы имеет координаты $O\left(\frac{5}{4}a, a, a\right)$. Подставляя эти координаты в любое из уравнений системы, находим

$$R = \frac{a\sqrt{41}}{4}.$$

11.6. Пусть A, B, C, D — центры четырех нижних шаров, а S — центр верхнего шара (рис. 143).

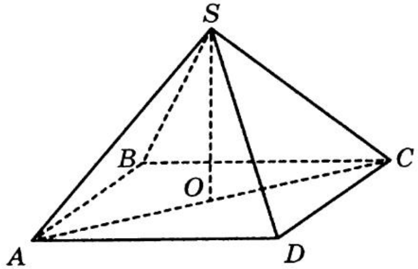


Рис. 143

Учитывая условие задачи, имеем:

$$AD = DC = CB = AB = 2r,$$
$$AS = BS = CS = DS = 2r.$$

Тогда пирамида $SABCD$ является правильной. И у данной пирамиды необходимо найти ее высоту SO. Проведем одну из диагоналей основания AC и найдем сначала

$$AO = \frac{\sqrt{4r^2 + 4r^2}}{2} = r\sqrt{2},$$

а затем и

$$SO = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = r\sqrt{2}.$$

Тогда требуемое расстояние будет равно

$$r + r\sqrt{2} + r = 2r + r\sqrt{2} = r\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}).$$

11.7. При наклоне куба выльется вода, содержащаяся в призме $ABCNMK$ (рис. 144). По условию задачи $\angle BCA = 30°$. Обозначим ребро куба через a, тогда объем куба будет равен a^3. Для нахождения объема призмы найдем сначала площадь основания призмы:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{BC \cdot AB}{2} = \frac{a \cdot a \cdot \operatorname{tg} 30°}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.$$

Так как высота призмы равна a, то $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Тогда объем оставшейся воды будет равен разности объема куба и объема данной призмы:

$$V_{\text{ост.}} = a^3 - \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

А значит,

$$V_{\text{ост.}} : V_{\text{куба}} = \left(a^3 - \frac{a^3\sqrt{3}}{6}\right) : a^3 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

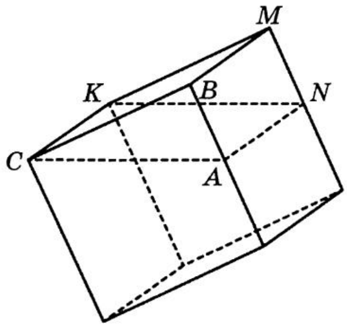


Рис. 144

11.8. Доказательство будет состоять из двух частей.

1. Пусть в параллелепипед можно вписать шар. Так как диаметр шара перпендикулярен грани параллелепипеда, то расстояние между плоскостями любых двух граней параллелепипеда будет равно диаметру шара. А так как диаметр шара

является и высотой параллелепипеда, то у данного параллелепипеда будут равны все высоты. А так как объем параллелепипеда равен произведению площади грани на высоту, опущенную на эту грань, то и площади всех граней параллелепипеда равны.

2. Пусть теперь у параллелепипеда равны площади всех его граней. Поскольку объем параллелепипеда один и тот же, то в этом параллелепипеде будут равны и высоты, опущенные на соответствующие грани. Выполним следующее дополнительное построение: проведем в данном параллелепипеде три высоты, которые будут перпендикулярны к трем парам параллельных граней. После этого проведем три плоскости, которые проходят через середины этих высот и перпендикулярны им. Получим в пересечении трех этих плоскостей точку, которая будет равноудалена от плоскостей всех шести граней параллелепипеда, так как она удалена от каждой из них на половину соответствующей высоты. Таким образом, шар с центром в этой точке и радиусом, равным расстоянию от нее до плоскостей граней параллелепипеда, будет вписан в этот параллелепипед.

11.9. Если мы вновь склеим пирамиду из развертки, то в одной из вершин пирамиды сойдутся три вершины квадрата, а четвертая станет одной из вершин основания. При этом каждое боковое ребро пирамиды будет склеиваться из двух равных отрезков границы квадрата. Это возможно только тогда, когда две вершины основания пирамиды, не совпадающие с вершинами квадрата, являются серединами его сторон, то есть развертка имеет вид, показанный на рис. 145 (вершины D, D_1, D_2 склеиваются).

Значит, длина одного из боковых ребер исходной пирамиды равна 1 дм, а двух других — 0,5 дм. При этом все плоские углы при этой вершине пирамиды — прямые. Значит, каждое ее боковое ребро перпендикулярно двум другим. Объем пирамиды находится по формуле:

$$V = \frac{1}{3}h \cdot S_{\text{осн.}}.$$

В качестве основания возьмем треугольник DBC, его площадь

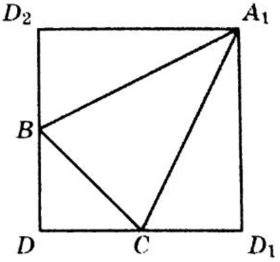


Рис. 145

будет равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Так как боковое ребро пирамиды перпендикулярно двум ребрам основания, то оно перпендикулярно основанию пирамиды, то есть совпадает с высотой. Подставляя полученные значения в формулу для объема пирамиды, получим, что объем пирамиды будет равен $\frac{1}{24}$ дм^3.

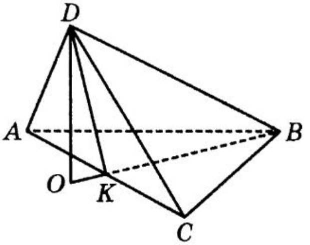


Рис. 146

11.10. Пусть $DABC$ — данная призма с вершиной D (рис. 146). Так как объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3}S \cdot H,$$

то требуется найти площадь основания и высоту пирамиды. Так как $S = \frac{AC^2\sqrt{3}}{4}$, а $AC = a\sqrt{2}$, то

$$S = \frac{(a\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

А поскольку сторона основания пирамиды равна $a\sqrt{2}$, а два ребра пирамиды равны a, то треугольник ADC, образованный этими ребрами и стороной основания, будет прямоугольный. Высота DK данного треугольника будет равна половине гипотенузы, то есть $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Тогда треугольник DKB, образованный данной высотой, высотой основания и третьим ребром, будет тупоугольным, поскольку

$$(a\sqrt{3})^2 > \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

Поэтому высота пирамиды DO будет лежать вне пирамиды, как изображено на рис. 146.

Тогда

$$H^2 = DO^2 = DK^2 - OK^2 = DB^2 - (OK + KB)^2.$$

Но $DK^2 = DC^2 - KC^2$, поэтому

$$DK^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Обозначим $OK = x$. Так как $KB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, то

$$\frac{a^2}{2} - x^2 = 3a^2 - \left(x + \frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2.$$

Из данного уравнения находим $x = \frac{a}{\sqrt{6}}$. Тогда $H = \frac{a}{\sqrt{3}}$ и, соответственно,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a^3}{6}.$$

11.11. Пусть $DABC$ — данный в задаче тетраэдр, а O — центр полушара (рис. 147). Для решения задачи выполним дополнительное построение: соединим центр полушара (он же центр вписанной окружности в правильный треугольник — основание тетраэдра) с вершинами тетраэдра. Тогда исходный тетраэдр разбивается на три равные по объему пирамиды: $ABDO$, $ACDO$, $BCDO$. У всех этих пирамид основаниями являются грани правильного тетраэдра — правильные треугольники, а высотой — радиус искомого полушара. Так как объем исходного тетраэдра находится по формуле:

$$V = \frac{1}{3}SH,$$

а объем каждой из полученных пирамид равен $\frac{1}{3}SR$, то

$$V = 3 \cdot \frac{1}{3}SR = SR = \frac{1}{3}SH.$$

Отсюда находим радиус полушара:

$$R = \frac{H}{3}, \quad H = \sqrt{DC^2 + OC^2}.$$

Так как OC является радиусом описанной около треугольника ABC окружности, то $OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Тогда $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ и $R = \frac{a\sqrt{6}}{9}$.

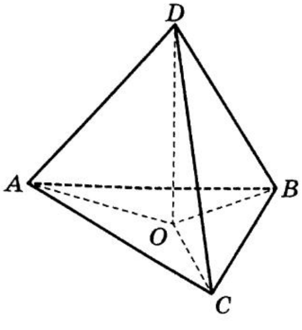


Рис. 147

Список использованной литературы

1. *Альхова З.Н., Макеева А.В.* Внеклассная работа по математике. — Саратов: Лицей, 2003.
2. *Вакульчик П.А.* Нестандартные и олимпиадные задачи по математике. — Мн.: УниверсалПресс, 2004.
3. *Зайкин М.И.* Математический тренинг: развиваем комбинационные способности. Книга для учащихся 4–7 классов общеобразовательных учреждений. — М.: Владос, 1996.
4. *Иванов О.А.* Сто олимпиадных задач для старшеклассников. — СПб: Изд-во СПУ, 1994.
5. *Каганов Э.Д.* 400 лучших задач с решениями по математике для 6–11 классов. — М.: «Юнвест», 2001.
6. Математические олимпиады школьников: книга для учащихся общеобразовательных учреждений / Н.Х. Агаханов, Л.П. Купцов, Ю.В. Нестеренко и др. — М.: Просвещение, 1997.
7. Математические олимпиады школьников ДАССР. — Махачкала: Дагучпедгиз, 1987.
8. Методические рекомендации к спецкурсу «Решение школьных олимпиадных задач по математике». — Магнитогорск: МаГУ, 2000.
9. Олимпиадные задания по математике: 5–8 классы. 500 нестандартных задач для проведения конкурсов и олимпиад: развитие творческой сущности учащихся. — Волгоград: Учитель, 2005.
10. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. — М.: Наука, 1986.
11. Тверские математические олимпиады 1996–2000 годов. — Тверь, 2001.
12. *Фарков А.В.* Математические олимпиады. — М.: Владос, 2004.
13. *Фарков А.В.* Математические олимпиады в школе. 5–11 классы. — М.: Айрис-пресс, 2005.
14. *Фарков А.В.* Готовимся к олимпиадам по математике. — М.: Экзамен, 2006.
15. *Ященко И.В.* Приглашение на математический праздник. — М.: МЦНМО, ЧеРО, 1998.

Содержание

Введение 3

Задачи для самостоятельного решения 21
5 класс 22
6 класс 29
7 класс 30
8 класс 33
9 класс 44
10 класс 46
11 класс 47

Ответы и решения 49
5 класс 49
6 класс 58
7 класс 60
8 класс 70
9 класс 106
10 класс 113
11 класс 116

Список использованной литературы 126

По вопросам оптовых закупок обращаться:
тел./факс: (495) 785-15-30, e-mail: trade@airis.ru
Адрес: Москва, пр. Мира, 104

Наш сайт: www.airis.ru

Вы можете приобрести наши книги
с 11^{00} до 17^{30}, кроме субботы, воскресенья,
в киоске по адресу: пр. Мира, д. 106, тел.: (495) 785-15-30

Адрес редакции: 129626, Москва, а/я 66

Издательство «АЙРИС-пресс» приглашает к сотрудничеству
авторов образовательной и развивающей литературы.
По всем вопросам обращаться
по тел.: (495) 785-15-33, e-mail: editor@airis.ru

Учебное издание

Фарков Александр Викторович

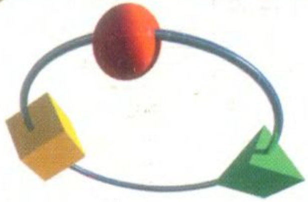
УЧИМСЯ РЕШАТЬ ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ
Геометрия. 5–11 классы

Ведущий редактор *В. В. Черноруцкий*
Редактор *И. Анюков*
Художественный редактор *А. М. Драговой*
Технический редактор *С. С. Коломеец*
Компьютерная верстка *Е. Г. Иванов*
Корректор *З. А. Тихонова*

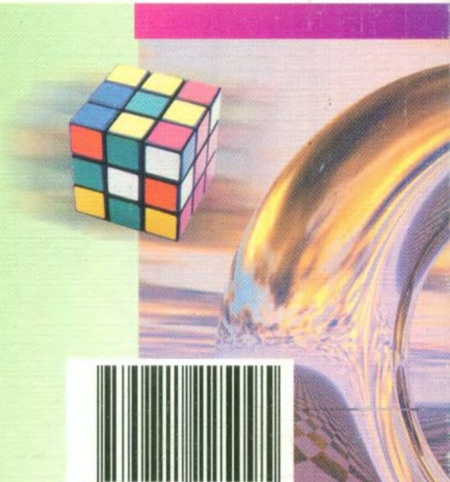
Подписано в печать 21.08.07. Формат 60×90/16.
Гарнитура «Ньютон». Печать офсетная. Печ. л. 8. Усл.-печ. л. 8.
Тираж 5000 экз. Заказ № 1924.

ООО «Издательство «АЙРИС-пресс»
113184, Москва, ул. Б. Полянка, д. 50, стр. 3.

ОАО «Тверской ордена Трудового Красного Знамени
полиграфкомбинат детской литературы им. 50-летия СССР».
170040, г. Тверь, пр. 50 лет Октября, 46.



- Основные методы и приемы решения олимпиадных задач по геометрии
- Самостоятельная подготовка учащихся к математическим олимпиадам
- Для учителей математики и учащихся 5-11 классов.



9 785811 225095

АЙРИС ПРЕСС