

Содержание

НАПУТСТВИЕ	3
§1. ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЭКЗАМЕНЫ В МГУ	4
ДВИ – 2022	4
ДВИ – 2021	5
ДВИ – 2020	6
ДВИ – 2019	8
ДВИ – 2018	9
ДВИ – 2017	10
ДВИ – 2016	11
ДВИ – 2015	12
ДВИ – 2014	13
ДВИ – 2013	14
ДВИ – 2012	15
ДВИ – 2011	16
Дополнительно	17
§2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ	18
ДВИ – 2022	18
ДВИ – 2021	22
ДВИ – 2020	24
ДВИ – 2019	26
ДВИ – 2018	27
ДВИ – 2017	28
ДВИ – 2016	29
ДВИ – 2015	30
ДВИ – 2014	31
ДВИ – 2013	32
ДВИ – 2012	33
ДВИ – 2011	34
Ответы	35
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	37

НАПУТСТВИЕ

В этом сборнике вы найдете все 37 вариантов вступительных испытаний в Московский университет, проходивших с 2011 года. Часть из них содержит удобные ссылки на видеоразборы; другую часть рекомендую одолеть самостоятельно (к ним приведены ответы). Вопросы по решениям смело пишите в комментариях к соответствующим роликам [на YouTube](#).

№1 ← для перехода к видеоразбору кликните по номеру задачи

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЭКЗАМЕНЫ В МГУ**ДВИ-2022****Вариант 1**

1. Найдите наименьшее целое число, большее, чем $\frac{\sqrt{17} + 3}{\sqrt{17} - 3}$.
2. Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии в два раза больше суммы первых десяти членов. Найдите первый член этой прогрессии, если известно, что пятый её член равен 7.
3. Решите уравнение $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x + 3 = 0$.
4. Решите неравенство $(2 \log_2^2 x - \log_2 x^2 + 1)^{x^2 - 2x} \leq 1$.
5. Середины сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ лежат на окружности. Известно, что $AB = 1$, $BC = 4$, $CD = 8$. Найдите AD .
6. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$x^2 + (1 - a + \sqrt[4]{|x|})^2 = \frac{a^2}{4}$$

имеет ровно три решения.

7. Объём треугольной призмы $ABCA'B'C'$ с основанием ABC и боковыми рёбрами AA' , BB' , CC' равен 72. Найдите объём тетраэдра $DEFG$, где D — центр грани $ABB'A'$, E — точка пересечения медиан треугольника $A'B'C'$, F — середина ребра AC и G — середина ребра BC .

ДВИ-2021

Вариант 1

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{25}{16}\right)^{-1/2} + \frac{\log_3(9^3)}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{15}}$.
2. Добрыня Никитич в полтора раза старше Алёши Поповича и в полтора раза младше Илья Муромца. Сколько лет Добрыне Никитичу, если Илья Муромец старше Алёши Поповича на 20 лет?
3. Решите уравнение $\sin x - \cos 2x + \sin 3x = 1$.
4. Решите неравенство $\log_2 x + \log_2 3 \cdot \log_x 3 + \log_{\sqrt{2}} 3 < 0$.
5. В окружность вписан выпуклый восьмиугольник $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8$. Известно, что

$$\angle A_1 A_4 A_7 = \frac{1}{2} \angle A_4 A_7 A_2 = \frac{1}{3} \angle A_7 A_2 A_5 = \frac{1}{4} \angle A_2 A_5 A_8 = \frac{1}{5} \angle A_5 A_8 A_3 = \frac{1}{6} \angle A_8 A_3 A_6 = \frac{1}{7} \angle A_3 A_6 A_1.$$

Найдите $\angle A_6 A_1 A_4$.

6. Найдите наибольшее значение, которое может принимать выражение $x + 7y$, если известно, что x, y удовлетворяют равенству

$$\sqrt{xy} + \sqrt{(1-x)(1-y)} = \sqrt{7x(1-y)} + \frac{\sqrt{y(1-x)}}{\sqrt{7}}.$$

7. Дана треугольная призма $ABC A' B' C'$ с основаниями $ABC, A' B' C'$ и боковыми ребрами AA', BB', CC' . Через точки B, C проходит плоскость, делящая объём призмы пополам. Эта плоскость пересекает прямую AA' в точке D . Найдите отношение $AA' : A'D$.

Вариант 2

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{2}{9}} \cdot \log_4 64 \cdot \log_8 64$.
2. Студент Савелий взбегает вверх по неподвижному эскалатору за 30 секунд, а по движущемуся вверх — за 20 секунд. За сколько секунд Савелий поднялся бы по движущемуся вверх эскалатору, если бы нашел в себе силы стоять на месте? (Собственную скорость бегущего Савелия считать постоянной).
3. Решите уравнение $2\sqrt{2} + \sqrt{2} \sin 2x = \sqrt{3}(\cos x - \sin x)$.
4. Решите неравенство $6^{x^2} + 6^{2x} \leq 2^{x^2+2x} + 3^{x^2+2x}$.
5. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает диагональ BD и сторону BC в точках K и L соответственно. Найдите площадь треугольника DKL , если известно, что площадь параллелограмма равна 8 и что $AD = 3 \cdot AB$.
6. Найдите все значения параметра a , при которых наименьшее (по x) значение выражения

$$\log_2^2(ax) + \log_2^2\left(\frac{1-a}{x}\right)$$

максимально.

7. Дан параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$ объема 1. На ребрах $AB, B' C', CD$ и $A' D'$ отмечены точки K, L, M и N соответственно. Известно, что $AK : KB = CM : MD = 1 : 3$ и $B' L : LC' = D' N : NA' = 1 : 2$. Найдите объём тетраэдра $KLMN$.

ДВИ-2020

Вариант 1

1. Известно, что $f(x) = \frac{x}{1+x} + \frac{1-x}{x} - \frac{1}{24}$. Найдите $f\left(\frac{3}{5}\right)$.
2. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 105, которые делятся на 3, но не делятся на 5.
3. Решите уравнение $\operatorname{tg} 2x = 2 \cos 2x \cdot \operatorname{ctg} x$.
4. Решите неравенство $\log_{2x} 16 - \log_{4x} 8 \leq 1$.
5. В равнобедренном треугольнике ABC с равными сторонами AB и BC проведены биссектрисы AD и CE . Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно. Найдите DE , если $AC = 12$ и $KL = 9$.
6. Дана треугольная призма $ABCA'B'C'$ с основаниями ABC и $A'B'C'$. На диагоналях боковых граней AB' , BC' , CA' отмечены точки D , E , F соответственно. Найдите отношение, в котором плоскость DEF делит отрезок AA' , если $AD : DB' = 1 : 1$, $BE : EC' = 1 : 2$, $CF : FA' = 1 : 3$.
7. Найдите все положительные значения параметра a , при которых уравнение

$$\log_{2-x} (a^{2+x} + 2a^{1-x} + x - 1) + \log_{2+x} (a^{2-x} + 2a^{1+x} - x - 1) = 2$$

имеет ровно одно решение относительно x .

Вариант 2

1. Известно, что $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-3}} + \frac{19}{x}$. Найдите $f(12)$.
2. Дана возрастающая геометрическая прогрессия b_1, b_2, b_3, \dots , состоящая из положительных чисел. Известно, что сумма первого и третьего членов этой прогрессии равна второму члену, умноженному на $\frac{10}{3}$. Найдите отношение $b_6 + b_7 + b_8 + b_9 + b_{10}$ к $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$.
3. Решите уравнение $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x$.
4. Решите неравенство $\log_{|2x-\frac{1}{2}|} \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right) \geq \log_{|2x-\frac{1}{2}|} \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right)$.
5. На высоте AH остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Найдите отношение $BH : HC$, если $BD : DA = 2 : 1$ и $AE : EC = 3 : 1$.
6. Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что $AB = BC = CD = 5$ и $CA = AD = DB = 6$. Найдите косинус угла между ребрами BC и AD .
7. Найдите все пары положительных чисел (x, y) , удовлетворяющих уравнению

$$\log_{2x^2y+1} (x^4 + y^2 + 1) = \log_{y^4+x^2+1} (2xy^2 + 1).$$

Вариант 3

1. Найдите целое число, задаваемое выражением:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2.$$

2. Числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма первых десяти членов этой прогрессии равна 9, а сумма последних десяти членов равна 11. Найдите сумму $a_6 + a_7 + \dots + a_{14} + a_{15}$.

3. Решите уравнение $\cos x \cdot (2 \cos x - \cos 3x) = 1$.

4. Решите неравенство $3^x - 2^{x+1} \leq \sqrt{2 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 2^{2x+3}}$.

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведены биссектриса AL и высота CH . Найдите косинус угла BAC , если $HL \parallel AC$.

6. Ребро куба $ABCD A' B' C' D'$ равно 1. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины ребер $AB, AD, AA', CC', C' B', C' D'$.

7. Найдите все значения параметра a из промежутка $[0, 2\pi)$, при которых уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2} = x \cos a + y \sin a$$

имеет хотя бы одно решение (x, y) , отличное от $(0, 0)$.

ДВИ-2019

1. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{2019 \cdot 2029 - 2016 \cdot 2032}$.
2. Найдите $a + b + c$, если известно, что $a + 2b = 3$, $b + 2c = 4$, $c + 2a = 5$.
3. Решите уравнение $7 \sin x + 2 \cos 2x = 5$.
4. Решите неравенство $2^{\log_2^2 x} + 7x^{\log_2 x} < 16$.
5. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и E таким образом, что $AD : DB = BE : EA = 1 : 4$. Найдите AB , если известно, что площадь треугольника ABC равна 18, а тангенс угла DCE равен $5/3$.
6. Найдите все пары вещественных чисел $(a; b)$, при которых неравенство

$$2a(x+2)^4 + 9b(x-2)^4 \geq x^4 + 24x^2 + 16$$

справедливо для всех вещественных x .

7. Плоскость π проходит через три вершины прямоугольного параллелепипеда, отсекая от него тетраэдр. Два шара максимально возможных радиусов находятся внутри сферы, описанной около этого параллелепипеда, по разные стороны от плоскости π . Найдите отношение радиусов этих шаров, если известно, что ребра параллелепипеда равны $1, \sqrt{3}, 3$.
8. Найдите все x, y из полуинтервала $(-\pi; \pi]$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 24\sqrt{7} \sin x + 8 \sin y + 3\sqrt{14} \sin \frac{x+y}{2} = 9\sqrt{7}, \\ 8 \sin x \sin y + 3\sqrt{14} \sin x \sin \frac{x+y}{2} + \sqrt{2} \sin y \sin \frac{x+y}{2} = \frac{9\sqrt{7}}{8}. \end{cases}$$

ДВИ-2018

1. Какое из чисел $\frac{49}{18}$ или $\frac{79}{24}$ ближе к 3?

2. Найдите все значения параметра a , при которых разность между корнями уравнения

$$x^2 + 3ax + a^4 = 0$$

максимальна.

3. Решите уравнение $\sin 4x \cos 10x = \sin x \cos 7x$.

4. Решите неравенство

$$\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} x} \geq \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{\log_x (\sqrt{3} + \sqrt{2})}.$$

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Пусть M — середина отрезка AD , а N — произвольная точка отрезка BC . Пусть K — пересечение отрезков CM и DN , а L — пересечение отрезков MN и AC . Найдите все возможные значения площади треугольника DMK , если известно, что $AD : BC = 3 : 2$, а площадь треугольника ABL равна 4.

6. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - 8y + 6a + 28 \leq 0, \\ ay^2 - 6ay - 8x + 11a - 12 \leq 0 \end{cases}$$

имеет одно решение.

7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$ с боковыми ребрами AA' , BB' , CC' , DD' . На ребрах AB , BC , CD , DA нижнего основания отмечены соответственно точки K , L , M , N таким образом, что $AK : KB = 4 : 5$, $BL : LC = 3 : 1$, $CM : MD = 7 : 2$, $DN : NA = 3 : 1$. Пусть P , Q , R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$ соответственно. Найдите PQ , если известно, что $QR = 1$ и $AB : BC = 3 : 2$.

8. Найдите все пары чисел x , y из промежутка $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, при которых достигается минимум выражения

$$\left(\frac{\sqrt{3} \sin y}{\sqrt{2} \sin(x+y)} + 1\right) \left(\frac{\sqrt{2} \sin x}{3 \sin y} + 1\right)^2 \left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{3} \sin x} + 1\right)^4.$$

ДВИ-2017

1. Какое число больше: $\sqrt{\frac{6}{7} + 7 + \frac{7}{6}}$ или 3?
2. Известно, что $a + b + c = 5$ и $ab + bc + ac = 4$. Найдите $a^2 + b^2 + c^2$.
3. Решите уравнение $\sin 7x + \sin 6x = \sin x$.
4. Решите неравенство $x^2 \log_7^2 x + 3 \log_6^2 x \leq x \log_7 x \cdot \log_6 x^4$.
5. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямых AC и BC . На этой окружности выбрана точка D (внутри треугольника), лежащая на расстоянии $\sqrt{2}$ от прямой AB и на расстоянии $\sqrt{5}$ от прямой BC . Найдите угол $\angle DBC$, если известно, что $\angle ABD = \angle BCD$.
6. Василий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта A нужно добраться вниз по реке до пункта B , причем в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Василий вызвался самостоятельно доехать до пункта B на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта A . Однако, промчавшись восемь километров, Василий заметил на берегу машущего ему рукой Григория, который просил по старой дружбе довести его до пункта C . И хоть пункт C Василий уже проехал, он согласился. По пути в пункт C Василий с Григорием встретили идущий на встречу второй катер с друзьями Василия, откуда те крикнули, что им до пункта B осталась треть пути и чтобы Василий нигде не задерживался. Доставив Григория в пункт C , Василий немедленно помчался догонять друзей. Найдите расстояние между пунктами B и C , если известно, что оба катера пришли в пункт B одновременно, скорости катеров постоянны, а Василий действительно нигде не задерживался.
7. Из вершины D на плоскость основания ABC пирамиды $ABCD$ опущена высота DH . Найдите объем этой пирамиды, если известно, что площади треугольников HBC , HAC , HAB равны соответственно $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}$ и что все три плоских угла при вершине D прямые.
8. Решите данную систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{\cos(x^2 - y^2)} - y \cdot \operatorname{tg}(x^2 - y^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \\ \frac{y}{\cos(x^2 - y^2)} - x \cdot \operatorname{tg}(x^2 - y^2) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}. \end{cases}$$

ДВИ-2016

1. Найдите $f\left(\frac{2}{7}\right)$, если $f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{3}{7}$.
2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2 + ax - 6 = 0$ равна 5. Найдите все возможные значения a .
3. Решите уравнение $2 \cos^2 x + 3 \sin 2x = 4 + 3 \cos 2x$.
4. Решите неравенство $\log_{1-\log_3 x} (1 + \log_x^2 3) \leq 1$.
5. Две окружности касаются внутренним образом в точке T . Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке S . Прямая TS пересекает внешнюю окружность в точках T и C . Найдите площадь четырехугольника $TACB$, если известно, что $CB = BT = 3$, а радиусы окружностей относятся как $5 : 8$.
6. Ровно в 9:00 из пункта A в пункт B выехал автомобиль. Проехав две третьих пути, наблюдательный водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта A проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт B , из пункта B в пункт A выехал автобус. Когда до пункта A оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт A , если известно, что автобус прибыл в пункт A ровно в 11:00? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.
7. В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 14. Плоскость π параллельна ребру AB , перпендикулярна плоскости DES и пересекает ребро BC в точке K так, что $BK : KC = 3 : 4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости BCS и AFS , параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани CDS .
8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{106 + \log_a^2 \cos ax + \log_a \cos^{10} ax} + \sqrt{58 + \log_a^2 \sin ax - \log_a \sin^6 ax} + \sqrt{5 + \log_a^2 \operatorname{tg} ax + \log_a \operatorname{tg}^2 ax}$$

и все пары (a, x) , при которых оно достигается.

ДВИ-2015

1. Найдите $f(2)$, если $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{3}{x} + \frac{1}{10}$.
2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 - 7x + 5 = 0$.
3. Решите неравенство $\cos x + \sqrt{2} \cos 2x - \sin x \geq 0$.
4. Решите уравнение $\log_x |2x^2 - 3| = 4 \log_{|2x^2 - 3|} x$.
5. Окружность радиуса $3/2$ касается середины стороны BC треугольника ABC и пересекает сторону AB в точках D и E так, что $AD : DE : EB = 1 : 2 : 1$. Чему может равняться AC , если $\angle BAC = 30^\circ$.
6. Велосипедист Василий выехал из пункта A в пункт B . Проехав треть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадежно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошёл пешком обратно в пункт A за новым велосипедом. В момент поломки из пункта A выехал мотоциклист Григорий. На каком расстоянии от пункта A он встретит Василия, если пункт B отстоит от пункта A на 4 км, а Василий доберется до пункта A тогда же, когда Григорий до пункта B ? Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.
7. В правильную треугольную призму с основаниями ABC , $A'B'C'$ и ребрами AA' , BB' , CC' вписана сфера. Найдите ее радиус, если известно, что расстояние между прямыми AE и BD равно $\sqrt{13}$, где E и D — точки, лежащие на $A'B'$ и $B'C'$ соответственно, и $A'E : EB' = B'D : DC' = 1 : 2$.
8. Найдите все пары (α, β) , при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4 - 3 \sin \alpha}{2 + \cos 2\alpha} + \frac{2 + \cos 2\alpha}{\beta^2 + \beta + 1} + \frac{\beta^2 + \beta + 1}{\sqrt{\beta} + 1} + \frac{\sqrt{\beta} + 1}{4 - 3 \sin \alpha}.$$

ДВИ-2014

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}(8 + 4\sqrt{3})$.
2. Найдите максимальное значение функции $\log_{1/2}(x^2 - 6x + 17)$.
3. Найдите все положительные x , удовлетворяющие неравенству $x^{3x+7} > x^{12}$.
4. Решите уравнение $\cos^2 x - \cos x \sin^2 \left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12} \right) + \frac{1}{4} = 0$.
5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A . Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках B_1 и B_2 . Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A , пересекает отрезок B_1B_2 в точке C . Прямая, делящая угол ACO_2 пополам, пересекает прямые O_1B_1 , O_1O_2 , O_2B_2 в точках D_1 , L , D_2 соответственно. Найдите отношение $LD_2:O_2D_2$, если известно, что $CD_1 = CO_1$.
6. Найдите все положительные x , y , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{\frac{3}{2}} + y = 16, \\ x + y^{\frac{2}{3}} = 8. \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{2}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.
8. Пусть

$$f(x, y) = \sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y,$$

$$g(x, y) = -\sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

ДВИ-2013

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 2. Один из его корней равен $5/2$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 3$.

2. Вычислите $\log_{12} 3 \cdot \log_9 12$.

3. Решите неравенство

$$9(1 + 5^{1-2x})^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(5^{2x} + 5)^{\frac{1}{2}} \geq 6^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}}.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin 5x} - \frac{\cos x}{\cos 5x}.$$

5. В 14:00 из села Верхнее вниз по течению реки в сторону села Нижнее отправился катер «Быстрый». Когда до Нижнего оставалось плыть 500 метров, ему навстречу из Нижнего вышел катер «Смелый». В этот же самый момент «Быстрый», не желая встречи со «Смелым», развернулся и пошел обратно к Верхнему. В 14:14, когда расстояние по реке от «Быстрого» до Верхнего сравнялось с расстоянием по реке от «Смелого» до «Быстрого», на «Смелом» осознали, что они идут с «Быстрым» на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно к Нижнему. В исходные пункты катера вернулись одновременно в 14:18. Найдите расстояние по реке между Верхним и Нижним, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r . Найдите r , если $R = 12$, а косинус угла между диагональю AC и основанием AD равен $3/4$.

7. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC , такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'B'$ верхнего основания (параллельном AB) отмечена точка D так, что $A'D : DB' = 1 : 2$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $ABC'D$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sin\left(x + \frac{a}{x}\right) = x + 1$$

имеет бесконечно много решений.

ДВИ-2012

1. Найдите многочлен второй степени, если известно, что его корни равны $-\frac{4}{7}$ и $\frac{5}{3}$, а свободный член равен -2 .
2. Вычислите $\log_2 \log_{81} \frac{417}{139}$.
3. Решите неравенство $(9^x - 3^{x+2} + 14) \cdot \sqrt{4 - 2^x} \leq 0$.
4. Решите уравнение $\sin 3x = \sqrt{2} \cos x - \sin x$.
5. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению $|x| + |x + 3y| + 3|y - 2| = 6$.
6. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E соответственно и пересекает сторону AC в точках F, G (точка F лежит между точками A и G). Найдите радиус этой окружности, если известно, что $AF = 5$, $GC = 2$, $AD : DB = 2 : 1$ и $BE = EC$.
7. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $a\sqrt{x+y} = \sqrt{3x} + 2\sqrt{y}$ имеет единственное решение (x, y) .
8. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник ABC со сторонами $AC = BC = 5$ и $AB = 6$, боковые ребра AS, BS, CS пирамиды равны соответственно 7, 7 и 4. Прямой круговой цилиндр расположен так, что окружность его верхнего основания имеет ровно одну общую точку с каждой из боковых граней пирамиды, а окружность нижнего основания лежит в плоскости ABC и касается прямых AC и BC . Найдите высоту цилиндра.

ДВИ-2011

1. Вычислите значение функции $x^2 - 0,625x - \frac{1}{8}$ в точке $x = \frac{4}{5}$.
2. Решите уравнение $(\sin x + \cos x)^2 = 1$.
3. Решите уравнение $\log_2(3x - 4) = \log_4(2 - x)$.
4. Решите неравенство $\frac{\sqrt{5x+3}-1}{\sqrt{3x+2}-1} > 1$.
5. Медианы AL и BM треугольника ABC пересекаются в точке K . Найдите длину отрезка CK , если $AB = \sqrt{3}$ и известно, что вокруг четырехугольника $KLCM$ можно описать окружность.
6. Найдите наибольшее значение функции $\frac{9^x}{4^x - 6^x + 9^x}$ и точку x , в которой это значение достигается.
7. В закрытой коробке, имеющей форму куба со стороной 5, лежат два шара. Радиус первого из них равен 2. Этот шар касается плоскости основания и двух соседних боковых граней куба. Второй шар касается двух других боковых граней куба, плоскости основания и первого шара. Чему равен радиус второго шара?
8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy + 11y^2 \leq 1, \\ 4x + 7y \geq 3. \end{cases}$$

Дополнительно

1. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \cos^2(\pi xy) - 2 \sin^2(\pi x) - 3 \sin^2(\pi y) - 2 + \operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \cos(\pi xy) - \frac{3}{2} \sin^2(\pi x) - 2 \sin^2(\pi y) - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \log_2 \left(1 + 4 \sin^2 \left(\frac{\pi a}{4} - \frac{\pi}{16} \right) - x^2 - y^2 \right) \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения?

2. Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} \left| 6\sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} - 5 \right| + \left| 12\sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} + 1 \right| - \left| 1 - 6\sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} \right| = 5 - \left(\sin \frac{\pi(y-2x)}{12} \right)^2, \\ 10 - 9(x^2 + (y-a)^2) = 3\sqrt{x^2 + (y-a)^2 - \frac{8}{9}}. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

3. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sin^2 x + (a-2)^2 \sin x + a(a-2)(a-3) = 0$$

имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три различных корня.

4. Найдите произведение корней уравнения

$$\sin \frac{x^2 + x + 1}{2x} + \cos \frac{x^2 - x + 1}{2x} = \frac{x^2 - 4x + 1}{x} \cdot \cos \frac{\pi - 2}{4}.$$

5. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых существует единственная тройка (x, y, z) действительных чисел x, y, z , удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} z \cdot \cos(x-y) + (2+xy) \cdot \sin(x+y) - z = 0, \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = a + 2x, \\ (x+y+a \cdot \sin^2 z)((1-a) \ln(1-xy) + 1) = 0. \end{cases}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Здесь приведены варианты вступительных испытаний в Московский университет для самостоятельного решения. Они схожи с заданиями на страницах 5–17: различия преимущественно в числовых данных. В вариантах 2020–2022 годов условия отличаются, но зачастую их объединяет одна идея. Ответы к задачам вы найдете в конце этого раздела.

ДВИ-2022

Вариант 2

1. Найдите в явном виде целое число, заданное выражением $\sqrt{11} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{11} - \sqrt{7}} + \frac{2}{\sqrt{11} + \sqrt{7}} \right)$.
2. Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии в два раза больше разности между первым и четвёртым её членами. Найдите первый член этой прогрессии, если известно, что сумма первых семи её членов равна 127.
3. Решите уравнение $\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x$.
4. Решите неравенство $x^{\log_2 \sqrt{x}} \geq \frac{2}{\sqrt{x}}$.
5. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. При этом $AM = MB$ и $CN = 2NB$. Найдите тангенс острого угла параллелограмма $ABCD$.
6. Найдите все возможные значения произведения xy , если известно, что $x, y \in [0, \pi/2)$ и справедливо равенство

$$\frac{1 - \sin(x - y)}{1 - \cos(x - y)} = \frac{1 - \sin(x + y)}{1 - \cos(x + y)}.$$

7. В пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом α и стороной $\sqrt{6}$, вписана сфера диаметра 1. Найдите угол α , если известно, что все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости её основания под углом 60° .

Вариант 3

1. Определите, какое из двух чисел больше: $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ или 3.
2. Дана возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из положительных чисел. Произведение третьего и четвертого членов этой прогрессии в два раза больше произведения первого и шестого её членов. Найдите разность этой прогрессии, если известно, что восьмой её член равен 32.
3. Решите уравнение $\cos 2x + 6 \sin 2x = \cos 4x + 6 \sin x$.
4. Решите неравенство $\log_3(1 - x) - \log_3(1 + x) + \log_{1+x}(1 - x) - 1 \leq 0$.
5. В треугольнике ABC угол C равен 60° . На сторонах AB , BC , AC отмечены точки D , E , F соответственно. Радиус окружности, вписанной в треугольник ADF , равен 1. Радиус окружности, вписанной в треугольник BDE , равен 2. Найдите сторону AB , если известны, что четырехугольник $DEFC$ является ромбом.
6. Найдите все пары действительных чисел x, y , удовлетворяющих соотношению

$$\frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1}{xy} = 2\sqrt{2 - \sqrt{xy}} \cdot \sqrt[4]{xy}.$$

7. Высота правильной треугольной призмы $ABC A' B' C'$ с основанием ABC и боковыми рёбрами AA' , BB' , CC' равна 1. Найдите длину ребра основания, если известно, что $AB' \perp BC'$.

Вариант 4

1. Найдите наименьшее целое число, большее, чем $2\sqrt{3} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}$.
2. Положительные числа a, b, c образуют непостоянную геометрическую прогрессию. Числа $a, 4b, 7c$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите отношение a/c .
3. Решите уравнение $\frac{\sqrt{2}}{\sin x} + \frac{\sqrt{2}}{\cos x} = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$.
4. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x}} \left| \frac{3x}{x-4} \right| \leq 4$.
5. В трапеции $ABCD$ основание AB в два раза больше основания CD . Отрезки AL, BM и DK , где K, L, M — соответственно середины сторон AB, BC, AD , ограничивают треугольник площади 1. Найдите площадь трапеции.
6. Найдите все тройки действительных чисел x, y, z из интервала $(0, \pi/2)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \sin x = \sin y - \sin z \cos(x + z), \\ \cos x = \cos z + \cos y \cos(x + y). \end{cases}$$

7. Дан параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA' , BB' , CC' , DD' . Найдите отношение, в котором делит его объём плоскость, проходящая через вершину A , середину ребра BC и середину ребра $C'D'$.

Вариант 5

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{2\sqrt{2}}{27}\right)^{2/3} + \left(\frac{27}{2\sqrt{2}}\right)^{2/3} - \frac{13}{18}$.
2. Сумма второго и восьмого членов возрастающей геометрической прогрессии равна $9\sqrt{2}$. Произведение четвёртого, пятого и шестого членов этой прогрессии равно 64. Найдите разность между девятым и первым членами этой прогрессии.
3. Решите уравнение $\sin^4 x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.
4. Решите неравенство $\log_{\sqrt{6-x}}(6+x) + \log_{\sqrt{6+x}}(6-x) \leq 5$.
5. Окружность, проходящая через вершины A, B треугольника ABC и центр описанной около этого треугольника окружности, пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Найдите угол BCE , если известно, что $AB = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{3}$ и что угол BAE в два раза больше угла ABD .
6. Найдите все значения параметров a, b , при которых неравенство

$$a^3x^4 + 2ax^3 + b \leq 2bx^2 + b^3x + a$$

выполняется для всех x из отрезка $[0, 1]$.

7. Дана правильная треугольная пирамида $ABCS$ с основанием ABC и вершиной S . Плоскость π перпендикулярна ребру AS и пересекает рёбра AS, BS в точках D, E соответственно. Известно, что $SD = AD$ и $SE = 2BE$. Найдите косинус угла между ребром AS и плоскостью основания ABC .

Вариант 6

1. Определите, какое из двух чисел больше: $\sqrt{3}^{15}$ или $9\sqrt{14}$.
2. Числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{90}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{30} = 45$ и что $a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{30} = 100$. Найдите разность этой прогрессии.
3. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = 4 \sin x - \sqrt{3}$.
4. Решите неравенство $\log_x\left(x^2 + \frac{3}{2}\right) \leq 4 \log_{x^2 + \frac{3}{2}}(x)$.
5. Окружность, проходящая через вершину A треугольника ABC , касается его стороны BC в точке D и пересекает стороны AC и AB в точках E и F соответственно. Известно, что $AF = 3BF$, $BD = CD$, $AE = 2CE$ и что $ED = \sqrt{10}$. Найдите BC .
6. Найдите все значения параметра a из интервала $(0, 1)$, при которых для каждого x из интервала $(0, \pi/4)$ существует не более одного значения y в интервале $(0, \pi/4)$, такого что

$$\frac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg}(a(x+y))} = \frac{\operatorname{tg}(x+y) - \operatorname{tg}(a(x+y))}{1 + \operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}(a(x+y))}.$$

7. Основание $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A' B' C' D'$ с боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD' является квадратом со стороной $\sqrt{2}$. Известно, что $AE \perp D'F$, где E — центр грани $BCC' B'$, F — центр квадрата $ABCD$. Найдите расстояние между серединами отрезков AE и $D'F$.

Вариант 7

1. Определите, какое из двух чисел больше: $\sqrt{3} + \sqrt{7} + \sqrt{21}$ или 9.
2. Произведение седьмого и восьмого членов непостоянной арифметической прогрессии равно произведению пятого и девятого её членов. Найдите одиннадцатый член данной прогрессии.
3. Решите уравнение $5 + \cos 4x = 6 \sin^2 x$.
4. Решите неравенство $\log_{x-\frac{3}{4}} \left(x - \frac{3}{2} \right) \geq \frac{1}{2}$.
5. Биссектриса AL треугольника ABC перпендикулярна его медиане BM . Найдите площадь этого треугольника, если известно, что $AB = \sqrt{3}$ и $ML = 1$.
6. Найдите наименьшее значение выражения $x^2 - 5\pi x + 2xy - 5\pi y + y^2$ при условии, что x и y удовлетворяют соотношению

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y} = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin y}.$$

7. Плоские углы при вершине A тетраэдра $ABCD$ прямые. Двугранные углы при рёбрах BD и CD равны между собой и в два раза больше двугранного угла при ребре BC . Найдите объём тетраэдра, если известно, что $AD = 1$.

ДВИ-2021

Вариант 3

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{3 \sin \frac{\pi}{2}}{\log_2 16} - \sqrt{\frac{4}{9}}\right)^{-1}$.
2. Автовладелец Авдей продал автосалону свой автомобиль за 60% его первоначальной стоимости. Автосалон выставил на продажу этот автомобиль за цену, на 20% большую уплаченной Авдею. Какова доля получившейся цены по отношению к первоначальной?
3. Решите уравнение $2 \cdot \frac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \sqrt{3} \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 x)$.
4. Решите неравенство $\log_{x-1}(x+1) - \log_{\sqrt{x+1}}(x-1) \geq 1$.
5. В четырёхугольник $ABCD$ площади 2 вписана окружность, касающаяся сторон AB и CD в точках K и L соответственно. Отрезок KL пересекает диагональ AC в точке M . Найдите BD , если известно, что $AM = MC = 1$.
6. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$\sin^6 x + \cos^6 x + a \cdot \sin 2x \geq a^2$$

выполняется для всех действительных x .

7. Вписанная в треугольную пирамиду $ABCD$ сфера касается граней BCD , ACD , ABD и ABC в точках A_1 , B_1 , C_1 и D_1 соответственно. Известно, что D_1 является точкой пересечения высот треугольника ABC , что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны и что радиус окружности, описанной около треугольника ABC , в четыре раза больше радиуса окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите отношение, в котором сфера делит отрезок DD_1 , считая от вершины D .

Вариант 4

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} - \frac{2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}\right)^2$.
2. Бобр доплывает от своей норы вниз по реке до осиновой роши за три минуты. Подкрепившись, он плывёт обратно к своей норе, на что у него уходит четыре минуты. Во сколько раз собственная скорость бобра превышает скорость течения? (Собственную скорость бобра считать постоянной).
3. Решите уравнение $\cos 4x + \cos 2x + \operatorname{ctg}^2 x = 0$.
4. Решите неравенство $\log_2 x + \log_3 x \leq \log_2 3 \cdot \log_x 6$.
5. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки K и L соответственно. Известно, что $AB = BC = 1$, что площади треугольников AKC и BCL равны и что около четырёхугольника $AKML$, где M — точка пересечения отрезков BL и CK , можно описать окружность. Найдите все возможные значения AC .
6. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\left(\sqrt{3+2x-x^2} - \sqrt{3-2x-x^2}\right) \left(\sqrt{a-x^2} - \sqrt{3-2x-x^2}\right) \left(\sqrt{a-x^2} - \sqrt{3+2x-x^2}\right) = 0$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что центр сферы, описанной около этого тетраэдра, лежит на AB , что плоскости ABC и ABD перпендикулярны и что $AD = DC = CB$. Найдите угол между прямыми AD и CB .

Вариант 5

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\frac{27^{1/3}}{25^{1/2}} + \frac{\log_5 25}{3\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4}} + \frac{41}{15}$.
2. Любитель коктейлей Игнат смешал 300 мл морковного сока с 200 мл сливок. Тщательно перемешав полученную смесь, Игнат попробовал её на вкус и решил, что сливок оказалось слишком

много. Игнат налил в полулитровый графин 200 мл морковного сока, а оставшиеся 300 мл заполнил приготовленной смесью. Каково процентное содержание сливок в полученном напитке?

3. Решите уравнение $4 \sin 2x \cos 3x - 2 \sin 5x = \operatorname{tg} 2x$.

4. Решите неравенство $\log_{x-1} (4^{\log_3 x} - 6x^{\log_3 2} + 10) \leq 0$.

5. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD . Известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD , касаются диагонали AC в одной и той же точке. При этом точка касания первой окружности со стороной BC делит эту сторону пополам. Найдите отношение, в котором точка касания второй окружности со стороной AD делит эту сторону, считая от точки A .

6. Найдите все пары действительных чисел (x, y) с наименьшим возможным значением y , удовлетворяющие неравенству

$$\log_{x^2-y} \left(x - y^2 + \frac{7}{4} \right) \geq 1.$$

7. Сфера касается всех рёбер тетраэдра $ABCD$. Известно, что произведения длин скрещивающихся рёбер равны. Известно также, что $AB = 3$, $BC = 1$. Найдите AC .

Вариант 6

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \sin \frac{\pi}{4} - \sqrt{2} \right)^4 - \frac{1}{4}$.

2. Футболист Федот сыграл в трёх матчах на чемпионате. Премияльная выплата Федота за второй матч в связи с отличной игрой была на n процентов больше, чем за первый. В третьем же матче Федот не сумел показать хорошую игру, и его премия за этот матч оказалась на n процентов меньше, чем за второй матч. Найдите n , если известно, что премия за третий матч составила 64% от премии за первый матч.

3. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x = \frac{2}{3} \cos x$.

4. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x-1}} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 5} \leq 2$.

5. Окружность Ω_1 с центром O_1 пересекает окружность Ω_2 с центром O_2 в точках A и B . При этом точки O_1 и O_2 лежат вне Ω_2 и Ω_1 соответственно. Касательная к окружности Ω_2 в точке A пересекает Ω_1 в точках A и C . Касательная к окружности Ω_1 в точке A пересекает Ω_2 в точках A и D . Найдите угол между прямыми O_1C и O_2D , если известно, что $\angle AO_1B = 36^\circ$ и $\angle AO_2B = 64^\circ$.

6. Найдите все пары действительных чисел (x, y) , удовлетворяющих равенству

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin(1 + \log_2(x^2 + y^2)) = 1 + \log_2(xy).$$

7. Дан параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$ с основаниями $ABCD$, $A' B' C' D'$ и боковыми рёбрами AA' , BB' , CC' , DD' . Все рёбра параллелепипеда равны. Плоские углы при вершине B также равны. Известно, что центр сферы, описанной около тетраэдра $AB'CD'$, лежит в плоскости $AB'C$. Радиус этой сферы равен 2. Найдите длину ребра параллелепипеда.

ДВИ-2020

Вариант 4

1. Найдите целое число, задаваемое выражением $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}+1}\right) \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)$.
2. Дана арифметическая прогрессия. Ее двадцатый член равен 1, а член с номером 2000 равен 199. Найдите член этой прогрессии с номером 2020.
3. Решите уравнение $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}$.
4. Решите неравенство $\log_x(\log_{\sqrt{x}}(10x - 4 - 4x^2)) \geq \log_{\sqrt{x}}(\log_x(10x - 4 - 4x^2))$.
5. Окружность, проходящая через вершины A и B прямоугольника $ABCD$, пересекает сторону BC в точке E , а диагональ AC — в точке F . Найдите площадь четырехугольника $ABEF$, если $BE = 8$, $EC = 4$, а точки D, F, E лежат на одной прямой.
6. Дана правильная треугольная пирамида. Известно, что центр сферы, описанной около этой пирамиды, равноудален от боковых ребер и от плоскости основания пирамиды. Найдите радиус сферы, вписанной в эту пирамиду, если длина ребра ее основания равна 12.
7. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$2x^2y^2 + x^2y + xy^2 + (1-a)(x^2 + y^2) - a(x+y+2) = 0$$

имеет ровно одно решение (относительно (x, y)).

Вариант 5

1. Найдите целое число, ближайшее к числу $2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)$.
2. Дана геометрическая прогрессия. Ее четвертый член равен 5, а член с номером 54 равен 160. Найдите член этой прогрессии с номером 64.
3. Решите уравнение $9 \operatorname{tg}^2 x - 2 \cos 2x = 2$.
4. Решите неравенство $8 + \log_{\sqrt{x}} 8 \leq 4 \log_x \sqrt{17x^2 - 2}$.
5. Произведение оснований трапеции равно 18. Найдите периметр трапеции, если известно, что в нее вписана окружность, а диагонали делят среднюю линию на три равные части.
6. В основании четырехугольной пирамиды $ABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. На ребре SB отмечена точка E так, что $SE : EB = 2 : 1$. На ребре SD отмечена точка F так, что $SF : FD = 1 : 2$. Найдите отношение, в котором плоскость AEF делит объем пирамиды.
7. Найдите все положительные значения параметра a , при которых сумма различных корней уравнения

$$\log_2(ax) + \log_2(1-x) = \cos((x-x^2)a\pi)$$

максимальна.

Вариант 6

1. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{\frac{4^3 + 3^4}{3^4 - 4^3}}$.
2. Сумма первых ста членов арифметической прогрессии равна 750. Найдите член этой прогрессии с номером 99, если известно, что второй член этой прогрессии равен 7.
3. Решите уравнение $\sin x \cos 3x = \sin 3x \cos 5x$.
4. Решите неравенство $2^{\frac{3+5x}{1+2x}} + 2^{\frac{1+3x}{1+2x}} \leq 6\sqrt{2}$.
5. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно. Точки B, C, E, D лежат на одной окружности. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ADC , если известно, что $\angle CDE = \angle BAC$ и что радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 1.
6. Дан куб $ABCD A' B' C' D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD' . Найдите расстояние между прямой, проходящей через середины ребер AB и AA' , и прямой, проходящей через середины ребер BB' и $B'C'$, если ребро куба равно 1.
7. Найдите произведение корней уравнения

$$\sin \frac{x^2 + x + 1}{2x} + \cos \frac{x^2 - x + 1}{2x} = \frac{x^2 - 4x + 1}{x} \cdot \cos \frac{\pi - 2}{4}.$$

ДВИ-2019

1. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{2019 \cdot 2031 - 2017 \cdot 2033}$.
2. Найдите $a + b + c$, если известно, что $a + 3b = 2$, $b + 3c = 4$, $c + 3a = 6$.
3. Решите уравнение $5 \sin x + 3 \cos 2x = 4$.
4. Решите неравенство $3^{\log_3^2 x} + 5x^{\log_3 x} < 18$.
5. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и E таким образом, что $AD : DB = BE : EA = 1 : 5$. Найдите AB , если известно, что площадь треугольника ABC равна 30, а тангенс угла $\angle DCE$ равен 2.
6. Найдите все пары вещественных чисел $(a; b)$, при которых неравенство

$$3a(x+3)^4 + 8b(x-3)^4 \geq x^4 + 54x^2 + 81$$

справедливо для всех вещественных x .

7. Плоскость π проходит через три вершины прямоугольного параллелепипеда, отсекая от него тетраэдр. Два шара максимально возможных радиусов находятся внутри сферы, описанной около этого параллелепипеда, по разные стороны от плоскости π . Найдите отношение радиусов этих шаров, если известно, что ребра параллелепипеда равны 1, 2, 4.
8. Найдите все x, y из полуинтервала $(-\pi; \pi]$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 28\sqrt{3} \cos x + 7 \cos y + 4\sqrt{6} \cos \frac{x+y}{2} = 12\sqrt{3}, \\ 7 \cos x \cos y + 4\sqrt{6} \cos x \cos \frac{x+y}{2} + \sqrt{2} \cos y \cos \frac{x+y}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{7}. \end{cases}$$

ДВИ-2018

1. Какое из чисел $\frac{49}{32}$ и $\frac{59}{24}$ ближе к 2?
2. Найдите все значения параметра p , при которых разность между корнями уравнения $x^2 + px + 3p^4 = 0$ максимальна.
3. Решите уравнение $\cos 10x \cos 7x = \cos 4x \cos x$.
4. Решите неравенство $(2 + \sqrt{3})^{\log_2 - \sqrt{3} x} \geq (2 - \sqrt{3})^{\log_x (2 + \sqrt{3})}$.
5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Пусть M — середина отрезка AD , а N — произвольная точка отрезка BC . Пусть K — пересечение отрезков CM и DN , а L — пересечение отрезков MN и AC . Найдите все возможные значения площади треугольника ABL , если известно, что $AD : BC = 5 : 2$, а площадь треугольника DMK равна 5.
6. Найдите все значения параметра p , при которых система

$$\begin{cases} px^2 + 6px - 12y + 11p + 18 \leq 0, \\ py^2 - 2py - 12x + 3p - 30 \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$ с боковыми рёбрами AA' , BB' , CC' и DD' . На рёбрах AB , BC , CD , DA нижнего основания отмечены соответственно точки K , L , M , N , таким образом, что $AK : KB = 7 : 9$, $BL : LC = 2 : 1$, $CM : MD = 3 : 1$, $DN : NA = 2 : 1$. Пусть P , Q , R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$ соответственно. Найдите PQ , если известно, что $QR = 1$ и $AB : BC = 4 : 3$.

8. Найдите все пары чисел x , y из промежутка $(0; \frac{\pi}{2})$, при которых достигается минимум выражения $\left(\frac{\sqrt{5} \cos y}{2 \sin(x+y)} + 1 \right) \left(\frac{2 \cos x}{3 \cos y} + 1 \right)^2 \left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{5} \cos x} + 1 \right)^4$.

ДВИ-2017

1. Какое число больше: $\sqrt{\frac{7}{8} + 7 + \frac{8}{7}}$ или 3?
2. Известно, что $a + b + c = 6$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 16$. Найдите $ab + bc + ac$.
3. Решите уравнение $\cos 6x + \cos 5x = \sin x$.
4. Решите неравенство $x^2 \log_6^2 x + 6 \log_5^2 x \leq x \log_6 x \cdot \log_5 x^5$.
5. Через вершины K и L треугольника KLM проведена окружность, касающаяся прямых KM и LM . На этой окружности выбрана точка S (внутри треугольника), лежащая на расстоянии 1 от прямой KL . Найдите расстояние от точки S до прямой LM , если известно, что $\angle KLS = \angle LMS$ и что $\angle SLM = 45^\circ$.
6. Анатолий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта A нужно добраться вверх по реке до пункта B , причем в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Анатолий вызвался самостоятельно доехать до пункта B на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта A . Однако, промчавшись 8 км, Анатолий заметил на берегу машущего ему рукой Бориса, который просил по старой дружбе довезти его до пункта C . И хоть пункт C Анатолий уже проехал, он согласился. По пути в пункт C Анатолий с Борисом встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Анатолия, откуда те крикнули, что пункт B уже совсем близко и чтобы Анатолий нигде не задерживался. Доставив Бориса в пункт C , Анатолий немедленно помчался догонять друзей. Определите, какую долю пути оставалось пройти друзьям Анатолия от момента встречи с ним и Борисом, если известно, что оба катера пришли в пункт B одновременно, расстояние между пунктами B и C равно 2 км, скорости катеров постоянны, а Анатолий действительно нигде не задерживался.
7. Из вершины S на плоскость основания KLM пирамиды $KLMS$ опущена высота SH . Найдите объём этой пирамиды, если известно, что площади треугольников $\triangle HLM$, $\triangle HKM$, $\triangle HKL$ равны соответственно $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{2}$ и что все три плоских угла при вершине S прямые.
8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{\sin(x^2 - y^2)} + y \cdot \operatorname{ctg}(x^2 - y^2) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}, \\ \frac{y}{\sin(x^2 - y^2)} + x \cdot \operatorname{ctg}(x^2 - y^2) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{cases}$$

ДВИ-2016

1. Найдите $f\left(\frac{7}{3}\right)$, если $f(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{5}{3}$.
2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2 + ax - 10 = 0$ равна 7. Найдите все возможные значения a .
3. Решите уравнение $8 \cos^2 x + \sin 2x = 3 + 2 \cos 2x$.
4. Решите неравенство $\log_{1-\log_x 2}(1 + \log_2^2 x) \leq 1$.
5. Две окружности касаются внутренним образом в точке A . Хорда BC внешней окружности касается внутренней окружности в точке D . Прямая AD пересекает внешнюю окружность в точках A и E . Найдите BE , если известно, что $EC = CA$, площадь четырёхугольника $ABEC$ равна $3\sqrt{3}$, а радиусы окружностей относятся как $2 : 3$.
6. Ровно в $10:00$ из пункта A в пункт B выехала маршрутка. Проехав треть пути, наблюдательный водитель маршрутки заметил, что мимо него в сторону пункта A проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда маршрутка прибыла в пункт B , из пункта B в пункт A выехал грузовик. Когда до пункта A оставалась шестая часть пути, не менее наблюдательный водитель грузовика заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приехал грузовик в пункт A , если известно, что велосипедист прибыл в пункт A ровно в $15:00$? Скорости велосипедиста, маршрутки и грузовика считать постоянными.
7. В основании правильной пирамиды с вершиной V лежит шестиугольник $KLMNOP$ со стороной 5. Плоскость π параллельна ребру KL , перпендикулярна плоскости NOV и пересекает ребро LM в точке T так, что $LT : TM = 3 : 2$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскость LMV и плоскость основания, перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани MNV .
8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{13 + \log_a^2 \cos \frac{x}{a} + \log_a \cos^4 \frac{x}{a}} + \sqrt{97 + \log_a^2 \sin \frac{x}{a} - \log_a \sin^8 \frac{x}{a}} + \sqrt{20 + \log_a^2 \operatorname{tg} \frac{x}{a} + \log_a \operatorname{tg}^4 \frac{x}{a}}$$

и все пары (a, x) , при которых оно достигается.

ДВИ-2015

1. Найдите $f(3)$, если $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{5}{x} + \frac{7}{12}$.
2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + 9x - 2 = 0$.
3. Решите неравенство $\sin x + \sqrt{\frac{2}{3}} \cos 2x + \cos x \leq 0$.
4. Решите уравнение $\log_{\sqrt{x+1}} |4x - 1| = 4 \log_{|4x-1|} \sqrt{x+1}$.
5. Окружность радиуса 2 касается середины стороны AC треугольника ABC и пересекает сторону BC в точках K и L так, что $BK = KL = LC$. Чему может равняться AB , если $\angle ABC = 45^\circ$?
6. Лыжник Григорий ехал по довольно пологому склону, но, проехав две трети пути, проявил неуклюжесть и сломал лыжи. Отбросив их за ненадобностью, он тут же побрёл обратно. В момент поломки с вершины горы стартовал лыжник Василий и, проехав 800 метров, встретил Григория. Найдите длину трассы, если известно, что Василий закончил спуск ровно тогда, когда Григорий добрался до вершины горы. Скорости лыжников и пешехода считать постоянными.
7. В правильную треугольную призму с основаниями ABC , $A'B'C'$ и ребрами AA' , BB' , CC' вписана сфера радиуса $\sqrt{21}$. Найдите расстояние между прямыми $A'K$ и $B'L$, где K и L — точки, лежащие на AB и BC соответственно, и $AK : KB = BL : LC = 2 : 3$.
8. Найдите все пары (x, y) , при которых достигается минимум выражения

$$\frac{2 - \cos x}{2 - \cos 2x} + \frac{2 - \cos 2x}{(y^2 + 1)^2} + \frac{(y^2 + 1)^2}{|y| + 1} + \frac{|y| + 1}{2 - \cos x}.$$

ДВИ-2014

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

2. Найдите максимальное значение функции $\log_{1/3}(x^2 + 4x + 31)$.

3. Найдите все положительные x , удовлетворяющие неравенству $x^{-5x-3} < x^{-7}$.

4. Решите уравнение $\sin^2 x + \sqrt{2}|\sin x| \cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{5\pi}{8}\right) + \frac{1}{2} = 0$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A . Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 в точке B и пересекает в точке C общую касательную этих окружностей, проходящую через точку A . Прямая, делящая угол ACO_1 пополам, пересекает прямые O_1O_2 и BO_1 в точках L и D соответственно. Найдите CO_2 , если известно, что $LO_1 = 2$, а прямые CO_2 и DO_2 перпендикулярны.

6. Найдите все x, y на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos^3 x} + \frac{1}{\sin^3 x} = 16, \\ \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 y = 6. \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{7}$. Найдите расстояние между большей диагональю призмы и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

8. Пусть

$$f(x, y) = \sqrt{-5x^2 - 13y^2 - 16xy + 2} + y,$$

$$g(x, y) = -\sqrt{-5x^2 - 13y^2 - 16xy + 2} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

ДВИ-2013

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 3. Один из его корней равен $4/3$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = -2$.
2. Вычислите $\log_8 10 \cdot \log_{10} 4$.
3. Решите неравенство $15(4 + 4^{-2x})^{-\frac{1}{2}} - (4^{1+2x} + 1)^{\frac{1}{2}} \geq 20^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{x}{2}}$.
4. Решите уравнение $\frac{\cos 3x}{\sin 2x} + \frac{\sin 3x}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\cos 3x} + \frac{\cos 2x}{\sin 3x}$.
5. От биостанции до границы заповедника вверх по реке ровно 14 км. В 7:00 браконьеры вошли на катере в заповедник и направились в сторону биостанции. Через некоторое время им навстречу с биостанции вышел катер рыбинспекции. Браконьеры тут же развернулись и направились обратно к границе заповедника. В 7:38, когда браконьеры оказались ровно посередине между рыбинспекторами и границей, рыбинспекторы осознали, что они идут с браконьерами на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно на биостанцию. До биостанции они добрались ровно в тот момент, когда браконьеры выехали за пределы заповедника — в 7:50. Найдите наименьшее расстояние, на котором находились браконьеры и рыбинспекторы, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.
6. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r , причем $R = 2r$. Найдите среднюю линию трапеции, если диагональ AC равна 4.
7. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC , такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'C'$ верхнего основания (параллельном AC) отмечена точка D так, что $A'D : DC' = 2 : 1$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $AB'CD$, если высота призмы равна 1.
8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sin(x - a \ln|x|) = x + 1$ имеет бесконечно много решений.

ДВИ-2012

1. Найдите многочлен второй степени, если известно, что его корни равны $-\frac{5}{7}$ и $\frac{9}{4}$, а свободный член равен -5 .
2. Вычислите $\log_3 \log_{64} \frac{716}{179}$.
3. Решите неравенство $(4^x - 7 \cdot 2^x + 12) \cdot \sqrt{3^{x+1} - 1} \leq 0$.
4. Решите уравнение $\cos 3x = \cos x - \sqrt{3} \sin x$.
5. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению $|2y - x| + 2|y + 4| + |x| = 8$.
6. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AC в точках M, N (точка M лежит между точками A и N). Найдите радиус этой окружности, если известно, что $AM = 1$, $NC = 3$, $AK : KB = 2 : 1$ и $BL : LC = 1 : 4$.
7. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $a\sqrt{x+y} = \sqrt{2x} + \sqrt{3y}$ имеет единственное решение (x, y) .
8. В основании пирамиды лежит правильный треугольник ABC со стороной 5, боковые ребра AS , BS , CS пирамиды равны соответственно 7, 7 и 3. Прямой круговой цилиндр расположен так, что окружность его верхнего основания имеет ровно одну общую точку с каждой из боковых граней пирамиды, а окружность нижнего основания лежит в плоскости ABC и касается прямых AC и BC . Найдите высоту цилиндра.

ДВИ-2011

1. Вычислите значение функции $\frac{x^2 - 5}{x - 0,2}$ в точке $x = \frac{9}{4}$.
2. Решите уравнение $(\sin x + \cos x)^2 = 2$.
3. Решите уравнение $\log_3(5 - 2x) = \log_9(5 + x)$.
4. Решите неравенство $\frac{\sqrt{1-x} - 1}{\sqrt{2+3x} - 1} < 1$.
5. Медианы AP и BQ треугольника ABC пересекаются в точке D . Найдите длину отрезка AB , если $CD = \sqrt{12}$ и известно, что вокруг четырехугольника $PCQD$ можно описать окружность.
6. Найдите наибольшее значение функции $\frac{6^x}{9^{x+1} + 6^x + 4^{x-1}}$ и точку x , в которой это значение достигается.
7. Внутри куба с ребром 3 расположены две сферы. Первая касается плоскости основания и двух соседних боковых граней куба. Вторая сфера касается тех же двух боковых граней, грани куба, параллельной основанию, и первой сферы. Чему равен радиус второй сферы, если радиус первой равен 1?
8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3x^2 + 4xy + 12y^2 \leq 1, \\ 5x + 6y \leq -3. \end{cases}$$

ОТВЕТЫ

ДВИ-2022

Вариант 2

1. 11 2. 64 3. $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ 4. $(0; \frac{1}{4}] \cup [2; +\infty)$ 5. $\sqrt{5}$ 6. 0 7. 45°

Вариант 3

1. 3 2. 4 3. $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ 4. $[-\frac{2}{3}; 0) \cup (0; 1)$ 5. $9 + 3\sqrt{3}$ 6. $(-1, -1), (1, 1)$ 7. $\sqrt{2}$

Вариант 4

1. 5 2. 49 3. $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ 4. $(0; 1) \cup (1; 3] \cup [2 + \sqrt{7}; +\infty)$ 5. 252 6. $(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})$ 7. $55 : 89$

Вариант 5

1. 4 2. 15 3. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ 4. $(-6; -5) \cup [-3; 3] \cup (5; 6)$ 5. 45° 6. (p, p) , где $p \geq 0$ 7. $\frac{1}{\sqrt{6}}$

Вариант 6

1. $(\sqrt{3})^{15}$ 2. 14 3. $\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ 4. $[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1)$ 5. $4\sqrt{3}$ 6. $(0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 1)$ 7. $\frac{\sqrt{11}}{4}$

Вариант 7

1. 9 2. 0 3. $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ 4. $(\frac{3}{2}; \frac{7}{4}) \cup [3; +\infty)$ 5. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 6. $-6\pi^2$ 7. $\frac{5+\sqrt{17}}{12}$

ДВИ-2021

Вариант 3

1. 12 2. 72 % 3. $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ 4. $(1; \sqrt{2}] \cup (2; 3]$ 5. 2 6. $[\frac{1-\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}-1}{2}]$ 7. 1 : 2

Вариант 4

1. 3 2. В 7 раз 3. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ 4. $(0; \frac{1}{3}] \cup (1; 3]$ 5. 1 6. $[0; 1) \cup \{3\} \cup (5; +\infty)$ 7. 60°

Вариант 5

1. 4 2. 24% 3. πn , $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ 4. $(1; 2) \cup \{3^{\log_2 3}\}$ 5. $(3 + 2\sqrt{3}) : 1$ 6. $(\frac{1}{2}; -1)$ 7. 3

Вариант 6

1. 2 2. 60% 3. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ 4. $(3; 4) \cup [7; +\infty)$ 5. 30° 6. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$
7. $\sqrt{5}$

ДВИ-2020

Вариант 4

1. 4 2. 201 3. $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ 4. $(\frac{1}{2}; \frac{5-\sqrt{5}}{5}] \cup [\frac{5+\sqrt{5}}{5}; \frac{5+\sqrt{5}}{4})$ 5. $22\sqrt{3}$ 6. $\sqrt{13} - 1$ 7. 0

Вариант 5

1. 3 2. 320 3. $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ 4. $(\sqrt{\frac{2}{17}}; \sqrt{\frac{1}{8}}] \cup (1; \sqrt{2}]$ 5. 18 6. $\frac{1}{6}$ 7. $(8; +\infty)$

Вариант 6

1. 2 2. 8 3. $\frac{\pi n}{4}$, $\pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ 4. $(-\infty; -\frac{3}{4}]$ 5. 1 6. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 7. 1

ДВИ-2019

1. 5 2. 3 3. $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $(-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ 4. $(\frac{1}{3}; 3)$ 5. 12 6. $\begin{cases} a \geq \frac{1}{6}, \\ b \geq \frac{1}{16} \end{cases}$ 7. 25 : 17

8. $\begin{cases} x = \pm \arccos \frac{1}{7}, \\ y = \pm \arcsin \frac{1}{7} \end{cases}$

ДВИ-2018

1. Второе 2. $\pm \frac{1}{2\sqrt{6}}$ 3. $\frac{\pi k}{6}, \frac{\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z}$ 4. $(0; 2 - \sqrt{3}) \cup (1; 2 + \sqrt{3})$ 5. 4 6. 3 7. $\frac{4}{3}$
 8. $\begin{cases} x = \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

ДВИ-2017

1. Первое 2. 10 3. $\pi + 2\pi k, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$ 4. $\{1\} \cup [2 \log_5 6; 3 \log_5 6]$ 5. $\sqrt{\frac{5}{2}}$
 6. Пятую часть пути от A до B 7. $\frac{\sqrt[4]{75}}{15}$ 8. $\begin{cases} x = 7\sqrt{\frac{\pi}{6}}, \\ y = -2\sqrt{2}\pi \end{cases}$

ДВИ-2016

1. $\frac{41}{12}$ 2. ± 3 3. $-\frac{\pi}{4} + \pi k, \arctg 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ 4. $[\frac{1}{2}; 1) \cup (2; +\infty)$ 5. 2 6. В 13:00 7. $4\sqrt{2}$
 8. $8\sqrt{5}, \begin{cases} a = 2, \\ x = \frac{\pi}{2} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

ДВИ-2015

1. 3 2. 85 3. $\left[-\frac{13\pi}{12} + 2\pi k; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right] \cup \left[\frac{7\pi}{12} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$ 4. $-\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{-3 + \sqrt{41}}{8}$
 5. $3 \pm \sqrt{7}$ 6. 2 км 7. $\frac{15}{2}$ 8. $\begin{cases} x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ y = 0 \end{cases}$

ДВИ-2014

1. 1 2. -3 3. $\left(0; \frac{4}{5}\right) \cup (1; +\infty)$ 4. $\frac{9\pi}{4} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$ 5. 4 6. $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$ 7. $\frac{\sqrt{7}}{6}$ 8. $[-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$

ДВИ-2013

1. $-\frac{1}{2}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. $[-1; 0]$ 4. $\frac{\pi k}{10}, k \in \mathbb{Z} \setminus (2\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z})$ 5. 4 6. $\sqrt{17} - 1$ 7. $\left(1 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{11}}{3} + \frac{\sqrt{14}}{3}\right)^{-1}$
 8. $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

ДВИ-2012

1. $\frac{28}{9}x^2 - \frac{43}{9}x - 5$ 2. -1 3. $\{-1\} \cup [\log_2 3; 2]$ 4. $\pi k, (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 5. 16 6. $\sqrt{\frac{15}{2}}$
 7. $(-\infty; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$ 8. $\frac{5\sqrt{3}}{26}$

ДВИ-2011

1. $\frac{5}{164}$ 2. $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ 3. $\frac{5}{4}$ 4. $\left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; 1\right]$ 5. 6 6. $\frac{1}{4}$ при $x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{6}$ 7. $\frac{5 - \sqrt{15}}{2}$
 8. $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{12}\right)$

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ткачук В. В. Математика — абитуриенту. — 20-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2020 — 944 с.
- [2] Центральная приемная комиссия МГУ им. М.В. Ломоносова [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://cpk.msu.ru>