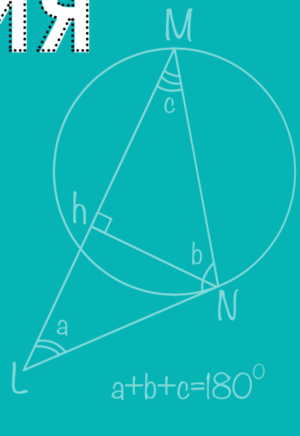
Библиотека «Первый Лобачевского»

математика

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

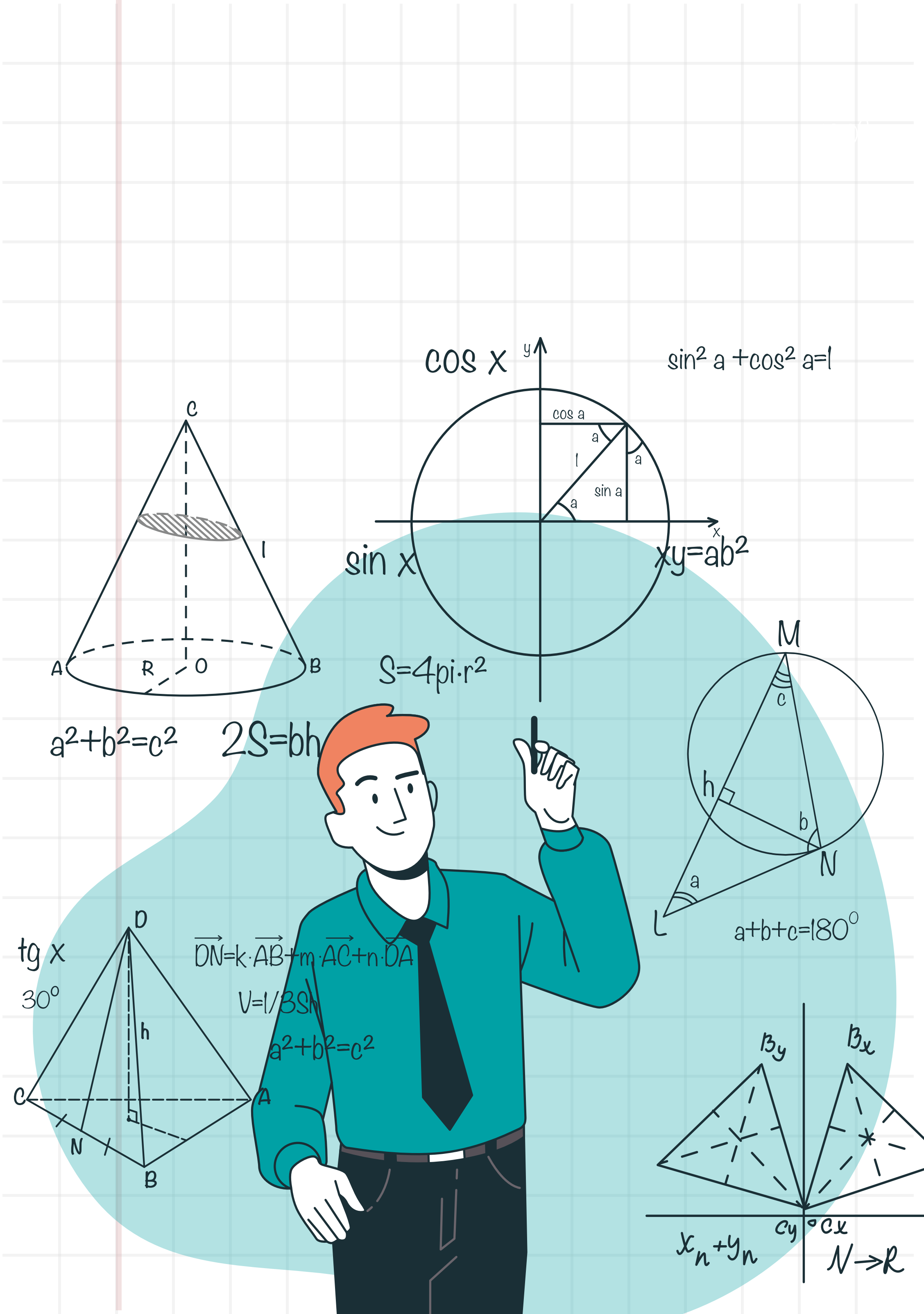
ОЛИМПИАДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ



#объясняютлицеисты

Выпуск №1

2023


cos x
sin² a +cos² a=1
cos a
sin a
sin x
xy=ab²
S=4pi·r²
a²+b²=c²
2S=bh
M
N
L
a+b+c=180°
tg x
30°
DN=k·AB+m·AC+n·DA
V=1/3Sh
a²+b²=c²
By
Bx
Cy
Cx
xn+yn
N→R

Методическое пособие по олимпиадной геометрии является командным проектом трёх учеников 10 «ФМ» класса под руководством преподавателя математики Первого Университетского Лицея имени Н. И. Лобачевского Толмачёва Николая Андреевича, а также при поддержке других преподавателей кафедры математики.

Отдельная благодарность учителю олимпиадной математики г. Нижнего Новгорода Кузнецову Дмитрию Юрьевичу за полученный методический опыт и литературу, так необходимую для написания данного пособия.

Данное пособие бескрайне мало, чтобы описать все методы и идеи, которые так важны в современной олимпиадной геометрии. Поэтому создатели выбрали самые интересные и важные для них методы. В первую очередь, эта книга рассчитана на замотивированных и заинтересованных школьников 7-11 классов, которые занимаются олимпиадной математикой или хотят начать, либо просто любят геометрию и видят в ней красоту.

Желаем удачи на Вашем математическом пути!

УЧАСТНИКИ

Авторы: ученики 10 физико-математического класса Первого университетского лицея имени Н.И. Лобачевского

- **Суслов Егор**
- **Щербаков Алексей**
- **Рында Кирилл**

Научный руководитель: Толмачев Николай Андреевич, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель математики в ОАНО «Первый Лобачевского»

ОГЛАВЛЕНИЕ

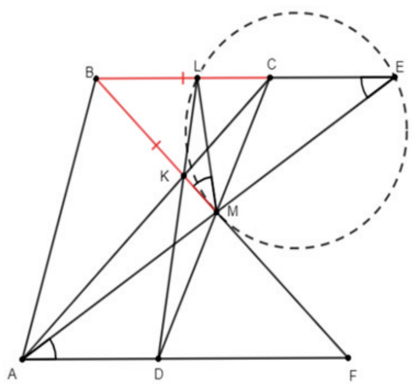
УВИДЕТЬ ОКРУЖНОСТЬ

Начать данное пособие хотелось бы с очень важного метода – «увидеть окружность». Этот метод доступен не всем, ведь он вырабатывается лишь со временем и опытом, получаемым в ходе решения геометрических задач, а также требует особого мышления.

Рассмотрим задачу с 3 тура, 57 Уральского турнира юных математиков:

1. На боковой стороне CD трапеции ABCD нашлась такая точка M, что BM = BC. Пусть прямые BM и AC пересекаются в точке K, а прямые DK и BC — в точке L. Докажите, что углы BML и DAM равны.

Доказательство: назовём точку пересечения прямой BC с прямой AM точкой E, а пересечение прямых AD и BM – точкой F. Параллельность BE и AF дает гомотетию треугольников BKC и FKA с центром в точке K и гомотетию треугольников BME и FMA, откуда следуют следующие отношения сторон:



$$\frac{BL}{BC} = \frac{DF}{AF} = \frac{BC}{BE} \longrightarrow BC^2 = BL \times BE = BM^2$$

Выполняется равенство степени точки B, значит, BM – касательная к описанной окружности ΔELM. EM – секущая, соответственно, $\angle LEM = \angle BML$. А т.к. ABCD – трапеция, то $\angle BEM = \angle DAM$, как накрест лежащие. Т.е. $\angle BML = \angle DAM$, что и требовалось доказать.

Комментарий: если требуется равенство углов – ищи окружность. Нашли окружность, тут же появились степень точки и секущая.

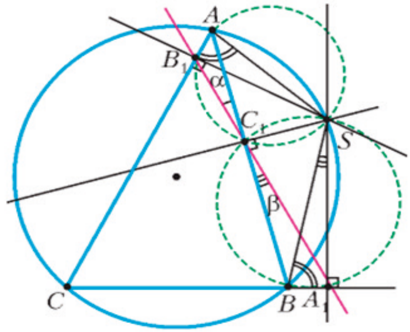
СОВЕТ 1

Осваивайте геометрию с помощью компьютерных программ (GeoGebra, Atelier). Они хороши тем, что при построении и движении картинки можно заметить ключ к решению или какие-то интересные факты и свойства.

Данный метод важен тем, что существует огромное количество современных теорем и свойств, связанных с окружностью: радикальные оси, степень точки, теорема о бабочке, окружность девяти точек и многое другое.

Докажем с помощью этого метода теорему о прямой Симсона, которая звучит так:

2. Прямая Симпсона - прямая, проходящая через точки, образованные основаниями перпендикуляров, опущенных из произвольной точки (S) описанной окружности треугольника (ABC) на его стороны или их продолжения.



Доказательство: если мы покажем, что $\angle B_1C_1A = \angle BC_1A_1$, то наше утверждение будет доказано. В доказательстве во всей красе показывает себя метод «вспомогательной окружности». Что это значит?

Краткости ради введем обозначения: $\angle B_1C_1A = \alpha$ и $\angle BC_1A_1 = \beta$. Точки B_1, C_1, A и S лежат на одной окружности с диаметром AS (почему?). Следовательно, $\angle B_1C_1A = \angle B_1SA = \alpha$ (так как оба этих угла «смотрят» на дугу B_1A). Тогда из треугольника B_1SA заметим, что $\angle B_1AS = 90° - \alpha$. Четырехугольник CASB вписан в окружность, поэтому

$$\angle CAS + \angle CBS = 180° \quad \rightarrow \quad \angle SBC = 90° + \alpha \quad \rightarrow \quad \angle SBA_1 = 90° - \alpha$$

Аналогично, из прямоугольного треугольника SBA_1 находим, что $\angle BSA_1 = \alpha$. Осталось лишь заметить, что точки C_1, B, A_1 и S лежат на одной окружности с диаметром BS. Откуда следует равенство углов $\angle BSA_1 = \angle A_1C_1B$ (оба «смотрят» на дугу BA_1). Таким образом, получили, что $\alpha = \beta$. Нам удалось доказать теорему.

Комментарий: данная теорема работает и в обратную сторону – точка S лежит на описанной окружности треугольника тогда и только тогда, когда основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки S на стороны треугольника или их продолжения, лежат на одной прямой – докажите это утверждение самостоятельно.

ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Предлагаем и вам опробовать этот метод, решив следующие задачи:

3. Найдите углы треугольника, если высота, биссектриса и медиана, проведённые из одной любой вершины данного треугольника ABC, делят угол при этой вершине на четыре равные части.

4. Дан ромб ABCD. На отрезках AC и BC отмечены такие точки M и N≠B соответственно, что DM = MN. Прямые AC и DN пересекаются в точке P, а прямые AB и DM — в точке R. Докажите, что RP = PD.

5. В треугольнике ABC на стороне AC отмечена такая точка D, что AB = BD = AC. Точки E и D симметричны, относительно прямой BC (то есть, отрезок DE перпендикулярен прямой BC и делится этой прямой пополам). Докажите, что AE = BC.

6. В равнобедренном треугольнике ABC (AB = AC) $\angle BAC = 20°$. M — проекция точки C на сторону AB; N — точка на стороне AC такая, что 2CN = BC. Найдите угол AMN.

7. В остроугольном треугольнике ABC BH – высота. Прямые, симметричные AC относительно AB и BC пересеклись в точке K. Докажите, что угол KBC равен углу ABH. (Указание: используйте теорему об изогоналях)

МЕТОД ИДЕАЛЬНОГО ПОСТРОЕНИЯ

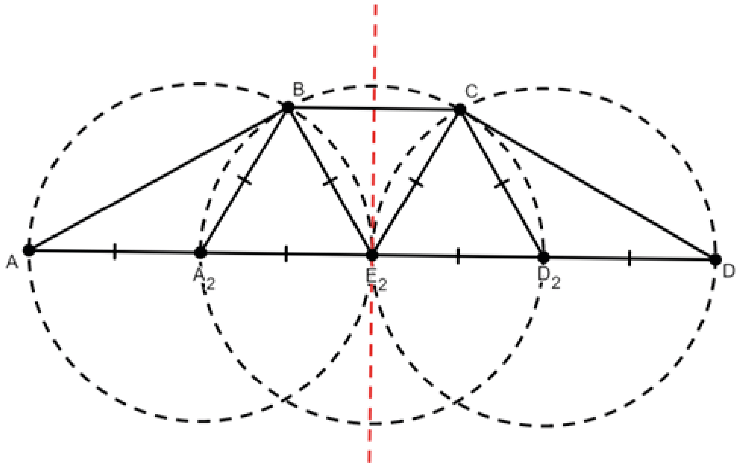
Метод идеального построения – принципиально другое мышление, основанное на процессах и инвариантах.

Метод включает в себя различные виды симметрии, дополнительные построения (параллелограмм, равносторонние и равнобедренные треугольники), окружности.

СОВЕТ 2

«В любом процессе ищи инвариант; если его не видно, то… организуй ЕГО сам; ИНАЧЕ его организуют другие, тогда … не плачь: 😊»

8. В выпуклом четырехугольнике ABCD A_1A_2, E_1E_2 и D_1D_2 – серединные перпендикуляры к сторонам AB, BC и CD соответственно, причем точки A_2, E_2 и D_2 делят отрезок AD на четыре равные части (см. рис.). Докажите, что $AD \parallel BC$.

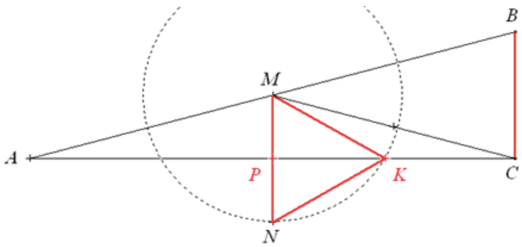


Доказательство: начнем строить картинку идеально – получили три равные окружности. Легко заметить, что $AA_2=A_2B=BE_2=E_2C=CD_2$, так как являются радиусами. А там уже и доказывается равенство BC (как?). Получили ромб и доказали задачу.

Комментарий: прекрасная задача, которая не только демонстрирует быстроту метода, а таит в себе огромное количество КРАСОТЫ, например, симметрию относительно серпера к стороне AD. Сколько решений сможете найти вы?

9. В прямоугольном треугольнике ABC точка M является серединой гипотенузы AB, угол A равен 15°. На катете AC отмечена точка K такая, что KM = BC и угол AMK – тупой. Найдите углы треугольника KBC.

Решение: воспользуемся методом «идеального» построения, построив параллелограмм CBMN с помощью центральной симметрии относительно середины отрезка MC.



Тогда середина P отрезка MN будет одновременно серединой стороны AC исходного треугольника, а MP будет средней линией этого треугольника.

Значит, MP=MN/2=BC/2=MK/2, т.е. катет MP равен половине гипотенузы MK в прямоугольном треугольнике MPK и $\angle$MKP=30°. Тогда $\angle$MKC=150°.

Учитывая, что MCB равнобедренный треугольник с $\angle$MCB=$\angle$MBC=75°, получим, что $\angle$MCK=90°–75°=15° и $\angle$CMK=180°–$\angle$MCK–$\angle$MKC=180°–15°–150°=15°.

Значит, ΔMKC – равнобедренный с двумя углами по 15°, KC=MK=BC. Тогда ΔKBC – равнобедренный прямоугольный

Комментарий: середина – центральная симметрия – параллелограмм!

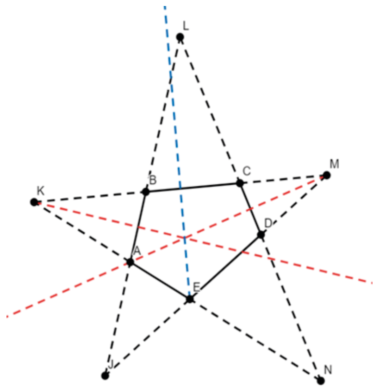
Ответ: 90°, 45° и 45°.

СОВЕТ 3

При построении равных отрезков пользуйтесь цветом.

А теперь отправимся к звездам, друзья!

10. Все углы пятиугольника ABCDE равны. Докажите, что серединные перпендикуляры к отрезкам AB и CD пересекаются на биссектрисе угла E.



Доказательство: заметим, что если у пятиугольника все углы равны, то при «идеальном» построении можно продлить его стороны и получить пятиконечную звезду с равнобедренными треугольниками AKB, BLC и т.д.

Следовательно, серединный перпендикуляр к основанию равнобедренного треугольника является биссектрисой этого треугольника.

Таким образом, рассмотрев треугольник KME можем заметить, что серединные перпендикуляры пересекаются на биссектрисе угла E, так как являются биссектрисами ΔKME, что и требовалось доказать.

Комментарий: построил ИДЕАЛЬНО – получил ЗВЕЗДУ – решил ЗАДАЧУ!

ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

11. Точка E внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AC. Известно, что угол ABC равен сумме углов BAE и BCE. Докажите, что $AB < AE + EC$.

12. Стороны треугольника ABC видны из точки F под равными углами внутри треугольника. Прямые BF и CF пересекаются со сторонами AC и AB в точках D и E соответственно. Докажите, что $AB+AC \geq DE$.

13. Дана трапеция ABCD, в которой AB - большее основание, а CD - меньшее. Известно, что $2AD=BC$ и сумма углов DAB и ABC равна 120°. Докажите, что $\angle DAB = 90°$.

14. В треугольнике ABC $\angle ACB > \angle ABC$, биссектриса угла BAC пересекает BC в точке D. На стороне AB выбрана такая точка E, что $\angle EDB$ - прямой, а F выбрали на стороне AC так, что $\angle DEF=\angle BED$. Докажите, что $\angle FDC=\angle BAD$.

15. Дан выпуклый четырехугольнике ABCD, в котором углы A и D равны. Точка K выбрана на стороне AD так, что $AB = BK$ и $CK = CD$. Точка L выбрана на отрезке BK так, что $BL = CK$. Доказать, что $LA = LD$.

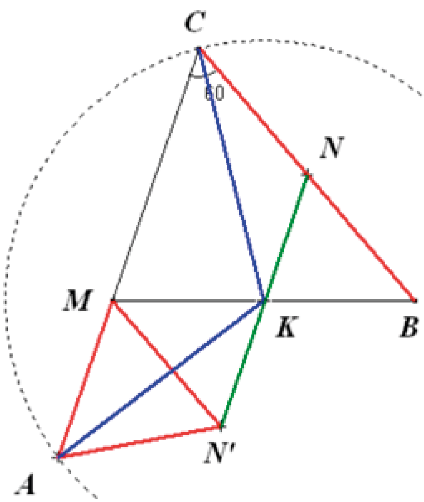
16. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбрали точки M и K соответственно так, что отрезки CM и AK пересекаются в точке O, и получаются равные отрезки $MB = KB$, $AM = OC$, $CK = AO$. Доказать, что ABC - равнобедренный.

МЕТОД ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПАЛОЧЕК

Преимущество данного метода в том, что с помощью построения параллельных прямых, в частности параллелограмма, мы получаем равенство отрезков, углов и некоторые отношения. Рассмотрим на примере

17. Точка N является серединой стороны BC в треугольнике ABC, а точка M на стороне AC такова, что AM=BN. Середина K отрезка BM равноудалена от точек A и C. Какие значения может принимать угол ACB?

Решение: отобразим N симметрично относительно K, полученную точку назовём N'. Тогда ACNN' – трапеция, в которойсерединаKоснования NN' равноудалена от концов основания AC, значит, это равнобокая трапеция. Тогда треугольник AMN' должен быть равносторонним, ∠ACB = ∠CAN'=60°.

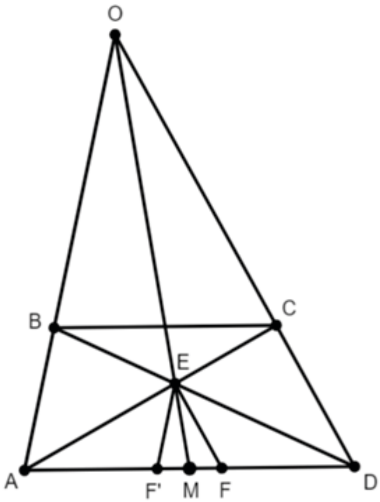


Ответ: 60°.

А теперь посмотрим множество КРАСОТЫ в задаче 9.8 с регионального этапа ВсОШ 2021-2022:

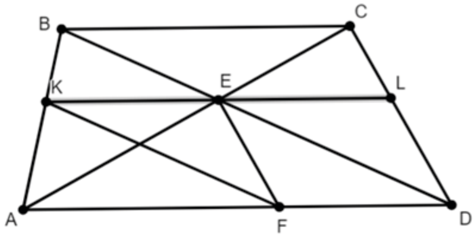
18. В трапеции ABCD диагональ BD равна основанию AD. Диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Точка F на отрезке AD выбрана так, что EF ‖ CD. Докажите, что BE = DF.

Доказательство 1: достроим трапецию до треугольника ADO. Проведём отрезок EF' параллельный прямой AO. Соответственно, треугольники F'EF и AOD подобны. Медиана OM проходит через пересечение диагоналей трапеции, поэтому F'M=FM => AF'=DF. А т.к. EF'‖AB и BD=AD, то BE=AF'=FD, что и требовалось доказать.



Комментарий 1: в данном доказательстве использовалась классическая идея – достроить трапецию до треугольника и воспользоваться леммой о трапеции – замечательными точками. А теперь на основе этого доказательства воспользуемся параллельными палочками!

Доказательство 2: проведем прямую KL параллельную основаниям. KE=EL, исходя из леммы о трапеции. EL‖FD => EFDL – параллелограмм. Тогда FD=EL=KE, KE ‖ FD => KEDF – так же параллелограмм. Тогда треугольник BEK — равнобедренный, BE=KE=FD.



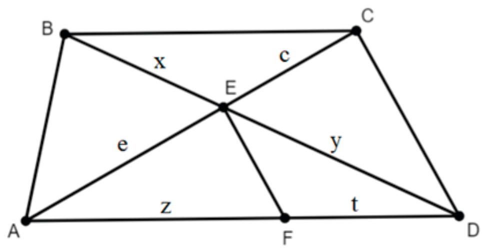
Комментарий 2: решение основывалось на идее из прошлой задачи, но здесь мы уже больше применили метод параллельных палочек.

Доказательство 3:

$x + y = z + t$ *(BD=AD)*

$$\frac{(z+t)}{(e+c)} = \frac{t}{c} = \frac{z}{e} \quad (\text{т.к.} EF \parallel CD)$$

$$\frac{y}{e} = \frac{x}{c} = \frac{(y+x)}{(e+c)} \quad (\text{т.к.} \Delta BEC \sim \Delta DEA)$$



Исходя из этих выкладок, получаем требуемое:

$x/c = t/c \Rightarrow x = t$,т.е. *BE=FD*

Комментарий 3: это замечательное решение было получено при анализе идеи одного из учеников, который, написав отношения сторон, далее запутался в выкладках, из-за чего не смог решить задачу.

Здесь сыграла роль ГРУБЕЙШАЯ МЕТОДИЧЕСКАЯ ОШИБКА школьного курса геометрии, когда школьников заставляют писать выкладки и отношения с обозначением концов отрезков, в то время как нам нужны только длины этих отрезков, а чисто алгебраическая запись отношений даёт моментальную возможность найти удобные преобразования. Также, игнорирование школьной программой свойства ряда равных отношений лишает детей возможности видеть красоту подобных алгебраических преобразований во многих геометрических задачах.

СОВЕТ 4

Обозначайте ДЛИНЫ сторон отдельными символами (строчными латинскими буквами). Это упростит ваши выкладки, и вы не запутаетесь в преобразованиях. То же самое работает и с углами – называйте их строчными буквами греческого алфавита.

Свойство ряда равных отношений – если имеем ряд равных отношений:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

то $a_i = kb_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – любые действительные числа, при которых $t_1b_1 + t_2b_2 + \ldots + t_nb_n \neq 0$. Тогда $t_1a_1 = t_1kb_1$, $t_2a_2 = t_2kb_2, \ldots, t_na_n = t_nkb_n$. Сложив эти равенства, получим: $t_1a_1 + t_2a_2 + \ldots + t_na_n = k(t_1b_1 + t_2b_2 + \ldots + t_nb_n)$, откуда:

$$\frac{t_1a_1 + t_2a_2 + \ldots + t_na_n}{t_1b_1 + t_2b_2 + \ldots t_nb_n} = k = \frac{a_i}{b_i} \quad \text{, где } i=1, 2, \ldots,$$

ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

19. В выпуклом четырёхугольнике ABCD выполнены равенства $\angle CBD = 2\angle ADB$, $\angle ABD = 2\angle CDB$ и $AB = CB$. Докажите,что $CD = AD$.

20. В треугольнике ABC $\angle B = 2\angle C$ и $\angle A > 90°$. Точка D на прямой AB такова, что CD перпендикулярно AC; M — середина BC. Докажите, что $\angle AMB = \angle DMC$.

21. На диагонали BD выпуклого четырёхугольника ABCD отмечена такая точка E, что $AB = DE$, $BC = AE$ и $\angle CBD = \angle BAE$. Докажите, что $\angle ABD = 2\angle BDC$.

22. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка K такая, что отрезок AK пересекает медиану BM в точке N, причем $AN = BC$. Докажите, что $NK=KB$.

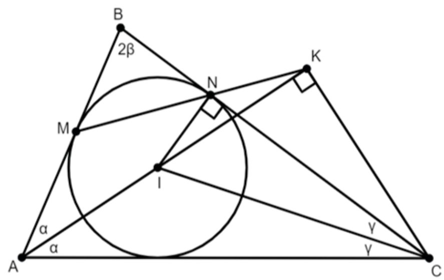
ПЕРЕФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Этот метод совсем не уникален, ведь мы пользуемся им в течение всей нашей жизни. Чарльз Кеттеринг: *«Хорошо сформулированная проблема – это наполовину решенная проблема»*. Problem – в переводе с английского означает задача. Поэтому переформулировка условия задачи часто может стать ключом к решению. Но важно отметить, что переформулировать мы имеем право так, чтобы это никак не меняло условие.

Рассмотрим известную задачу 255, которая благодаря переформулировке и обобщению стала настоящей леммой и породила множество задач:

23. Пусть M и N — точки касания вписанной окружности со сторонами AB и BC треугольника ABC соответственно. Точка K – основание перпендикуляра, опущенного из точки C на биссектрису угла A. Доказать, что M, N и K – коллинеарные.

Доказательство: коллинеарность точек – это всегда трудно доказуемое дело. Поэтому переформулируем задачу так: пусть K – это пересечение прямой MN и биссектрисы угла A,



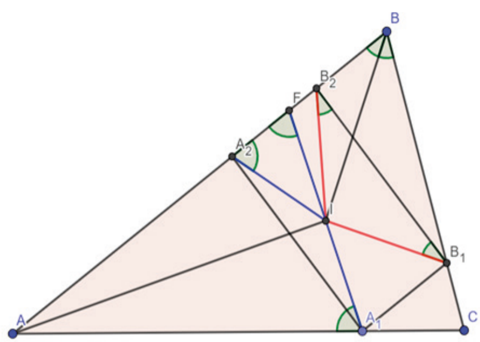
тогда нам достаточно доказать, что $\angle AKC = 90°$. ППусть I является центром вписанной окружности, тогда $IN \perp BC$. Введем обозначения углов треугольника: $\angle A = 2\alpha$; $\angle B = 2\beta$; $\angle C = 2\gamma$. Тогда $\angle BMN = 90° - \beta$; $\angle AKM = 90° - \alpha - \beta = \gamma = \angle ICN$. Следовательно, четырехугольник INKC – вписанный, значит, $\angle AKC = \angle IKC = \angle INC = 90°$.

Комментарий: классическое доказательство данной леммы. Но нельзя не упомянуть и то, что без переформулировки задача имеет прекрасное решение с помощью прямой Симсона (см. «Увидеть окружность»).

А теперь посмотрим прекрасную задачу, в которой используется вторая лемма о воробьях.

24. Точки A_1, B_1 отмечены на сторонах AC и BC в остроугольном треугольнике ABC так, что $A_1B_1 \parallel AB$. Точки A_2 и B_2 являются основаниями перпендикуляров, которые опущены на AB из A_1 и из B_1 соответственно. Доказать, что $AC = AB_2+CB_1$ только при условии, что $BC = BA_2+CA_1$.

Доказательство: обозначим центр вписанной окружности ABC за I. Сославшись на вторую лемму о воробьях, условие для доказательства можно переписать так: докажите, что IB_2BB_1 вписанный тогда и только тогда, когда IA_2AA_1 вписанный.



Пусть $IB_2 BB_1$ – вписанный, тогда $\angle IB_2B_1=\angle IBB_1=\angle IBB_2= \angle IB_1B_2$, откуда $IB_2=IB_1$, и I лежит на серединном перпендикуляре к B_2B_1, а т. к. $A_2B_2B_1A_1$ прямоугольник, то и на серединном перпендикуляре к A_2A_1, => $A_2 I=IA_1$.

Продлим A_1I до пересечения с AB в F. Тогда несложным счетом углов в прямоугольном треугольнике A_2A_1F получим $\angle IA_2 F=\angle IFA_2$, $FI=A_2 I=IA_1$. Тогда AI – биссектриса и медиана в AFA_1, тогда $\angle AA_1I=\angle IFA_2=\angle IA_2F$, откуда IA_2AA_1 – вписанный, ч. т. д. В другую сторону доказывается абсолютно аналогично.

Комментарий: задача уникальна тем, что она действительно показывает, насколько важно уметь при прочтении условия применить нужный метод. Данное умение вырабатывается в ходе решения большого числа задач и развития МЕТОДИЧЕСКОГО мышления.

СОВЕТ 5

Методическое мышление необходимо для будущих математиков, особенно важно правильно формулировать и доносить данные методы. Это сильно поможет в студенческую пору, когда надо как-то зарабатывать, и на помощь придет оказание репетиторских услуг.

ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

25. В квадрате ABCD сторонах AB и BC внешним и внутренним образом построили равносторонние треугольники ABK и BCP соответственно. Доказать принадлежность точки P прямой DK.

26. В трапеции ABCD, у которой боковые стороны AB = 8 и CD = 5, биссектриса угла ABC пересекает биссектрисы углов BAD и BCD в точках M и N соответственно, а биссектриса угла CDA пересекает эти же две биссектрисы в точках L и K, при этом точка L лежит на стороне BC. Доказать, что прямая MK делит отрезок AB пополам.

27. Диагонали BD и AC трапеции ABCD (AB ∥ CD) пересекаются под прямым углом в точке O. Точки M и N расположены на лучах OA и OB соответственно так, что углы ANC и BMD прямые. Точка E — середина отрезка MN. Докажите, что прямая OE перпендикулярна основаниям трапеции.

28. Вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB окружность касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Опустим высоту B_1H треугольника $A_1B_1C_1$. Доказать, что точка H принадлежит биссектрисе угла BAC.

ГЕОМЕТРИЯ МАСС

Данный метод не имеет большой популярности в современных олимпиадных задачах, поэтому данную главу можно смело считать дополнительной, но не менее интересной, чем предыдущие.

Материальная точка в физике – это тело, размерами которого можно пренебречь при сравнении его с расстояниями до других тел в рамках нашей задачи. Поэтому для упрощения рассуждений считают, что вся масса тела сосредоточена в одной точке.

Будем рассматривать два малых шарика с массами m_1 и m_2, которые соединены между собой жестким невесомым стержнем, на котором имеется такая точка Z, что если мы подвесим в этой точке всю систему, то она будет находиться в равновесии. Данная точка Z является тем самым центром масс двух материальных точек, у которых массы m_1 и m_2. Всё описанное выше применимо для любого числа материальных точек. Но если мы подвесим систему не за центр масс, то не будет выполняться условие равновесия системы. Зато есть замечательная точка Z, для которой система останется в равновесии. С другой стороны любая точка может стать ей, если на концах стержня поместить массы согласно правилу рычага. Для этого применяются следующие принципы:

1. У любой системы, состоящей из конечного числа материальных точек, имеется центр масс и притом единственный.

2. Центр масс двух материальных точек расположен на «стержне», т.е. отрезке, который соединяет эти точки; его положение определяется с помощью правила рычага. Произведение массы материальной точки на ее расстояние до центра масс одинаково для обеих точек.

3. Положение всей системы не изменится, если перенести в центр масс все массы конечного числа материальных точек подсистемы.

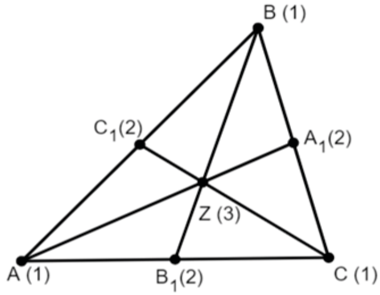
Геометрия масс является альтернативой теоремы Менелая. Геометрия масс более проста в использовании и требует только верное размещение масс в соответствии с указанными принципами.

Далее будем использовать следующие обозначения:

mA – материальная точка A (точка A вместе с массой m, которая ей сопоставлена); м.т. – материальная точка.

Все уважающие себя математики знают теорему о пересечении медиан. Но мало кто знает, что эта теорема несет имя Архимеда. Докажем же теорему Архимеда с помощью геометрии масс:

29. Медианы треугольника пересекается в одной точке, и каждая из них делится этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины.



Доказательство: пусть ABC — данный треугольник; AA_1, BB_1, CC_1 — его медианы. Загрузим вершины A, B, C равными массами, — скажем, по 1 грамму.

Получающаяся система трех материальных точек 1A, 1B, 1C имеет однозначно определенный центр масс Z (свойство 1). В силу свойства 3 положение центра масс не изменится, если массы материальных точек 1B и 1C мы перенесем в их центр масс, т. е. (согласно свойству 2) в точку A_1. Но тогда Z окажется центром масс лишь двух материальных точек $2A_1$ и 1A. Значит, $Z \in [AA_{\Delta}]$.

Аналогично убедимся, что $Z \in [BB_1]$ и $Z \in [CC_1]$. Таким образом, все три медианы имеют общую точку Z. Кроме того, по правилу рычага (свойство 2) имеем $2ZA_1=1ZA$, или $ZA:ZA_1=2:1$.

Комментарий: именно этим методом Архимед и доказывал данную теорему, в честь чего ее так и назвали. Отличное и наглядное решение!

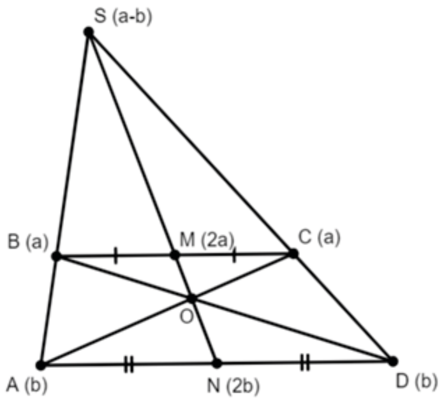
А теперь докажем этим методом уже ранее используемую лемму о трапеции:

30. Точка пересечения продолжения боковых сторон трапеции, точка пересечения диагоналей и середины оснований лежат на одной прямой.

Доказательство: Не теряя общности, введем обозначения и поместим в вершинах трапеции массы как на рисунке. Тогда

$$\frac{AD}{BC} = \frac{a}{b}$$

по правилу рычага (свойство 2).



Следовательно, центр масс A и D находится в середине одноименного отрезка, в точке N, а для точек B и C таковым центром служит M. То есть центр масс системы четырех точек лежит на бимедиане MN.

Теперь сгруппируем массы иначе. По правилу рычага центр масс точек A и C находятся в точке O. Там же лежит центр масс точек B и D, ведь треугольники AOD и COB подобны по двум углам. Получается, с одной стороны, центр масс четырех вершин трапеции лежит на отрезке MN, с другой стороны, он находится в точке O. Но в силу единственности центра масс (свойство 1) чэто означает то, что точка O принадлежит прямой MN. Теперь докажем, что точка S также лежит на прямой MN. Теперь докажем, что точка S также лежит на прямой

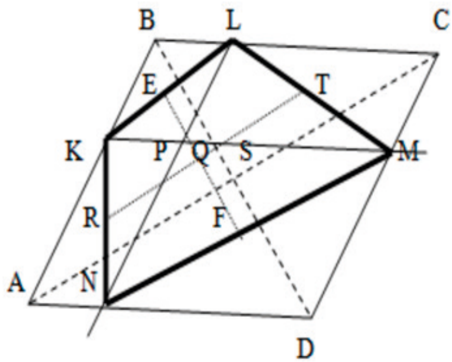
Не теряя общности, в точках A и D положим массы величиной b, а в точке S массу (a-b). Так как центр масс A и D находится в середине одноименного отрезка, в точке N, то центр масс треугольника SAD оказывается на медиане SN и равен a-b+2b=a+b.

Группируя массы иначе, по правилу рычага, центр масс отрезка AC оказывается в точке O и также равен (a+b). Значит, S, O, N коллинеарные. Следовательно, и все четыре интересующие точки принадлежат одной прямой, что и требовалось доказать!

Комментарий: конечно, эту лемму можно доказать и более простым способом (как?), но мы же учимся ради методики.

31. Параллельные сторонам параллелограмма ABCD прямые проведены через точку P, которая расположена внутри параллелограмма. Прямые пересекают стороны AB, BC, CD, DA в точках K, L, M, N соответственно. Назовем точку пересечения средних линий четырёхугольника KLMN точкой Q, а точку пересечения диагоналей параллелограмма – точкой S. Доказать, что точка Q делит отрезок PS пополам.

Доказательство: Прямые RT и EF средние линии четырёхугольника KLMN. Поэтому 1K, 1L, 1M, 1N. Тогда 1K+1N=2R, 1K+1L=2E, 1L+1M=2T,1M+1N=2F. Пусть У центр масс, тогда 2R+2T=4У и 2E+2F=4У.



Это означает, что центр масс лежит на пересечении отрезков RT и EF, а значит, совпадает с точкой Q. KBLP параллелограмм (BC‖KM и AB‖LN), значит, 1K+1L=2E и 1B+1P=2E. Аналогично, NDMP - параллелограмм. Для него выполняется 1M+1N=2F и 1D+1P=2F. Тогда для устойчивости системы точек B, P, D в точку P необходимо поместить две одинаковых массы. Итак, имеем 1B, 2P, 1D. 1B+1D=2S, 2S+2P=4Q. Соответственно, точки P, S и Q лежат на прямой PM и PQ=QS.

Комментарий: даже олимпиадные задачи могут решаться с помощью метода масс. Поэтому, если в условии требуют доказать отношение или коллинеарность, стоит обращать внимание на данный метод.

ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

32. (Теорема Вариньона) Докажите, что середины сторон всякого четырёхугольника составляют вершины параллелограмма.

33. (Прямая Ньютона) Докажите, что если в четырёхугольнике две пары противоположных сторон не параллельны, то две середины его диагоналей лежат на прямой, которая проходит через центр отрезка, который соединяет точки пересечения этих противоположных сторон.

34. Из точек A, B, C, D никакие три не являются коллинеарными, M и N делят отрезки AB и CD пополам соотвественно, а K является серединой отрезкой MN. Назовем точку пересечения медиан треугольника BCD точкой P. Требуется доказать, что точки A, K и P – коллинеарные.

35. В правильном шестиугольнике ABCDEF на сторонах AB и EF отмечены точки K и L соответственно так, что AK:KB = EL:LF. Медиана KM треугольника KDL пересекает диагональ BE в точке N. Найдите отношение

ПЕРВЫЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ ЛИЦЕЙ
ИМЕНИ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Краснодарский край, г. Усть-Лабинск,
ул. им. Марии Овсянниковой, д. 20

+7 (861)-352-20-50

https://ul-lyceum.ru/