

Сборник задач

по геометрии

5000 задач
с ответами

И. Ф. Шарыгин
Р. К. Гордин

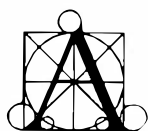
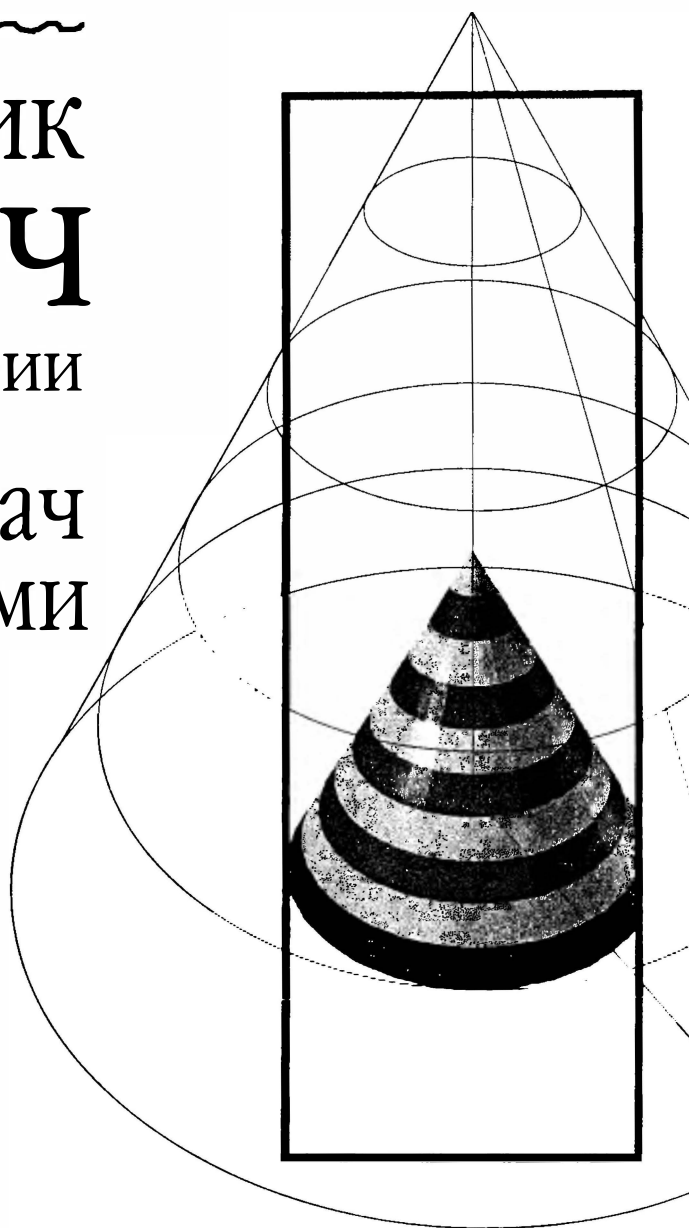


И. Ф. Шарыгин
Р. К. Гордин

Сборник задач

по геометрии

5000 задач
с ответами



МОСКВА
Астрель • АСТ
2001

УДК 373.167.1:514

ББК 22.151я721

Ш26

Шарыгин И. Ф.

Ш26 Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами / И. Ф. Шарыгин, Р. К. Гордин. — М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2001. — 400 с.: ил.

ISBN 5-17-005419-X (ООО «Издательство АСТ»)

ISBN 5-271-01560-2 (ООО «Издательство Астрель»)

Книга содержит достаточно полную подборку учебных задач по всему курсу геометрии.

В сборник, кроме учебных задач, включены конкурсные и олимпиадные задачи. Конкурсные задачи полезны учащимся, которые готовятся к поступлению в вуз, а задачи олимпиадного раздела помогут подготовиться к участию в школьных, районных, городских олимпиадах. Сборник можно использовать применительно к любому школьному учебнику.

Пособие предназначено для учащихся общеобразовательных учреждений, может быть полезно учителям и специалистам по подготовке математических олимпиад.

Задачник соответствует требованиям обязательного минимума содержания среднего (полного) образования по математике.

УДК 373.167.1:514

ББК 22.151я721

ISBN 5-17-005419-X

(ООО «Издательство АСТ»)

ISBN 5-271-01560-2

(ООО «Издательство Астрель»)

© ООО «Издательство Астрель», 2001

ПРЕДИСЛОВИЕ

В сборнике собрано 5000 задач по геометрии. Из них более 3500 задач по планиметрии и примерно 1500 задач по стереометрии. Возможно, это рекорд. Мы не знаем, существует ли сегодня где-нибудь более полная коллекция геометрических задач. Но не ради установления рекорда создана эта книга. Эта книга многоцелевая. Прежде всего, в ней содержится достаточно полная подборка учебных задач. Задачи разбиты по темам, и учитель сможет найти задачи по любой теме и для любых учебных целей, в зависимости от его опыта и квалификации.

Как известно, в последнее десятилетие в результате реформы нашей школы появились альтернативные и разноуровневые учебники. Эти учебники значительно отличаются друг от друга, в том числе и последовательностью изложения тем. Отсюда следует, что такие учебники требуют различных систем учебных задач. Мы же, не отдавая предпочтения какому-либо учебнику (вернее, стараясь не отдавать предпочтения), предлагаем своего рода «конструктор», из которого можно составить систему учебных задач под любой курс, действующий или даже предполагаемый.

Среди учебных задач встречаются задачи, отмеченные знаком $\circ$. Это *ключевые задачи*. На них следует обратить особое внимание. Их надо не

только решать, но и знать, т. е. уметь применять содержащийся в задаче факт или используемый при решении прием.

Кроме учебных задач сборник содержит **конкурсные и олимпиадные задачи**.

Коллекция конкурсных задач вполне представительна и включает задачи разного уровня: от самых простых до задач, предлагаемых на механико-математическом факультете МГУ. Все или почти все задачи этого раздела предлагались на конкурсных экзаменах в разные вузы и в разное время. Мы не стали указывать первоисточники. Надеемся, что опытный преподаватель сумеет сам найти для задачи нужную «полочку». Эта работа для него облегчается тем, что все задачи этого раздела, как и остальных, расположены по возрастанию сложности. Конечно, сложность задачи — это дело опыта и вкуса, и, возможно, другие авторы могли бы расположить задачи иначе.

В разделе олимпиадных задач практически нет супертрудных. Поэтому возможно использовать эту книгу для подготовки к математическим олимпиадам, прежде всего школьным, районным, городским. Кроме того, только достаточно сильный и хорошо подготовленный ученик может заниматься олимпиадными задачами самостоятельно. Лучше всего, если подго-

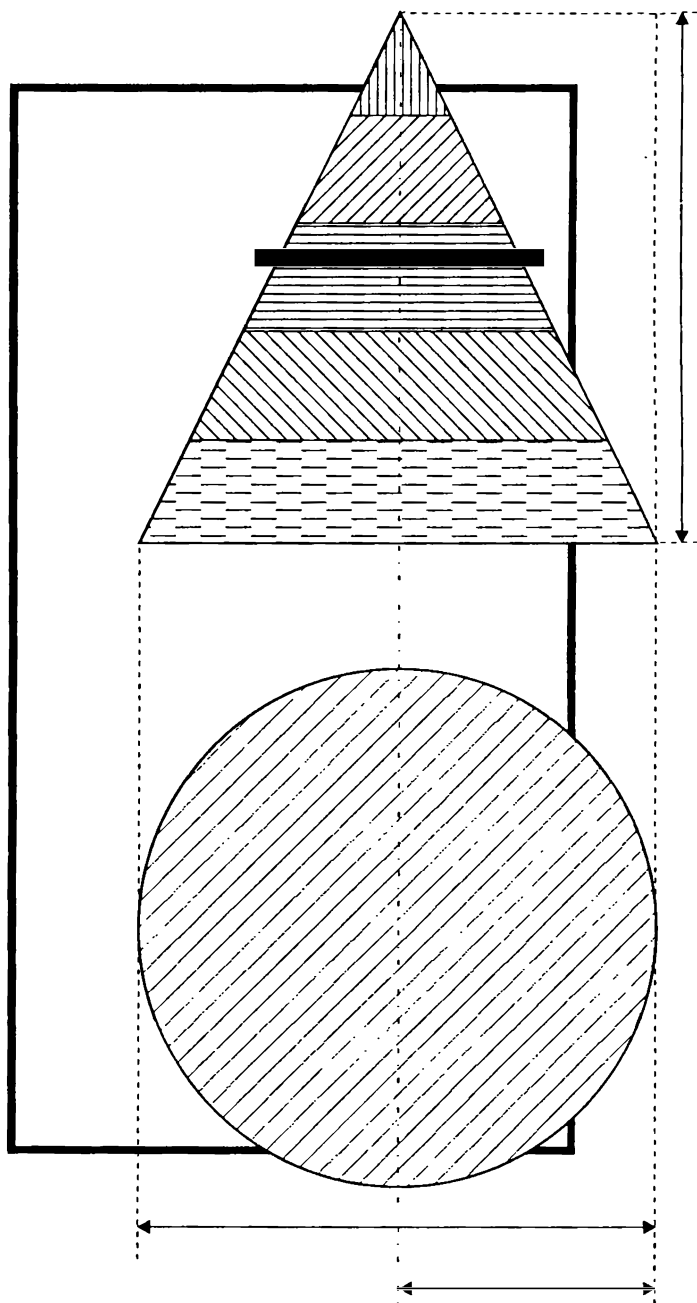
товкой к олимпиаде руководит опытный и сильный преподаватель, не только умеющий решать олимпиадные задачи, знающий специфические методы и приемы, но и знакомый с достаточно большим числом олимпиадных задач, так что значительная часть задач, собранных в нашей книге, — это его «старые знакомые».

Кому предназначена эта книга? Ответ достаточно очевиден: учащимся и учителям математики (причем преподающим в средней и старшей школе),

репетиторам и специалистам по проведению математических олимпиад и подготовке к ним школьников. Мы, конечно, не исключаем и даже надеемся, что данным сборником заинтересуются и родители школьников, желающие, чтобы их дети получили хорошую геометрическую подготовку. По нашему глубокому убеждению, всем им этот сборник не только может оказаться полезным, но и очень полезным. Он сможет стать им помощником в работе на многие годы.

Авторы

Планиметрия



УЧЕБНЫЕ ЗАДАЧИ

1. ВВОДНЫЕ ЗАДАЧИ

1°. На прямой последовательно откладываются точки A, B, C, D, E и F , причем $AB = BC = CD = DE = EF$. Найдите отношения $AD : DF$, $AC : AF$, $BD : CF$.

2. На прямой последовательно отмечаются точки A, B, C и D , причем $AB = BC = CD = 6$. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и CD .

3°. Точка K отрезка AB , равного 12, расположена на 5 ближе к A , чем к B . Найдите AK и BK .

4. Точка M расположена на отрезке AN , а точка N — на отрезке BM . Известно, что $AB = 18$ и $AM : MN : NB = 1 : 2 : 3$. Найдите MN .

5. На прямой взяты точки A, O и B . Точки A_1 и B_1 симметричны соответственно точкам A и B относительно точки O . Найдите A_1B_1 , если $AB_1 = 2$.

6°. Один из двух смежных углов на 30° больше другого. Найдите эти углы.

7. Один из двух смежных углов в 3 раза меньше другого. Найдите эти углы.

8°. Один из четырех углов, образующихся при пересечении двух прямых, равен 41° . Чему равны три остальных угла?

9. На прямой выбраны три точки A, B и C , причем $AB = 3$, $BC = 5$. Чему может быть равно AC ?

10. Точка B лежит на отрезке AC , равном 5. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и BC .

11. Вдоль прямолинейной дороги стоят две избы A и B на расстоянии 50 м друг от друга. В какой точке дороги надо построить колодец, чтобы сумма расстояний от колодца до изб была наименьшей?

12°. На прямой даны точки A, B и C . Известно, что $AB = 5$, а отрезок AC длиннее BC на 1. Найдите AC и BC .

13. На прямой даны точки A, B и C . Известно, что $AB = 5$, а отрезок AC длиннее BC в 1,5 раза. Найдите отрезки AC и BC .

14. Точки M, A и B расположены на одной прямой, причем отрезок AM вдвое больше отрезка BM . Найдите AM , если $AB = 6$.

15. Точка M — середина отрезка AB , а точка N — середина отрезка MB . Найдите отношения $AM : MN$, $BN : AM$ и $MN : AB$.

16. На прямой выбраны три точки A, B и C , причем $AB = 1$, $BC = 3$. Чему может быть равно AC ? Укажите все возможности.

17°. Прямой угол разделен двумя лучами на три угла. Один из них на 10° больше другого и на 10° меньше третьего. Найдите эти углы.

18. Точки A, B, C последовательно расположены на одной прямой и $AB : BC = 3 : 4$. Найдите отношения $AB : AC$ и $BC : AC$.

19°. Вдоль прямолинейной дороги с интервалами в 50 м стоят три избы A, B и C . В какой точке дороги надо построить колодец, чтобы сумма расстояний от колодца до изб была наименьшей?

20°. На линейке отмечены три деления: 0, 2 и 5. Как отложить с ее помощью отрезок длиной 6 см?

21. Имеется угольник с углом в 70° . Как построить с его помощью угол в 40° ?

22. Имеется угольник с углом в 40° . Как с его помощью построить угол в: а) 80° ; б) 160° ; в) 20° ?

23°. Точки A, B, C расположены на одной прямой и $AC : BC = 2 : 5$. Найдите отношения $AC : AB$ и $BC : AB$.

24. Луч света, пущенный из точки M , зеркально отразившись от прямой AB в точке C , попал в точку N (рис. 1). Докажите, что биссектриса угла MCN перпендикулярна прямой AB . (Угол падения равен углу отражения.)

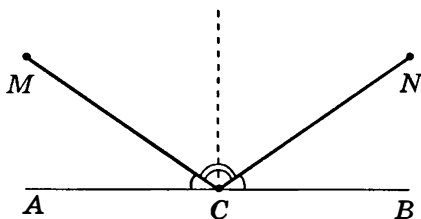


Рис. 1

25. На прямой выбраны четыре точки A, B, C и D , причем $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 4$. Чему может быть равно AD ?

26°. На деревянной линейке отмечены три деления: 0, 7 и 11 см. Как отложить с ее помощью отрезок в: а) 8 см; б) 5 см?

27°. Точка C — середина отрезка AB . На отрезках AC и BC взяты точки M и N , причем $AM : MC = CN : NB$. Докажите, что отрезок MN равен половине отрезка AB .

28. Точка M лежит внутри угла AOB , OC — биссектриса этого угла. Докажите, что угол MOC равен модулю полуразности углов AOM и BOM .

29. Точки A, B, C расположены на одной прямой и $AC : BC = m : n$ (m и n — натуральные). Найдите отношения $AC : AB$ и $BC : AB$.

30. Точка B делит отрезок AC в отношении $AB : BC = 2 : 1$. Точка D делит отрезок AB в отношении $AD : DB = 3 : 2$. В каком отношении делит точка D отрезок AC ?

31. Точка M лежит вне угла AOB , OC — биссектриса этого угла. Докажите, что угол MOC равен полусумме углов AOM и BOM ?

32. Из точки на листе бумаги провели четыре луча, делящих плоскость на четыре угла. Затем лист разрезали по биссектрисам этих углов на четыре части (которые также являются углами). Докажите, что два из этих углов образуют в сумме 180° и два других — тоже.

33. На сколько градусов поворачивается за минуту минутная стрелка? часовая стрелка?

34. Точки C, E и D делят отрезок AB в отношениях $1 : 2$, $1 : 3$ и $1 : 4$ соответственно (считая от точки A). В каком отношении точка E делит отрезок DC ?

35. Один из углов, образованных пересекающимися прямыми a и b , равен 15° . Прямая a_1 симметрична прямой a относительно прямой b , а прямая b_1 симметрична прямой b относительно прямой a . Найдите углы, образованные прямыми a_1 и b_1 .

36. Даны точки A и B . Где на прямой AB расположены точки, расстояние от которых до точки A : а) вдвое больше, чем до точки B ; б) втрое меньше, чем до точки B ?

37. Через точку на плоскости провели 10 прямых, после чего плоскость разрезали по этим прямым на углы. Докажите, что хотя бы один из этих углов меньше 20° .

38. Какой угол образуют минутная и часовая стрелка в 3 часа 05 минут?

39. Из точки O на плоскости выходят три луча OA, OB, OC . Известно, что $\angle AOB = 91^\circ$, $\angle BOC = 90^\circ$. Найдите $\angle AOC$.

40. В деревне у прямой дороги с интервалами в 50 м стоят четыре избы A , B , C и D . В какой точке дороги надо построить колодец, чтобы сумма расстояний от колодца до изб была наименьшей?

41. Даны точки A и B . Где на прямой AB расположены точки, расстояние от которых до точки B больше, чем до точки A ?

42. Имеется угольник с углом в 19° . Как построить с его помощью угол в 1° ?

43. В полдень минутная и часовая стрелки совпали. Когда они совпадут в следующий раз?

44. Из точки O на плоскости выходят четыре луча, следующие друг за другом по часовой стрелке: OA , OB , OC и OD (рис. 2). Известно, что сумма углов AOB и COD равна 180° . Докажите, что биссектрисы углов AOC и BOD перпендикулярны.

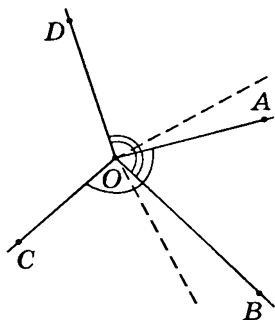


Рис. 2

45. Даны точки A и B . Для каждой точки M , не совпадающей с точкой B и лежащей на прямой AB , рассмотрим отношение $AM : BM$. Где расположены точки, для которых это отношение: а) больше 2; б) меньше 2?

46. Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки совпадают? образуют развернутый угол? образуют прямой угол?

47. В деревне A живет 100 школьников, в деревне B живет 50 школьни-

ков. Расстояние между деревнями 3 км. В какой точке дороги из A в B надо построить школу, чтобы суммарное расстояние, проходимое всеми школьниками, было как можно меньше?

48. На прямой выбрали четыре точки A , B , C , D и измерили расстояния AB , AC , AD , BC , BD и CD . Могут ли они быть равными (в порядке возрастания): а) 1; 2; 3; 4; 5; 6; б) 1; 1; 1; 2; 2; 4?

2. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ПРИЗНАКИ И СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

49°. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку есть геометрическое место точек, равноудаленных от концов этого отрезка.

50. Докажите, что биссектриса угла есть геометрическое место внутренних точек угла, равноудаленных от его сторон.

51. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

52. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

53. Докажите, что около любого треугольника можно описать окружность, и притом единственную.

54. Через точку, не лежащую на данной прямой, проведите с помощью циркуля и линейки прямую, параллельную данной.

55°. Докажите, что в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы.

56. Катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы. Докажите, что угол, противолежащий этому катету, равен 30° .

57°. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O . Докажите равенство треугольников BAO и DCO , если известно, что $\angle BAO = \angle DCO$ и $AO = OC$.

58. Докажите, что у равнобедренного треугольника высота, опущенная на основание, является медианой и биссектрисой.

59. Треугольники ABC и ABC_1 — равнобедренные с общим основанием AB . Докажите равенство треугольников ACC_1 и BCC_1 .

60. Два отрезка AB и CD пересекаются в точке O , которая является серединой каждого из них. Докажите равенство треугольников ACD и BDC .

61. Медиана треугольника делит пополам его периметр. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

62. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O , которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок BD , если отрезок $AC = 10$?

63. На основании AB равнобедренного треугольника ABC даны точки A_1 и B_1 . Известно, что $AB_1 = BA_1$. Докажите, что треугольник AB_1C равен треугольнику BA_1C .

64. На стороне AB треугольника ABC взята точка D , а на стороне A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ взята точка D_1 . Известно, что треугольники ADC и $A_1D_1C_1$ равны и отрезки DB и D_1B_1 также равны. Докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

65. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O . Докажите равенство треугольников ACO и DBO , если известно, что $\angle ACO = \angle DBO$ и $BO = OC$.

66. Докажите, что у равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$:

а) медианы, проведенные из вершин A и A_1 , равны;

б) биссектрисы, проведенные из вершин A и A_1 , равны.

67. Треугольники ACC_1 и BCC_1 на рис. 3 равны. Их вершины A и B лежат по разные стороны от прямой CC_1 . Докажите, что треугольники ABC и ABC_1 — равнобедренные.

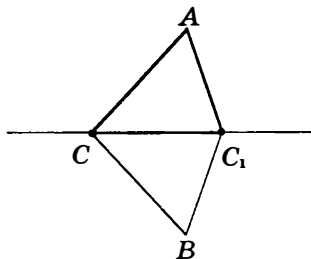


Рис. 3

68. Докажите признак равенства треугольников по углу, биссектрисе этого угла и стороне, прилежащей к этому углу.

69. Докажите, что в равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

70. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BM . На ней взята точка D . Докажите равенство треугольников: а) ABD и CBD ; б) AMD и CMD .

71. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, если у него:

а) медиана BD является высотой;

б) высота BD является биссектрисой.

72. Докажите, что биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины, противолежащей основанию, является медианой и высотой.

73. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из них.

74. На сторонах AB , BC и CA равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки AD , BE и CF . Точки D , E и F соединены отрезками. Дока-

жите, что треугольник DEF — равнобедренный.

75. Отрезки AB и CD пересекаются под прямым углом и $AC = AD$. Докажите, что $BC = BD$ и $\angle ACB = \angle ADB$.

76. Даны два треугольника: ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки K и L , а на сторонах A_1C_1 и B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ — точки K_1 и L_1 , так что $AK = A_1K_1$, $LC = L_1C_1$. Докажите, что $KL = K_1L_1$ и $AL = A_1L_1$.

77. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC и углом при вершине B , равным 36° , проведена биссектриса AD . Докажите, что треугольники CDA и ADB — равнобедренные.

78. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC , равным 37 , внешний угол при вершине B равен 60° . Найдите расстояние от вершины C до прямой AB .

79°. На сторонах BC и B_1C_1 равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ взяты соответственно точки M и M_1 , причем $BM : MC = B_1M_1 : M_1C_1$. Докажите, что $AM = A_1M_1$.

80. Внешние углы треугольника ABC при вершинах A и C равны 115° и 140° . Прямая, параллельная прямой AC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N . Найдите углы треугольника BMN .

81. От вершины C равнобедренного треугольника ABC с основанием AB отложены равные отрезки: CA_1 на стороне CA и CB_1 на стороне CB . Докажите равенство треугольников: 1) CAB_1 и CBA_1 ; 2) ABB_1 и BAA_1 .

82. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки C_1 и C_2 . Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, если треугольники ABC_1 и BAC_2 равны.

83°. Докажите, что у равнобедренного треугольника:

а) биссектрисы, проведенные из вершин при основании, равны;

б) медианы, проведенные из тех же вершин, также равны.

84°. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой. Докажите, что если треугольники ABE_1 и ABE_2 равны, то треугольники CDE_1 и CDE_2 также равны.

85. Отрезки AB и CD пересекаются. Докажите, что если отрезки AC, CB, BD и AD равны, то луч AB является биссектрисой угла CAD , луч CD — биссектрисой угла ACB , а CD перпендикулярно AB .

86. Треугольники ABC и BAD равны, причем точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB (рис. 4). Докажите, что:

а) треугольники CBD и DAC равны;

б) прямая CD делит отрезок AB пополам.

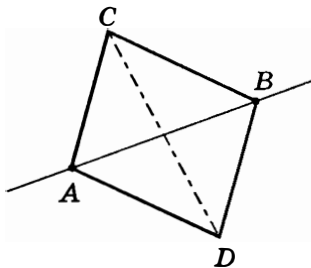


Рис. 4

87°. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $AO = OD$. Докажите равенство треугольников ABC и DCB .

88. Найдите углы треугольника, если известно, что его стороны лежат на прямых, углы между которыми равны $20^\circ, 30^\circ$ и 50° .

89. В треугольнике проведены две высоты. Докажите, что если их отрезки от точки пересечения до вершин равны, то треугольник равнобедренный.

90. В треугольнике ABC проведены биссектрисы из вершин A и B . Точка их пересечения обозначена через D . Найдите угол ADB , если:

1) $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 100^\circ$;

2) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$;

3) $\angle C = 130^\circ$;

4) $\angle C = \gamma$.

91. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC ; CD — биссектриса угла C ; $\angle ADC = 150^\circ$. Найдите угол B .

92. В треугольнике известны величины углов A , B , C . Найдите углы шести треугольников, на которые данный треугольник разбивается его биссектрисами.

93°. Биссектрисы двух углов треугольника пересекаются под углом 70° . Найдите третий угол треугольника.

94. Через вершину B треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой AC . Образовавшиеся при этом три угла с вершиной B относятся как $3 : 10 : 5$. Найдите углы треугольника ABC .

95. Через точку M , лежащую внутри угла с вершиной A , проведены прямые, параллельные сторонам угла и пересекающие эти стороны в точках B и C . Известно, что $\angle ACB = 50^\circ$, а угол, смежный с углом ACM , равен 40° . Найдите углы треугольников BCM и ABC .

96. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC , пересекает сторону BC в точке M . При этом $BM = AB$, $\angle BAM = 35^\circ$, $\angle CAM = 15^\circ$. Найдите углы треугольника ABC .

97. Точки A , B , C , D лежат на одной прямой, причем отрезки AB и CD имеют общую середину. Докажите, что если треугольник ABE равнобедренный с основанием AB , то треугольник CDE также равнобедренный с основанием CD .

98. Докажите равенство треугольников по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и углам, которые образует медиана с этой стороной.

99. Докажите равенство треугольников по стороне и высотам, опущенным на две другие стороны.

100. Докажите, что если высота треугольника проходит через центр описанной около него окружности, то этот треугольник равнобедренный.

101. Дан треугольник ABC . На продолжении стороны AC за точку A отложен отрезок $AD = AB$, а за точку C — отрезок $CE = CB$. Найдите углы треугольника DBE , зная углы треугольника ABC .

102. Высоты треугольника ABC , проведенные из вершин A и C , пересекаются в точке M . Найдите $\angle AMC$, если $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 80^\circ$.

103. Если на гипотенузе BC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отметить две точки E и D так, что $BE = BA$ и $CD = CA$, то $\angle DAE = 45^\circ$. Докажите.

104. В равнобедренном треугольнике ABC высоты AD и CE , опущенные на боковые стороны, образуют угол AMC , равный 48° . Найдите углы треугольника ABC .

105. Из середины гипотенузы составлен перпендикуляр до пересечения с катетом, и полученная точка соединена с концом другого катета отрезком, который делит угол треугольника в отношении $2 : 5$ (меньшая часть — при гипотенузе). Найдите этот угол.

106. Дан угол A . От его вершины A отложим на одной из сторон угла отрезок AB ; из точки B проведем прямую, параллельную второй стороне данного угла; на этой прямой отложим внутри угла отрезок BD , равный BA , и соединим точку D с вершиной A . Докажите, что прямая AD делит данный угол пополам.

107. Две параллельные прямые пересечены третьей. Найдите угол между биссектрисами внутренних односторонних углов.

108. В треугольнике ABC медиана BD равна половине стороны AC . Найдите угол B треугольника.

109. В треугольнике ABC из вершины C проведены биссектрисы внутреннего и внешнего углов (рис. 5). Первая биссектриса образует со стороной AB угол, равный 40° . Какой угол образует с продолжением стороны AB вторая биссектриса?

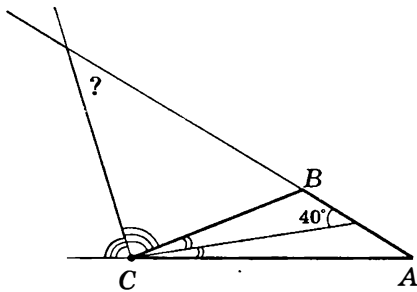


Рис. 5

110. Точки A и D лежат на одной из двух параллельных прямых, точки B и C — на другой, причем прямые AB и CD также параллельны. Докажите, что противоположные углы четырехугольника $ABCD$ равны.

111. Через середину M отрезка с концами на двух параллельных прямых проведена прямая, пересекающая эти прямые в точках A и B . Докажите, что M также середина AB .

112°. Углы треугольника относятся как $2 : 3 : 4$. Найдите отношение внешних углов треугольника.

113. Докажите, что высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, вдвое меньше гипотенузы.

114°. Угол треугольника равен сумме двух других его углов. Докажите, что треугольник прямоугольный.

115. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC , причем $\angle ABM = \angle ACB$ и $\angle CBN = \angle BAC$. Докажите, что треугольник BMN равнобедренный.

116. Угол при основании BC равнобедренного треугольника ABC вдвое больше угла при вершине, BD — бис-

сектриса треугольника. Докажите, что $AD = BC$.

117. Два угла треугольника равны 10° и 70° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины третьего угла треугольника.

118. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30° , а гипотенуза равна 8. Найдите отрезки, на которые делит гипотенузу высота, проведенная из вершины прямого угла.

119. Прямая, проведенная через вершину C треугольника ABC параллельно его биссектрисе BD , пересекает продолжение стороны AB в точке M . Найдите углы треугольника MBC , если $\angle ABC = 110^\circ$.

120°. Докажите, что геометрическое место точек, удаленных на данное расстояние от данной прямой, есть две параллельные прямые, находящиеся на данном расстоянии от этой прямой.

121. Одна из сторон треугольника вдвое больше другой, а угол между этими сторонами равен 60° . Докажите, что треугольник прямоугольный.

122. Даны два равнобедренных треугольника с общим основанием. Докажите, что их медианы, проведенные к основанию, лежат на одной прямой.

123. Докажите, что если две стороны и угол против меньшей из них одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу против меньшей из них другого треугольника, то треугольники могут быть как равными, так и не равными.

124. Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BK . Найдите AB , если $BC = 12$.

125. Прямая, проведенная через вершину A треугольника ABC перпендикулярно его медиане BD , делит эту медиану пополам. Найдите отношение сторон AB и AC .

126°. В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M на расстояние, равное AM . Найдите расстояние от полученной точки до вершин B и C , если $AB = 4$, $AC = 5$.

127. Две различные окружности пересекаются в точках A и B . Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, делит отрезок AB пополам и перпендикулярна ему.

128°. Разделите отрезок пополам с помощью циркуля и линейки.

129. Докажите, что диагонали четырехугольника с равными сторонами взаимно перпендикулярны.

130. Две высоты треугольника равны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

131. AD — биссектриса треугольника ABC . Точка M лежит на стороне AB , причем $AM = MD$. Докажите, что $MD \parallel AC$.

132. Точки A и D лежат на одной из двух параллельных прямых, точки B и C — на другой, причем прямые AB и CD также параллельны. Докажите, что $AB = CD$ и $AD = BC$.

133. Некоторая прямая пересекает параллельные прямые a и b в точках A и B соответственно. Биссектриса одного из образовавшихся углов с вершиной B пересекает прямую a в точке C . Найдите AC , если $AB = 1$.

134. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O (рис. 6) и делятся ею в отношении $AO : OB = CO : OD = 1 : 2$. Прямые AD и BC пересекаются

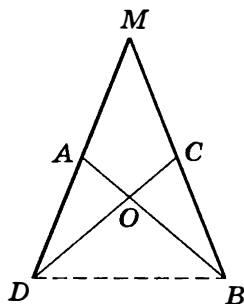


Рис. 6

в точке M . Докажите, что треугольник DMB равнобедренный.

135. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если меди-

ана, проведенная к его гипотенузе, делит прямой угол в отношении $1 : 2$.

136. Известно, что при пересечении прямых a и b третьей прямой образовалось восемь углов. Четыре из этих углов равны 80° , а четыре других равны 100° . Следует ли из этого, что прямые a и b параллельны?

137. Пусть AE и CD — биссектрисы равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Докажите, что $\angle BED = 2\angle AED$.

138. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30° . Докажите, что в этом треугольнике отрезок перпендикуляра, проведенного к гипотенузе через ее середину до пересечения с катетом, вдвое меньше большего катета.

139. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки P и Q так, что $\angle PXB = \angle QXC$, где X — середина основания BC . Докажите, что $BQ = CP$.

140. Докажите, что две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.

141. Докажите, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую.

142. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеют место равенства $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, причем $BC \geq AB$, то эти треугольники равны.

143. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N , причем $MN \parallel AB$ и $MN = AM$. Найдите угол BAN , если $\angle B = 45^\circ$ и $\angle C = 60^\circ$.

144. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC , пересекает сторону BC в точке M , причем $BM = AB$. Найдите разность углов BAM и CAM , если $\angle ACB = 25^\circ$.

145. BK — биссектриса треугольника ABC . Известно, что $\angle AKB : \angle CKB = 4 : 5$. Найдите разность углов A и C треугольника ABC .

146. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию. Верно ли обратное?

147. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Докажите, что $AC \parallel BD$ и $AD \parallel BC$.

148. Один из углов треугольника равен α . Найдите угол между биссектрисами внешних углов, проведенными из вершин двух других углов.

149. Докажите, что биссектрисы равностороннего треугольника делятся точкой пересечения в отношении $2 : 1$, считая от вершин треугольника.

150. На стороне AB квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник ABM . Найдите угол DMC .

151. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30° . Докажите, что высота и медиана, проведенные из вершины прямого угла, делят прямой угол на три равные части.

152. Основание H высоты CH прямоугольного треугольника ABC соединили с серединами M и N катетов AC и BC . Докажите, что периметр четырехугольника $CMHN$ равен сумме катетов треугольника ABC .

153. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC расположены точки N и M соответственно, причем $AN = NM = MB = BC$. Найдите углы треугольника ABC .

154. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $AC = 10$. Из точки D , совпадающей с серединой AB , проведен перпендикуляр DE к стороне AB до пересечения со стороной BC в точке E . Периметр треугольника ABC равен 40. Найдите периметр треугольника AEC .

155. Можно ли расположить на плоскости три круга так, что любые два из них имели бы общие точки, а все три — нет?

156. Докажите, что центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, совпадает с серединой гипотенузы.

157. Докажите, что радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен медиане, проведенной к большей стороне (к гипотенузе). Верно ли обратное утверждение? (Если радиус описанной около треугольника окружности равен медиане, то треугольник прямоугольный.)

158. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CK из вершины прямого угла C , а в треугольнике ACK — биссектриса CE . Докажите, что $CB = BE$.

159°. Расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Докажите, что расстояние от каждой точки одной из двух параллельных прямых до второй прямой постоянно.

160. Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = BC$). Отрезок AM делит его на два равнобедренных треугольника с основаниями AB и MC . Найдите угол B .

161. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC , пересекающие прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите AB , если $BM = 8$, $KC = 1$.

162. Треугольники ABC и ABD равны, причем точки C и D не совпадают. Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой AB .

163. Треугольники ABC и ADC имеют общую сторону AC ; стороны AD и BC пересекаются в точке M . Углы B и D равны по 40° . Расстояние между вершинами D и B равно стороне AB ; $\angle AMC = 70^\circ$. Найдите углы треугольников ABC и ADC .

164. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ заданы: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

165. На луче OX отложены последовательно точки A и C , а на луче

OY — B и D (рис. 7). При этом $OA = OB$ и $AC = BD$. Прямые AD и BC пересекаются в точке E . Докажите, что луч OE — биссектриса угла XOY .

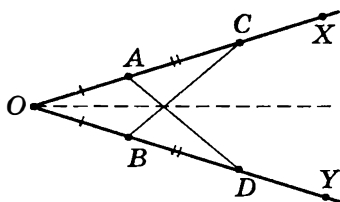


Рис. 7

166. В треугольнике с неравными сторонами AB и AC проведены высота AH и биссектриса AD . Докажите, что угол HAD равен полуразности углов B и C .

167. В треугольнике ABC высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M . Известно, что $MB_1 = MC_1$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

168. Биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M , биссектрисы B_1B_2 и C_1C_2 треугольника AB_1C_1 пересекаются в точке N . Докажите, что точки A , M и N лежат на одной прямой.

169. Высоты остроугольного треугольника ABC , проведенные из вершин A и B , пересекаются в точке H , причем $\angle AHB = 120^\circ$, а биссектрисы, проведенные из вершин B и C , — в точке K , причем $\angle BKC = 130^\circ$. Найдите угол ABC .

170. Постройте прямоугольный треугольник по катету и медиане, проведенной из вершины прямого угла.

171. AD — биссектриса треугольника ABC , E — основание перпендикуляра, опущенного из центра O вписанной окружности на сторону BC . Докажите, что $\angle BOE = \angle COD$.

172. На продолжениях гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC за точки A и B соответственно взяты точки K и M , причем $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол MCK .

173. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки K и M , причем $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол MCK .

174°. Через данную точку проведите прямую, пересекающую две данные прямые под равными углами.

175. Дана незамкнутая ломаная $ABCD$, причем $AB = CD$ и $\angle ABC = \angle BCD$. Докажите, что $AD \parallel BC$.

176. На сторонах AC и BC равнобедренного треугольника ABC построены внешним образом равнобедренные прямоугольные треугольники ACN и BCM с прямыми углами при вершинах A и C соответственно. Докажите, что $BM \perp BN$.

177. Докажите, что биссектрисы двух внешних углов и третьего внутреннего угла треугольника пересекаются в одной точке.

178. Найдите сумму внутренних углов:

- четыреугольника;
- выпуклого пятиугольника;
- выпуклого n -угольника.

179. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O . Через точку O проходят две прямые, которые параллельны прямым AB и AC и пересекаются с BC в точках D и E . Докажите, что периметр треугольника OED равен отрезку BC .

180. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка L делит диагональ AC в отношении $AL : LC = 3 : 1$. Докажите, что угол KLD — прямой.

181. Биссектрисы углов A и B треугольника ABC одинаково наклонены к сторонам BC и AC . Найдите зависимость между углами A и B .

182. Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и сумме катетов.

183. Существует ли треугольник, две биссектрисы которого перпендикулярны?

184. Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC равен 108° .

Перпендикуляр к биссектрисе AD этого треугольника, проходящий через точку D , пересекает сторону AC в точке E . Докажите, что $DE = BD$.

185. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке K . Известно, что $AC \parallel BD$. Докажите, что треугольники AKC и BKD равнобедренные.

186. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1, один из острых углов равен 15° . Найдите гипотенузу.

187. На каждой стороне правильного треугольника взято по точке. Стороны треугольника с вершинами в этих точках перпендикулярны сторонам исходного треугольника (рис. 8). В каком отношении каждая из взятых точек делит сторону исходного треугольника?

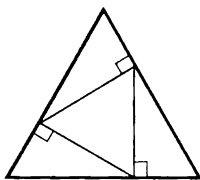


Рис. 8

188. Найдите углы равнобедренного треугольника, если известно, что угол между биссектрисой, проведенной к основанию, и биссектрисой, проведенной к боковой стороне, равен углу при вершине.

189. Отрезок постоянной длины движется по плоскости так, что его концы скользят по сторонам прямого угла. По какой траектории движется середина этого отрезка?

190. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, исходящим из одной вершины.

191. Докажите равенство треугольников по медиане и углам, на которые медиана разбивает угол треугольника.

192. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCK и

DCL . Докажите, что треугольник AKL — правильный.

193. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника вне его построены квадраты $ACDE$ и $BCKF$. Из точек E и F на продолжение гипотенузы опущены перпендикуляры EM и FN . Докажите, что $EM + FN = AB$.

194. Найдите сумму углов при вершинах самопересекающейся пятиконечной звезды.

195. Докажите, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

196. Докажите признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему углу.

197. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Периметр треугольника ABC равен периметру треугольника ABD , а периметр треугольника ACD — периметру треугольника BCD . Докажите, что $AO = BO$.

198. Точки M и N — середины равных сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P . Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку MN проходит через точку P .

199. Докажите, что две различные окружности не могут иметь более трех общих точек.

200. В треугольнике ABC угол A равен 60° , а биссектриса угла A , медиана, проведенная из вершины B , и высота, проведенная из вершины C , пересекаются в одной точке. Найдите остальные углы треугольника.

201. В треугольнике ABC сторона AB равна 2, а углы A и B равны соответственно 60° и 70° . На стороне AC взята точка D так, что $AD = 1$. Найдите углы треугольника BDC .

202. Найдите сумму внешних углов выпуклого n -угольника.

203. Продолжения двух противоположных сторон AB и CD четырех-

угольника $ABCD$ пересекаются под углом α , продолжения двух других противоположных сторон пересекаются под тем же углом. Докажите, что два угла в четырехугольнике равны, и найдите разность двух других его углов.

204. Биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O . Известно, что $AO \perp B_1C_1$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

205. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит противоположную сторону так, что отрезок, прилежащий к вершине треугольника, равен его основанию. Докажите, что эта биссектриса также равна основанию треугольника.

206. Величины углов A, B, C треугольника ABC составляют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{\pi}{7}$.

Биссектрисы этого треугольника пересекаются в точке D . Точки A_1, B_1, C_1 находятся на продолжениях отрезков DA, DB, DC за точки A, B, C соответственно на одинаковом расстоянии от точки D . Докажите, что величины углов A_1, B_1, C_1 также образуют арифметическую прогрессию. Найдите ее разность.

207. Прямая пересекает боковую сторону AC , основание BC и продолжение боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC в точках K, L и M соответственно. При этом треугольники CKL и BML также равнобедренные. Найдите их углы.

208. Биссектриса внутреннего угла при вершине A и биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекаются в точке M . Найдите $\angle BMC$, если $\angle BAC = 40^\circ$.

209. Возможно ли, чтобы одна биссектриса треугольника делила пополам другую биссектрису?

210. Сторона AD прямоугольника $ABCD$ в три раза больше стороны AB .

Точки M и N делят AD на три равные части (рис. 9). Найдите $\angle AMB + \angle ANB + \angle ADB$.

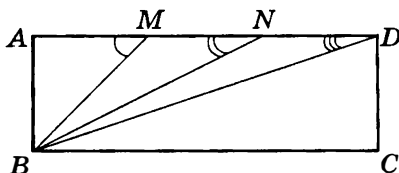


Рис. 9

211. Найдите углы треугольника, если известно, что медиана и высота, выходящие из вершины одного из его углов, делят этот угол на три равные части.

212. Дан равнобедренный треугольник ABC с вершиной A . Длина прыжка кузнечика равна основанию BC . Известно, что, начиная движение из точки C , кузнечик за 23 прыжка оказался в точке A , приземляясь после каждого прыжка на боковой стороне треугольника ABC и чередуя стороны при каждом прыжке, кроме последнего. Найдите углы треугольника ABC , если известно, что с каждым прыжком кузнечик приближался к точке A .

213. Какие значения может принимать: а) наибольший угол треугольника; б) наименьший угол треугольника; в) средний по величине угол треугольника?

214. В треугольнике ABC угол B равен 20° , угол C равен 40° . Биссектриса AD равна 2. Найдите разность сторон $BC - AB$.

215. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M так, что $\angle MAB = 60^\circ$, $\angle MCD = 15^\circ$. Найдите $\angle MBC$.

216. На стороне BC равностороннего треугольника ABC взята точка M , а на продолжении стороны AC за точку C — точка N , причем $AM = MN$. Докажите, что $BM = CN$.

217°. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в

точке E , $AB = AD$, CA — биссектриса угла C , $\angle BAD = 140^\circ$, $\angle BEA = 110^\circ$. Найдите угол CDB .

218°. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $AE = AD$, $AC = AB$ и $\angle DAC = \angle AEB + \angle ABE$. Докажите, что DC в два раза больше медианы AK треугольника ABE .

219°. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка P так, что $\angle PBA = \angle PAB = 15^\circ$. Докажите, что CPD — равносторонний треугольник.

220. На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.

221. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины, вдвое меньше другой биссектрисы. Найдите углы треугольника.

222. В треугольнике ABC известны углы $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 15^\circ$. На продолжении стороны AC за точку C взята точка M так, что $CM = 2AC$. Найдите $\angle AMB$.

223. Дан треугольник ABC , причем $AB = AC$ и $\angle A = 80^\circ$. Внутри треугольника ABC взята точка M такая, что $\angle MBC = 30^\circ$, а $\angle MCB = 10^\circ$. Найдите $\angle AMC$.

224. Дан треугольник ABC , причем $AB = AC$ и $\angle A = 110^\circ$. Внутри треугольника взята точка M такая, что $\angle MBC = 30^\circ$, а $\angle MCB = 25^\circ$. Найдите $\angle AMC$.

225. Докажите, что если в треугольнике один угол равен 120° , то треугольник, образованный основаниями его биссектрис, прямоугольный.

226. На сторонах AB , BC и CA остроугольного треугольника ABC взяты точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что если $\angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1$, $\angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1$ и $\angle A_1C_1B = \angle AC_1B_1$, то точки A_1 , B_1 и C_1 явля-

ются основаниями высот треугольника ABC .

227. В треугольнике ABC угол B равен 36° , угол C равен 42° . На стороне BC взята точка M так, что $BM = R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC . Найдите угол MAC .

3. ОКРУЖНОСТЬ. ДИАМЕТР, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЙ ХОРДЕ. ЗАМЕЧАТЕЛЬНОЕ СВОЙСТВО ОКРУЖНОСТИ. КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ. КАСАЮЩИЕСЯ ОКРУЖНОСТИ. ОПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК

228. Докажите, что диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.

229. Докажите, что у четырехугольника, описанного около окружности, суммы противоположных сторон равны.

230. Через точку M проведены две касательные MA и MB к окружности (A и B — точки касания). Докажите, что $MA = MB$.

231. Докажите, что центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

232. Докажите, что около четырехугольника, сумма противоположных углов которого равна 180° , можно описать окружность.

233. Из точки, данной на окружности, проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.

234. Из точки, данной на окружности, проведены две хорды, каждая из которых равна радиусу. Найдите угол между ними.

235. Угол между радиусами OA и OB окружности равен 60° . Найдите хорду AB , если радиус окружности равен R .

236°. Постройте окружность, которая проходила бы через две данные точки и центр которой находился бы на данной прямой.

237. Из внешней точки проведены к кругу две взаимно перпендикулярные касательные (рис. 10). Радиус круга $R = 10$. Найдите длину каждой касательной.

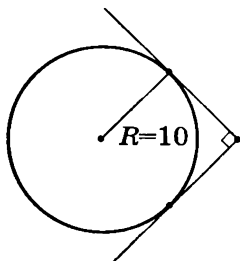


Рис. 10

238. Дан сектор, равный четверти круга радиуса R . Найдите длину касательной, проведенной в середине его дуги до пересечения с продолжениями крайних радиусов сектора.

239. AB и AC — касательные к одной окружности, $\angle BAC = 60^\circ$, длина ломаной BAC равна 1. Найдите расстояние между точками касания B и C .

240. Хорда стягивает дугу в 90° и равна 16. Найдите до нее расстояние от центра окружности.

241. Радиусы двух концентрических окружностей относятся, как $7 : 4$, а ширина кольца равна 12. Найдите радиус меньшей окружности.

242. Докажите, что касательные к окружности, проведенные через концы диаметра, параллельны.

243. Хорда пересекает диаметр под углом 30° и делит его на два отрезка длинами 2 и 6. Найдите расстояние от центра окружности до этой хорды.

244°. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, равен r , а полупериметр — p . Найдите гипотенузу.

245. Три последовательные стороны описанного четырехугольника относятся, как $1 : 2 : 3$. Найдите его стороны, если известно, что периметр равен 24.

246. Докажите, что равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.

247. Докажите, что хорды, удаленные от центра окружности на равные расстояния, равны.

248. Постройте окружность данного радиуса, отсекающую на данной прямой отрезок, равный данному.

249. Через точку A окружности с центром O проведены диаметр AB и хорда AC . Докажите, что угол BAC вдвое меньше угла BOC .

250. Угол с вершиной C равен 120° . Окружность радиуса R касается сторон угла в точках A и B . Найдите AB .

251. Точки A и B лежат на окружности. Касательные к окружности, проведенные через эти точки, пересекаются в точке C . Найдите углы треугольника ABC , если $AB = AC$.

252. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB , BC и AC в точках C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Известно, что $AC_1 = BA_1 = CB_1$. Докажите, что треугольник ABC — правильный.

253. В прямой угол вписан круг. Хорда, соединяющая точки касания, равна 2. Найдите расстояние от центра круга до этой хорды.

254. Даны два круга радиусами R и r ($R > r$), один вне другого. К ним проведены две общие внешние касательные. Найдите их длину (между точками касания), если их продолжения образуют прямой угол.

255. Две прямые проходят через точку M и касаются окружности в точках A и B . Проведя радиус OB , продолжайте его за точку B на расстояние $BC = OB$. Докажите, что $\angle AMC = \angle BMC$.

256. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 4. Найдите радиус описанной окружности.

257. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2, угол при вершине равен 120° . Найдите диаметр описанной окружности.

258. В равнобедренном треугольнике боковая сторона делится точкой касания вписанного круга в отношении $7 : 5$ (начиная от вершины). Найдите отношение боковой стороны к основанию.

259. Укажите все точки M внутри круга, через которые можно провести две различные хорды, делящиеся в точке M пополам.

260. Докажите, что если пересечь два концентрических круга секущей, то части секущей, лежащие между окружностями, равны между собой.

261. Через точку A , лежащую на окружности, проведены диаметр AB и хорда AC , причем $AC = 8$ и $\angle BAC = 30^\circ$. Найдите хорду CM , перпендикулярную AB .

262. Хорда большей из двух концентрических окружностей касается меньшей. Докажите, что точка касания делит эту хорду пополам.

263. В круге даны две взаимно перпендикулярные хорды. Каждая из них делится другой хордой на два отрезка в 3 и 7. Найдите расстояние от центра окружности до каждой хорды.

264. В круге с центром O проведена хорда AB и продолжена на расстояние BC , равное радиусу (рис. 11). Через точку C и центр O проведена секущая

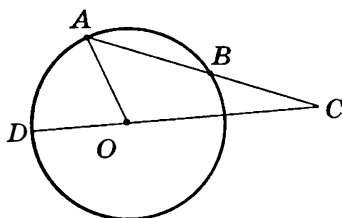


Рис. 11

CD (D — точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка CO). Докажите, что угол AOD равен утроенному углу ACD .

265. Докажите, что середины всех хорд данной длины, проведенных в данной окружности, лежат на некоторой окружности.

266. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу.

267. Три равных круга радиуса R касаются друг друга внешним образом. Найдите стороны и углы треугольника, вершинами которого служат точки касания.

268. Два равных круга касаются изнутри третьего круга и касаются между собой. Соединив три центра, получим треугольник с периметром, равным 18. Найдите радиус большего круга.

269. Около круга, радиус которого равен 4, описан прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 26. Найдите периметр треугольника.

270. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу пополам. Найдите углы треугольника.

271. Расстояние от точки M до центра O окружности равно диаметру этой окружности. Через точку M проведены две прямые, касающиеся окружности в точках A и B . Найдите углы треугольника AOB .

272. В круге на расстоянии 1 от центра даны две взаимно перпендикулярные хорды. Каждая из них равна 6. На какие части одна хорда делит другую?

273. В круге радиуса R даны два взаимно перпендикулярных диаметра. Произвольная точка окружности спроецирована на эти диаметры. Найдите расстояние между проекциями точки.

274. Сторона ромба равна 8, острый угол равен 30° . Найдите радиус вписанного круга.

275. Две касающиеся окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом окружности радиуса R с центром O . Найдите периметр треугольника OO_1O_2 .

276. Центры трех попарно касающихся друг друга внешним образом окружностей расположены в точках A, B, C , $\angle ABC = 90^\circ$. Точки касания — K, P и M (P на стороне AC). Найдите угол KPM .

277. Разделите окружность с данным центром на 6 равных частей, пользуясь только циркулем.

278. Найдите угол между радиусами OA и OB , если расстояние от центра O окружности до хорды AB : а) вдвое меньше AB ; б) вдвое меньше OA .

279. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K . Найдите CK , если $AC = 2$ и $\angle A = 30^\circ$.

280. Докажите, что окружность, построенная на стороне равностороннего треугольника как на диаметре, проходит через середины двух других сторон треугольника.

281. Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.

282. Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, проходит через середину другой стороны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

283. Окружности, центры которых расположены по разные стороны от некоторой прямой, касаются этой прямой. Линия центров пересекает прямую под углом, равным 30° . Найдите расстояние между центрами окружностей, если их радиусы равны r и R .

284. Две прямые касаются окружности с центром O в точках A и B и пересекаются в точке C . Найдите угол между этими прямыми, если $\angle ABO = 40^\circ$.

285. Две прямые, пересекающиеся в точке C , касаются окружности с центром O в точках A и B . Известно, что $\angle ACB = 120^\circ$. Докажите, что сумма отрезков AC и BC равна отрезку OC .

286. Прямая, параллельная хорде AB , касается окружности в точке C . Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

287. Точка A лежит вне данной окружности с центром O . Окружность с диаметром OA пересекается с данной в точках B и C . Докажите, что прямые AB и AC — касательные к данной окружности.

288. Прямая касается окружности с центром O в точке A . Точка C на этой прямой и точка D на окружности расположены по разные стороны от прямой OA . Найдите угол CAD , если угол AOD равен 110° .

289. Прямая касается окружности с центром O в точке A . Точка C на этой прямой и точка D на окружности расположены по одну сторону от прямой OA (рис. 12). Докажите, что угол CAD вдвое меньше угла AOD .

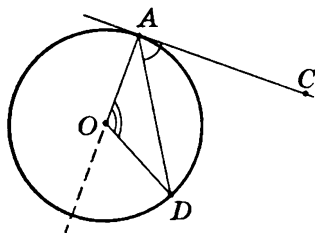


Рис. 12

290. Диагонали четырехугольника делят его углы пополам. Докажите, что в такой четырехугольник можно вписать окружность.

291. Радиусы двух кругов равны 2 и 4. Их общие внутренние касательные взаимно перпендикулярны. Найдите длины каждой из них.

292. Центр окружности, описанной около треугольника, совпадает с центром вписанной окружности. Найдите углы треугольника.

293. Центральный угол сектора равен 60° , а радиус равен R . Найдите радиус круга, вписанного в этот сектор.

294. В острый угол, равный 60° , вписаны две окружности, извне касающиеся друг друга. Радиус меньшей окружности равен r . Найдите радиус большей окружности.

295. Даны два круга — один внутри другого. Через их центры проведен в большем круге диаметр, который окружностью меньшего круга делится на три части: 5, 8 и 1. Найдите расстояние между центрами кругов.

296. Из конца A диаметра AC окружности опущен перпендикуляр AP на касательную, проведенную через лежащую на окружности точку B , отличную от A и C . Докажите, что AB — биссектриса угла PAC .

297. Две хорды окружности взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.

298. Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Докажите, что отрезок секущей, заключенный между параллельными прямыми, виден из центра окружности под прямым углом.

299. Окружность касается одной стороны прямого угла с вершиной O и пересекает вторую сторону в точках A и B . Найдите радиус окружности, если $OA = a$ и $OB = b$.

300. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром O . Докажите, что $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.

301. В данный круг, радиус которого равен 3, вписано шесть равных кру-

гов, из которых каждый касается данного круга; кроме того, каждый из этих шести кругов касается двух соседних. Найдите радиусы кругов.

302. Шесть равных кругов касаются внешним образом круга радиуса 1 и, кроме того, каждый из этих шести кругов касается двух соседних. Найдите радиусы кругов.

303. Стороны треугольника относятся, как $5 : 4 : 3$. Найдите отношения отрезков сторон, на которые они делятся точками касания с вписанной окружностью.

304. Даны две концентрические окружности радиусов 1 и 3 с общим центром O . Третья окружность касается их обеих. Найдите угол между касательными к третьей окружности, выходящими из точки O .

305. Через центр окружности, вписанной в трапецию, проведена прямая, параллельная основаниям. Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами, равен четверти периметра трапеции.

306. На отрезке AB как на диаметре построена окружность. Докажите, что из всех точек окружности, отличных от A и B , отрезок AB виден под прямым углом.

307. Равные хорды окружности с центром O пересекаются в точке M . Докажите, что MO — биссектриса угла между ними.

308. Через концы диаметра окружности проведены две хорды, пересекающиеся на окружности и равные 12 и 16. Найдите расстояния от центра окружности до этих хорд.

309°. Продолжения равных хорд AB и CD окружности соответственно за точки B и C пересекаются в точке P . Докажите, что треугольники APD и BPC — равнобедренные.

310°. Биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине A треугольника ABC пересекают прямую

BC в точках P и Q (рис. 13). Докажите, что окружность, построенная на отрезке PQ как на диаметре, проходит через точку A .

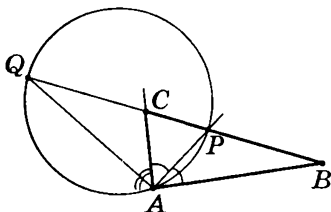


Рис. 13

311. Докажите, что отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, лежит на прямой BC .

312°. Из точки M , лежащей вне двух концентрических окружностей, проведены четыре прямые, касающиеся окружностей в точках A, B, C и D . Докажите, что точки M, A, B, C, D расположены на одной окружности.

313°. Две прямые, проходящие через точку M , лежащую вне окружности с центром O , касаются окружности в точках A и B . Отрезок OM делится окружностью пополам. В каком отношении отрезок OM делится прямой AB ?

314. Окружность проходит через вершину C и середины D и E сторон BC и AC равностороннего треугольника ABC . Докажите, что прямая, проходящая через середины сторон AB и BC , — касательная к окружности.

315. Хорда, перпендикулярная диаметру окружности, делит его в отношении $1:3$. Под какими углами видна хорда из концов этого диаметра?

316. Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, высекает на двух других сторонах равные отрезки. Докажите, что треугольник равнобедренный.

317. Даны две равные касающиеся окружности. Под каким углом пересе-

каются прямые, одна из которых касается этих окружностей в разных точках, а вторая проходит через центр одной из окружностей и касается другой?

318. Через данную в круге точку проведите хорду, которая делилась бы этой точкой пополам.

319. В данном круге проведены две равные параллельные хорды, расстояние между которыми равно радиусу данного круга. Найдите острый угол между прямыми, соединяющими концы хорд.

320. Даны две круга. Их общие внутренние касательные взаимно перпендикулярны. Хорды, соединяющие точки касания, равны 3 и 5. Найдите расстояние между центрами кругов.

321. Пусть r — радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c .

Докажите, что $r = \frac{a+b-c}{2}$.

322. Пусть r — радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов прямоугольного треугольника со сторонами a, b, c . Докажите, что $r = \frac{a+b+c}{2}$.

323. В треугольник ABC вписана окружность. Пусть x — расстояние от вершины A до ближайшей точки касания, $BC = a$. Докажите, что $x = p - a$, где p — полупериметр треугольника.

324. Через точку касания двух окружностей проведена секущая. Докажите, что радиусы и касательные, проведенные через концы образовавшихся хорд, попарно параллельны.

325. На сторонах OA и OB четверти AOB круга построены как на диаметрах полуокружности ACO и OCB , пересекающиеся в точке C . Докажите, что:

- 1) прямая OC делит $\angle AOB$ пополам;
- 2) точки A, C и B лежат на одной прямой;
- 3) дуги AC, CO и CB равны между собой.

326. В шестиугольнике, описанном около окружности, даны пять последовательных сторон: a, b, c, d, e . Найдите шестую сторону.

327. Стороны треугольника ABC касаются некоторой окружности в точках K, P и M , причем точка M расположена на стороне BC . Найдите угол KMP , если $\angle BAC = 2\alpha$.

328. AB — диаметр окружности, AC и BD — параллельные хорды этой окружности. Докажите, что $AC = BD$ и CD также диаметр окружности.

329. Докажите, что прямая, проходящая через центры вневписанных окружностей треугольника ABC , касающихся сторон AB и AC , перпендикулярна прямой, проходящей через центр вписанной окружности и вершину A .

330. Две окружности пересекаются в точках A и B ; AM и AN — диаметры окружностей. Докажите, что точки M, N и B лежат на одной прямой.

331. Найдите центр данной окружности с помощью чертежного угольника.

332. BM и CN — высоты треугольника ABC . Докажите, что точки B, N, M и C лежат на одной окружности.

333. Окружность, построенная на биссектрисе AD треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и AC соответственно в точках M и N , отличных от A . Докажите, что $AM = AN$.

334. Через точку A проведена прямая, пересекающая окружность с диаметром AB в точке K , отличной от A , а окружность с центром B — в точках M и N . Докажите, что $MK = KN$.

335. Докажите, что точка пересечения биссектрис треугольника ABC , точки B и C , а также точка пересечения биссектрис внешних углов с вершинами B и C лежат на одной окружности.

336. Точки A, B, C и D последовательно расположены на окружности,

причем центр O окружности расположен внутри четырехугольника $ABCD$ (рис. 14). Точки K, L, M и N — середины отрезков AB, BC, CD и AD соответственно. Докажите, что

$$\angle KON + \angle MOL = 180^\circ.$$

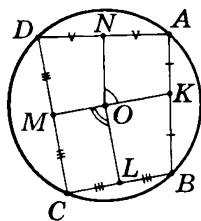


Рис. 14

337. Угол при вершине A треугольника ABC равен 120° . Окружность касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC . Докажите, что расстояние от вершины A до центра окружности равно периметру треугольника ABC .

338. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC . В треугольники ABD и ACD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 . Докажите, что треугольник O_1DO_2 прямоугольный.

339. В прямой угол вписана окружность радиуса R , касающаяся сторон угла в точках A и B . Через некоторую точку на меньшей дуге AB окружности проведена касательная, отсекающая от данного угла треугольник. Найдите его периметр.

340. Постройте прямую, касающуюся данной окружности в данной точке, не используя центр окружности.

341. Окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M и продолжений двух других сторон. Докажите, что прямая AM делит периметр треугольника пополам.

342. Окружность с центром O касается в точке A внутренним образом большей окружности. Из точки B

большей окружности, диаметрально противоположной точке A , проведена хорда BC большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке M . Докажите, что $OM \parallel AC$.

343. Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом, а также касаются некоторой прямой соответственно в точках A и B . На продолжении за точку A радиуса O_1A меньшей окружности отложен отрезок AK , равный O_2B . Докажите, что O_2K — биссектриса угла O_1O_2B .

344. Окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC . Докажите, что расстояние от вершины A до точки касания с прямой AB равно половине периметра треугольника ABC .

345. В прямоугольном треугольнике на гипотенузе AB от вершины A отложим отрезок AD , равный катету AC , а от вершины B — отрезок BE , равный катету BC . Докажите, что отрезок DE равен диаметру окружности, вписанной в треугольник ABC .

346. Две окружности радиусов r и ρ ($r < \rho$) касаются внешним образом, а также обе касаются внутренним образом окружности радиуса R . Известно, что треугольник с вершинами в центрах окружностей является равнобедренным, а угол между боковыми сторонами больше $\frac{\pi}{3}$. Найдите основание этого треугольника.

347. Наибольший угол треугольника равен 100° . Построены три попарно касающиеся внешним образом окружности с центрами в вершинах этого треугольника. Найдите наименьший угол треугольника с вершинами в точках касания построенных окружностей.

348. В равнобедренный треугольник с основанием 12 вписана окружность и к ней проведены три касатель-

ные так, что они отсекают от данного треугольника три маленьких треугольника. Сумма периметров отсеченных треугольников равна 48. Найдите боковую сторону данного треугольника.

349. Прямые PA и PB касаются окружности с центром O (A и B — точки касания). Проведена третья касательная к окружности, пересекающая прямые PA и PB в точках X и Y . Докажите, что величина угла XOY не зависит от выбора третьей касательной.

350. Дан круг радиуса 1. Из внешней точки M к нему проведены две взаимно перпендикулярные касательные MA и MB . Между точками касания A и B на дуге AB взята произвольная точка C и через нее проведена третья касательная KL , образующая с касательными MA и MB треугольник KLM . Найдите периметр этого треугольника.

351. Расстояние между центрами непересекающихся окружностей равно a . Докажите, что точки пересечения общих внешних касательных с общими внутренними касательными лежат на одной окружности, и найдите ее радиус.

352. Каково взаимное расположение двух окружностей, если:

а) расстояние между центрами равно 10, а радиусы равны 8 и 2?

б) расстояние между центрами равно 4, а радиусы равны 11 и 17?

в) расстояние между центрами равно 12, а радиусы равны 5 и 3?

353. Окружность, построенная на основании BC трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины диагоналей AC и BD трапеции и касается основания AD . Найдите углы трапеции.

354. Прямая, проходящая через общую точку A двух окружностей, пересекает вторично эти окружности в точках B и C соответственно. Расстояние между проекциями центров окруж-

ностей на эту прямую равно 12. Найдите BC , если известно, что точка A лежит на отрезке BC .

355. Найдите геометрическое место точек M , из которых данный отрезок AB виден под прямым углом (т. е. $\angle AMN = 90^\circ$).

356. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу в отношении $1 : 3$. Найдите острые углы треугольника.

357. Точка D — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC . Окружность, вписанная в треугольник ACD , касается отрезка в его середине. Найдите острые углы треугольника ABC .

358. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB , BC и AC соответственно в точках K , M и N . Найдите угол KMN , если $\angle A = 70^\circ$.

359. Две окружности касаются друг друга внутренним образом. Известно, что два радиуса большей окружности, угол между которыми равен 60° , касаются меньшей окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.

360. Одна вершина правильного треугольника лежит на окружности, а две другие делят некоторую хорду на три равные части. Под каким углом видна хорда из центра окружности?

361. Пусть O_1 , O_2 и O_3 — центры вневписанных окружностей треугольника ABC , касающихся сторон BC , AC и AB соответственно. Докажите, что точки A , B и C — основания высот треугольника $O_1O_2O_3$.

362. Докажите, что сторона BC треугольника ABC видна из центра O вписанной окружности под углом $90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$, а из центра O_1 вневписанной окружности, касающейся стороны BC , — под углом $90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$.

363. Окружность касается двух сторон треугольника и двух его медиан (рис. 15). Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

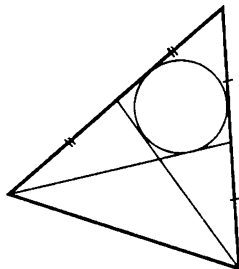


Рис. 15

364°. Проведите через данную точку касательную к данной окружности.

365°. Окружность высекает на сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

366°. Треугольник ABC — равнобедренный; A_1 , B_1 , C_1 — середины сторон BC , AC , AB соответственно. Докажите, что прямая A_1C_1 касается окружности, проходящей через точки A_1 , B_1 , C .

367. Две окружности касаются внешним образом. К ним проведена общая внешняя касательная. На отрезке этой касательной, заключенном между точками касания, как на диаметре построена окружность. Докажите, что она касается линии центров первых двух окружностей.

368. В вершинах A , B , C и D четырехугольника $ABCD$ находятся центры четырех окружностей. Любые две окружности, центры которых расположены в соседних вершинах, касаются друг друга внешним образом. Известны три стороны четырехугольника: $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 5$. Найдите сторону AD .

369. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник со стороной, равной a , проведена касательная,

пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.

370. К окружности, вписанной в квадрат со стороной, равной a , проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.

371. Докажите, что прямая, проходящая через некоторую точку окружности и перпендикулярная радиусу, проведенному в этой точке, имеет единственную общую точку с окружностью, т. е. является касательной к окружности.

372. На листе бумаги вырезана круглая дырка. Через данную точку плоскости проведите касательную к окружности, ограничивающую эту дырку. (Запрещаются любые построения внутри дырки.)

373. Постройте хорду данной окружности, равную и параллельную заданному отрезку.

374. Окружность вписана в треугольник со сторонами, равными a , b и c . Найдите отрезки, на которые точка касания делит сторону, равную a .

375°. Прямая, проходящая через центры двух окружностей, называется их линией центров. Докажите, что общие внешние (внутренние) касательные к двум окружностям пересекаются на линии центров этих окружностей.

376. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K . Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекает их общую касательную, проходящую через точку K , в точке M . Докажите, что $\angle O_1MO_2 = \angle AKB = 90^\circ$.

377. Хорда окружности пересекает некоторый диаметр под углом, равным 30° , и делит его на отрезки, равные a и b . Найдите расстояние от центра окружности до этой хорды.

378. Хорда окружности пересекает некоторый диаметр под углом, рав-

ным 45° , и делится им на отрезки, равные a и b . Найдите расстояние от центра окружности до этой хорды.

379. Окружность с центром O вписана в треугольник ABC . Через точки пересечения окружности с отрезками AO , BO и CO проведены к ней касательные. Найдите углы треугольника, образованного этими касательными, если углы треугольника ABC равны α , β и γ .

380. Прямая касается двух окружностей в точках A и B . Линия центров пересекает первую окружность в точках E и C , а вторую — в точках D и F . Докажите, что AC либо параллельна, либо перпендикулярна BD .

381. Докажите, что если существуют окружность, касающаяся всех сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, и окружность, касающаяся продолжений всех его сторон, то диагонали такого четырехугольника взаимно перпендикулярны.

382. В данную окружность впишите прямоугольный треугольник, катеты которого проходят через две данные точки внутри окружности.

383. Прямые, делящие один угол треугольника на три равные части, делят сам треугольник на три равнобедренных треугольника. Найдите углы данного треугольника.

384. Продолжения биссектрис остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно (рис. 16). Докажите, что высоты треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1 , BB_1 , CC_1 .

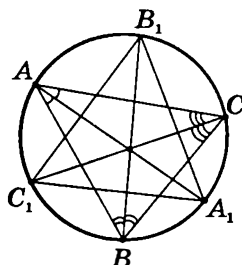


Рис. 16

385°. Продолжения высот остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1, BB_1, CC_1 .

386°. В равнобедренном треугольнике ABC на основании AC взята точка M так, что $AM = a, MC = b$. В треугольниках ABM и CBM вписаны окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей со стороной BM .

387. В треугольник ABC со сторонами $AB = 5, BC = 7, CA = 10$ вписана окружность. Прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках M и K , касается этой окружности. Найдите периметр треугольника MBK .

388. Докажите, что если через точку M внутри круга можно провести три различные хорды, делящиеся точкой M в равном отношении, то M — центр круга.

389. Найдите внутри треугольника ABC такую точку P , чтобы общие хорды каждой пары окружностей, построенных на отрезках PA, PB и PC как на диаметрах, были равны.

390. Постройте прямую, перпендикулярную данной прямой и проходящую через данную на ней точку, проводя не более трех линий.

391. Даны прямая и точка вне ее. Постройте прямую, перпендикулярную данной прямой и проходящую через данную точку, проводя не более трех линий циркулем и линейкой.

392°. Окружность вписана в пятиугольник со сторонами, равными a, b, c, d и e . Найдите отрезки, на которые точка касания делит сторону, равную a .

393. В треугольник вписана окружность. Три касательные к этой окружности отсекают три треугольника, сумма периметров которых равна a . Найдите периметр данного треугольника.

394. CH — высота прямоугольного треугольника ABC , проведенная из

вершины прямого угла. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACH, BCH и ABC , равна CH .

395. CD — медиана треугольника ABC . Окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD , касаются отрезка CD в точках M и N . Найдите MN , если $AC - BC = 2$.

396. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка D , причем $BD - AD = 4$. Найдите расстояние между точками, в которых окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD , касаются отрезка CD .

397. Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Отрезок секущей, заключенный между параллельными прямыми, делится точкой касания в отношении $1 : 3$. Под каким углом секущая пересекает каждую из параллельных прямых?

398. Одна окружность описана около равностороннего треугольника ABC , а вторая касается прямых AB и AC и первой окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.

399. Каждая из трех прямых, параллельных сторонам и проходящих через центр вписанной окружности треугольника, отсекает от него некоторый треугольник. Докажите, что сумма периметров отсеченных треугольников вдвое больше периметра исходного треугольника.

400. Пусть p — полупериметр треугольника, a — длина наибольшей стороны, r — радиус вписанной окружности. Докажите, что треугольник будет остроугольным, прямоугольным или тупоугольным в зависимости от того, будет ли $p - a$ меньше, равно или больше r .

401. Через точку пересечения двух окружностей проведите секущую так, чтобы часть ее, заключенная внутри окружностей, имела данную длину.

402. В треугольник со сторонами $6, 10$ и 12 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что

она пересекает две большие стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.

403. Окружность, построенная на основании AD трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины боковых сторон AB и CD трапеции и касается основания BC . Найдите углы трапеции.

404. Центр описанной окружности треугольника симметричен его центру вписанной окружности относительно одной из сторон. Найдите углы треугольника.

405. Через данную точку окружности проведите хорду, которая бы делилась данной хордой пополам.

406. Даны окружность и две неравные параллельные хорды. Используя только линейку, разделите эти хорды пополам.

407. Постройте центр данной окружности с помощью двусторонней линейки, если известно, что ширина линейки меньше диаметра окружности.

408. Четырехугольник $ABCD$ обладает тем свойством, что существует окружность, вписанная в угол BAD и касающаяся продолжений сторон BC и CD . Докажите, что $AB + BC = AD + DC$.

409. Докажите, что дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.

410. На сторонах четырехугольника как на диаметрах построены четыре окружности (рис. 17). Докажите, что общая хорда окружностей, построен-

ных на двух соседних сторонах, параллельна общей хорде двух других окружностей либо эти хорды лежат на одной прямой.

411. Две окружности касаются внешним (внутренним) образом. Докажите, что сумма (разность) их радиусов равна расстоянию между центрами. Верно ли обратное?

412. Докажите, что отрезок общей внешней касательной к двум окружностям, заключенный между общими внутренними касательными, равен отрезку общей внутренней касательной.

413°. В четырехугольнике $MNPQ$ расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон MN , NP , PQ , а другая — сторон MN , MQ , PQ . Точки B и A лежат соответственно на сторонах MN и PQ , причем отрезок AB касается обеих окружностей. Найдите длину стороны MQ , если $NP = b$ и периметр четырехугольника $BAQM$ больше периметра четырехугольника $ABNP$ на величину $2p$.

414. Окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M , а продолжения сторон AB и AC — в точках N и P соответственно. Вписанная окружность этого треугольника касается стороны BC в точке K , а стороны AB — в точке L . Докажите, что: а) отрезок AN равен полупериметру треугольника ABC ; б) $BK = CM$; в) $NL = BC$.

415. Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точка касания окружностей). Докажите, что линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания.

416. На сторонах BC , CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 и C_1 , причем $AC_1 = AB_1$, $BA_1 = BC_1$ и $CA_1 = CB_1$. Докажите, что A_1 , B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника.

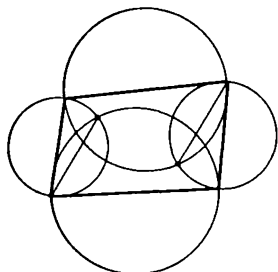


Рис. 17

417. Докажите, что катет прямоугольного треугольника равен сумме радиуса вписанной окружности и радиуса невписанной окружности, касающейся этого катета.

418. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны BC в точке M . Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABM и ACM , касаются отрезка AM в одной точке.

419. Даны окружность, ее центр O и две точки A и B , не лежащие на окружности. Пользуясь только циркулем, постройте точки пересечения окружности с прямой AB .

420. Докажите, что две окружности касаются тогда и только тогда, когда они касаются некоторой прямой в одной и той же точке.

421. Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом в точках A , B и C . Докажите, что касательные к этим окружностям в точках A , B и C пересекаются в одной точке.

422. Докажите, что основания высот, середины сторон и середины отрезков от ортоцентра до вершин треугольника лежат на одной окружности (окружность девяти точек).

423. К двум окружностям различного радиуса проведены общие внешние касательные AB и CD . Докажите, что четырехугольник $ABCD$ описанный тогда и только тогда, когда окружности касаются.

424. Через данную точку проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник заданного периметра.

425. Докажите, что в четырехугольнике, суммы противоположных сторон которого равны между собой, можно вписать окружность.

426. Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ нет параллельных сторон. Обозначим через E и F точки пересечения прямых AB и BC , BC и AD соответственно (точка A лежит на отрезке BE , а точка C — на отрезке BF).

Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда $ED + BF = DF + BE$.

4. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ.

ТРАПЕЦИЯ. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА И ТРАПЕЦИИ. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

427. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2 : 1$, считая от вершин треугольника.

428. Докажите, что прямая, содержащая среднюю линию треугольника, параллельна стороне треугольника, а средняя линия треугольника равна половине этой стороны.

429. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

430. Докажите, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

431. Сторона параллелограмма втрое больше другой его стороны. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 24.

432. Один из углов параллелограмма на 50° меньше другого. Найдите углы параллелограмма.

433. $ABCD$ — данный прямоугольник; M — середина стороны BC . Дано, что прямые MA и MD взаимно перпендикулярны и что периметр прямоугольника $ABCD$ равен 24. Найдите его стороны.

434. Периметр треугольника равен 28, середины сторон соединены отрезками (рис. 18). Найдите периметр полученного треугольника.

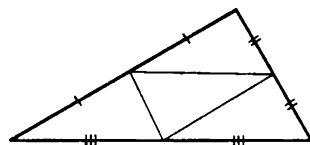


Рис. 18

435. В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M до точки D на расстояние, равное AM (так что $AM = MD$). Докажите, что $ABDC$ — параллелограмм.

436. Периметр треугольника равен 6. Найдите периметр треугольника, стороны которого параллельны сторонам данного и проходят через его вершины.

437. Боковые стороны трапеции равны 7 и 11, а основания — 5 и 15. Прямая, проведенная через вершину меньшего основания параллельно большей боковой стороне, отсекает от трапеции треугольник. Найдите его стороны.

438. Найдите углы ромба, если высота, проведенная из вершины тупого угла, делит противоположную сторону пополам.

439. Периметр ромба равен 8, высота равна 1. Найдите тупой угол ромба.

440. Постройте ромб по данным диагоналям.

441. Докажите, что три средние линии разбивают треугольник на четыре равных треугольника.

442. Наибольший угол прямоугольной трапеции равен 120° , а большая боковая сторона равна c . Найдите разность оснований.

443. Средняя линия, параллельная стороне AC треугольника ABC , равна половине стороны AB . Докажите, что треугольник равнобедренный.

444. Около круга описана трапеция, периметр которой равен 12. Найдите среднюю линию трапеции.

445. Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность, то этот параллелограмм — ромб.

446. На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка M так, что $AM = AB$. Через точку M проведена прямая, перпендикулярная прямой AC и пересекающая BC в точке N . Докажите, что $BH = HM = MC$.

447. На сторонах AB , BC , CD и DA четырехугольника $ABCD$ отмечены соответственно точки M , N , P и Q так, что $AM = CP$, $BN = DQ$, $BM = DP$, $NC = QA$. Докажите, что $ABCD$ и $MNPQ$ — параллелограммы.

448. В прямоугольный треугольник, каждый катет которого равен 6, вписан прямоугольник, имеющий с треугольником общий угол. Найдите периметр прямоугольника.

449. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а две другие — на катетах. Найдите стороны прямоугольника, если известно, что они относятся, как $5 : 2$, а гипотенуза треугольника равна 45.

450. Определите вид четырехугольника, вершинами которого служат середины сторон данного: 1) произвольного четырехугольника; 2) параллелограмма; 3) прямоугольника; 4) ромба; 5) квадрата; 6) трапеции.

451. Точки M и N — середины противоположных сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырехугольник $AMCN$ — параллелограмм.

452°. Постройте параллелограмм по двум соседним сторонам и углу между ними.

453. Постройте параллелограмм по диагоналям и углу между ними.

454. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Периметр параллелограмма равен 12, а разность периметров треугольников BOC и COD равна 2. Найдите стороны параллелограмма.

455. Постройте прямоугольник по диагонали и одной из сторон.

456. Угол при вершине A ромба $ABCD$ равен 20° . Точки M и N — основания перпендикуляров, опущенных из вершины B на стороны AD и CD . Найдите углы треугольника BMN .

457. Стороны треугольника равны a и b . Через середину третьей стороны проведены прямые, параллельные двум другим сторонам. Найдите периметр полученного четырехугольника.

458. Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Докажите, что периметр получившегося параллелограмма не зависит от положения точки и равен сумме боковых сторон треугольника.

459. Докажите, что середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

460. Постройте треугольник по стороне и медианам, проведенным к двум другим сторонам.

461. У четырехугольника диагонали равны a и b . Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника.

462. Найдите периметр параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки 7 и 14.

463. Дан прямоугольник (рис. 19); перпендикуляр, опущенный из вершины на диагональ, делит прямой угол на две части в отношении 1 : 3. Найдите угол между этим перпендикуляром и другой диагональю.

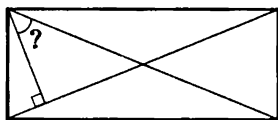


Рис. 19

464. Точки пересечения биссектрис внутренних углов параллелограмма являются вершинами некоторого четырехугольника. Докажите, что этот четырехугольник — прямоугольник.

465. Высота, проведенная из вершины тупого угла равнобедренной трапеции, делит большее основание на

отрезки, равные a и b ($a > b$). Найдите среднюю линию трапеции.

466. Высота параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, равна 2 и делит сторону параллелограмма пополам. Острый угол параллелограмма равен 30° . Найдите диагональ, проведенную из вершины тупого угла, и углы, которые она образует со сторонами.

467. Точки M и N расположены соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC , причем $BM = 3AM$ и $CN = 3AN$. Докажите, что $MN \parallel BC$, и найдите MN , если $BC = 12$.

468. Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из вершины C меньшего основания BC равнобедренной трапеции $ABCD$ на ее большее основание AD . Найдите DP и AP , если основания трапеции равны a и b ($a > b$).

469. Найдите углы и стороны четырехугольника с вершинами в серединах сторон равнобедренной трапеции, диагонали которой равны 10 и пересекаются под углом, равным 40° .

470. Около круга описана равнобедренная трапеция с углом в 30° . Средняя линия ее равна 1. Найдите радиус круга.

471. Стороны параллелограмма равны 8 и 3; биссектрисы двух углов параллелограмма, прилежащих к большей стороне, делят противоположную сторону на 3 части. Найдите каждую из них.

472. Параллелограмм с периметром 44 разделен диагоналями на 4 треугольника. Разность между периметрами двух смежных треугольников равна 6. Найдите длины сторон параллелограмма.

473. В круг вписан прямоугольник. Середины сторон последовательно соединены отрезками. Докажите, что периметр образовавшегося четырехугольника равен удвоенному диаметру данного круга.

474. Каждая из боковых сторон равнобедренного треугольника равна 7. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма.

475. Через вершину A остроугольного треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне BC , равной a , и пересекающая окружности, построенные на сторонах AB и AC как на диаметрах, в точках M и N , отличных от A . Найдите MN .

476. Точки K, L, M и N — середины сторон соответственно AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках пересечения прямых AL, BM, CN и DK — параллелограмм.

477. Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной a , проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося четырехугольника.

478. Диагонали прямоугольника равны 8 и пересекаются под углом в 60° . Найдите меньшую сторону прямоугольника.

479. Дан четырехугольник, сумма диагоналей которого равна 18. Найдите периметр четырехугольника с вершинами в серединах сторон данного.

480°. Найдите периметр четырехугольника с вершинами в серединах сторон прямоугольника с диагональю, равной 8.

481. Найдите стороны и углы четырехугольника с вершинами в серединах сторон ромба, диагонали которого равны 6 и 10.

482. Докажите, что медиана прямоугльного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна отрезку, соединяющему середины катетов.

483. Высота равнобедренной трапеции, проведенная из вершины мень-

шего основания, делит ее большее основание на отрезки, равные 4 и 8. Найдите основания трапеции.

484. Найдите меньшее основание равнобедренной трапеции, если высота, проведенная из вершины меньшего основания, делит большее основание на отрезки, один из которых на 5 больше другого.

485. В равнобедренной трапеции острый угол равен 60° . Докажите, что меньшее основание равно разности большего основания и боковой стороны.

486. Расстояния от концов диаметра окружности до некоторой касательной равны a и b . Найдите радиус окружности.

487. Окружность касается всех сторон равнобедренной трапеции. Докажите, что боковая сторона трапеции равна средней линии.

488. Пусть M и N — середины оснований трапеции. Докажите, что если прямая MN образует равные углы с боковыми сторонами трапеции, то эта трапеция равнобочная.

489. Пусть в трапецию вписана окружность (рис. 20). Докажите, что отрезки, соединяющие центр этой окружности с концами боковой стороны, взаимно перпендикулярны.

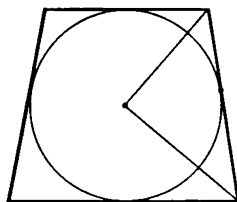


Рис. 20

490. Через вершины A, B и C треугольника ABC проведены прямые, параллельные противолежащим сторонам. Эти прямые пересекаются в точках C_1, A_1 и B_1 . Докажите, что стороны треугольника ABC являются средними линиями треугольника $A_1B_1C_1$.

491. В треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D ; прямая, проведенная из точки D параллельно CA , пересекает AB в точке E ; прямая, проведенная из E параллельно BC , пересекает AC в F . Докажите, что $EA = FC$.

492. В трапеции $ABCD$ (AD — большее основание) диагональ AC перпендикулярна стороне CD и делит угол BAD пополам; $\angle CDA = 60^\circ$; периметр трапеции равен 2. Найдите AD .

493. В равнобедренной трапеции высота равна 10, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите среднюю линию трапеции.

494. В четырехугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины сторон AB и CD , равен 1. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD .

495. Через точку на стороне четырехугольника проведена прямая, параллельная диагонали, до пересечения с соседней стороной четырехугольника. Через полученную точку проведена прямая, параллельная другой диагонали, и т. д. Докажите, что пятая точка, полученная таким способом, совпадает с исходной.

496. Диагонали вписанного четырехугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки пересечения диагоналей до центра описанной окружности равно расстоянию между серединами диагоналей.

497. Биссектриса угла параллелограмма делит сторону параллелограмма на отрезки, равные a и b . Найдите стороны параллелограмма.

498. Треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общую медиану AM . Докажите, что $BC_1 = B_1C$.

499. Докажите, что концы двух различных диаметров окружности являются вершинами прямоугольника.

500. Докажите, что около любого прямоугольника можно описать окружность. Где расположен ее центр?

501. Около данной окружности опишите ромб с данным углом.

502. Докажите, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон параллелограмма, проходит через его центр.

503. Две медианы треугольника равны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

504. Докажите, что углы при основании равнобедренной трапеции равны.

505. Углы при одном из оснований трапеции равны. Докажите, что трапеция равнобедренная.

506. Высота равнобедренной трапеции, опущенная из вершины меньшего основания, делит большее основание в отношении $1 : 3$. Найдите отношение оснований трапеции.

507. Докажите равенство треугольников по стороне и медианам, проведенным к двум другим сторонам.

508. Вершины параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ лежат на сторонах параллелограмма $ABCD$ (точка A_1 лежит на стороне AB , точка B_1 — на стороне BC и т. д.). Докажите, что центры обоих параллелограммов совпадают.

509. Середины E и F параллельных сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$ соединены прямыми с вершинами D и B . Докажите, что эти прямые делят диагональ AC на три равные части.

510. Постройте треугольник по серединам трех его сторон.

511. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите углы трапеции.

512. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямоугольника на его диагональ, делит ее в отношении $1 : 3$

(рис. 21). Найдите длину диагонали, если известно, что точка ее пересечения с другой диагональю удалена от большей стороны на расстояние, равное 2.

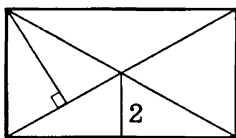


Рис. 21

513. Найдите отношение меньшего основания трапеции к большему, если известно, что углы при большем основании равны 90° и 60° и что в трапецию можно вписать окружность.

514. Один из углов трапеции равен 30° , а прямые, содержащие боковые стороны трапеции, пересекаются под прямым углом. Найдите меньшую боковую сторону трапеции, если ее средняя линия равна 10, а одно из оснований равно 8.

515. В квадрат вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата находится одна вершина прямоугольника и стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата. Найдите стороны этого прямоугольника, зная, что одна из них вдвое больше другой и что диагональ квадрата равна 12.

516. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB . Биссектрисы углов A и B пересекают прямую CD в точках M и N , причем $MN = 12$. Найдите стороны параллелограмма.

517. Две равные окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B . Отрезок O_1O_2 пересекает эти окружности в точках M и N . Докажите, что четырехугольники O_1AO_2B и $AMBN$ — ромбы.

518. Острый угол A ромба $ABCD$ равен 45° , проекция стороны AB на сто-

рону AD равна 12. Найдите расстояние от центра ромба до стороны CD .

519. Расстояние между серединами взаимно перпендикулярных хорд AC и BC некоторой окружности равно 10. Найдите диаметр окружности.

520. Расстояние от середины хорды BC до диаметра AB равно 1. Найдите хорду AC , если $\angle BAC = 30^\circ$.

521. Биссектрисы углов при одном основании трапеции пересекаются на втором ее основании. Докажите, что второе основание равно сумме боковых сторон.

522. Боковая сторона трапеции равна одному основанию и вдвое меньше другого. Докажите, что вторая боковая сторона перпендикулярна одной из диагоналей трапеции.

523. Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.

524. Докажите, что середины двух противоположных сторон любого четырехугольника и середины его диагоналей являются вершинами параллелограмма.

525. В трапеции $ABCD$ известно, что $AB = a$, $BC = b$ ($a \neq b$). Определите, что пересекает биссектриса угла A : основание BC или боковую сторону CD .

526. Биссектрисы углов, прилежащих к одной из боковых сторон трапеции, пересекаются под прямым углом. Докажите, что точка их пересечения принадлежит средней линии трапеции.

527. Пусть O , Q , M и H соответственно центры описанной, вписанной окружности, точка пересечения медиан и точка пересечения высот треугольника ABC . Докажите, что если две любые из этих точек совпадают, то этот треугольник — равносторонний.

528. Докажите, что в любой ромб можно вписать окружность. Где расположен ее центр?

529. Квадрат вписан в равнобедренный прямоугольный треугольник,

причем одна вершина квадрата расположена на гипотенузе, противоположная ей вершина совпадает с вершиной прямого угла треугольника, а остальные лежат на катетах. Найдите сторону квадрата, если катет треугольника равен a .

530. Две вершины квадрата расположены на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника, а две другие — на катетах. Найдите сторону квадрата, если гипотенуза равна a .

531. На каждой стороне квадрата взяли по одной точке. При этом оказалось, что эти точки являются вершинами прямоугольника, стороны которого параллельны диагоналям квадрата. Найдите периметр прямоугольника, если диагональ квадрата равна 6.

532. Найдите расстояние от центра ромба до его стороны, если острый угол ромба равен 30° , а сторона равна 4.

533°. На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ взяты точки K и M так, что $AKCM$ — ромб. Диагональ AC составляет со стороной AB угол 30° . Найдите сторону ромба, если наибольшая сторона прямоугольника $ABCD$ равна 3.

534. Через середину диагонали KM прямоугольника $KLMN$ перпендикулярно этой диагонали проведена прямая, пересекающая стороны KL и MN в точках A и B соответственно. Известно, что $AB = BM = 6$. Найдите большую сторону прямоугольника.

535. Прямая, проходящая через центр прямоугольника перпендикулярно диагонали, пересекает большую сторону прямоугольника под углом, равным 60° . Отрезок этой прямой, заключенный внутри прямоугольника, равен 10. Найдите большую сторону прямоугольника.

536. Через произвольную точку P внутри квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые, каждая из которых пересекает две противо-

ложные стороны квадрата (рис. 22). Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные внутри квадрата, равны.

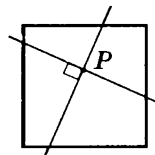


Рис. 22

537. Докажите, что отрезок, соединяющий середины сторон AB и AC треугольника ABC , и медиана, проведенная из вершины A , делят друг друга пополам.

538. Высоты остроугольного треугольника ABC , проведенные из вершин B и C , равны 7 и 9, а медиана AM равна 8. Точки P и Q симметричны точке M относительно сторон AC и AB соответственно. Найдите периметр четырехугольника $APMQ$.

539. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что средняя линия трапеции равна высоте.

540. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 5. Найдите отрезок, соединяющий середины оснований.

541. Диагональ равнобедренной трапеции равна 10 и образует угол, равный 60° , с основанием трапеции. Найдите среднюю линию трапеции.

542. Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 3, а большая образует угол, равный 30° , с одним из оснований. Найдите это основание, если на нем лежит точка пересечения биссектрис углов при другом основании.

543. В трапеции $ABCD$ меньшее основание BC равно 3, боковые стороны AB и CD равны по 3. Диагонали трапеции образуют между собой угол в 60° . Найдите основание AD .

544. Прямая, проходящая через точку O_1 , касается окружности с центром O_2 в точке M , а прямая, проходящая через точку O_2 , касается окружности с центром O_1 в точке N . Прямые O_1M и O_2N пересекаются в точке P , а прямые O_1N и O_2M — в точке Q . Докажите, что $PQ \perp O_1O_2$.

545. Медианы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Известно, что $AM \perp B_1C_1$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

546. Докажите, что биссектрисы углов прямоугольника (не являющегося квадратом) своим пересечением образуют квадрат.

547. Внутри произвольного угла взята точка M . Проведите через точку M прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между сторонами угла, делился точкой M пополам.

548. Докажите, что если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника:

а) равны, то диагонали четырехугольника перпендикулярны;

б) перпендикулярны, то диагонали четырехугольника равны.

549. Пусть P и Q — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, M и N — середины диагоналей AC и BD . Докажите, что если MN и PQ перпендикулярны, то $BC = AD$.

550. На сторонах AB , BC , CD , DA квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки N , K , L , M , делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что $KLMN$ также квадрат.

551. Середины сторон выпуклого пятиугольника последовательно соединены отрезками. Найдите периметр полученного пятиугольника, если сумма всех диагоналей данного равна a .

552. Докажите, что диагонали равнобедренной трапеции равны.

553. Диагонали трапеции равны. Докажите, что трапеция равнобедренная.

554. Докажите, что сумма противоположных углов равнобедренной трапеции равна 180° . Верно ли обратное: если сумма противоположных углов трапеции равна 180° , то она равнобедренная?

555. Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Могут ли прямые BN и DM быть параллельными?

556. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Одна из них равна 6, а вторая образует с основанием угол, равный 30° . Найдите среднюю линию трапеции.

557. Точка M — середина отрезка AB . Точки A_1 , M_1 и B_1 — проекции точек A , M и B на некоторую прямую. Докажите, что M_1 — середина отрезка A_1B_1 .

558. На прямую, проходящую через вершину A треугольника ABC , опущены перпендикуляры BD и CE (рис. 23). Докажите, что середина стороны BC равноудалена от точек D и E .

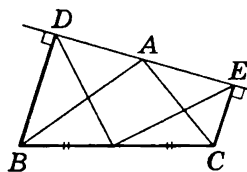


Рис. 23

559. В ромбе $ABCD$ угол A равен 60° . Точки M и N лежат на сторонах CD и AD соответственно. Докажите, что если один из углов треугольника BMN равен 60° , то и остальные тоже равны по 60° .

560. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре треугольника. Известно, что любые два противоположных треугольника подобны, но не все они равны. Верно ли,

что этот четырехугольник является равнобокой трапецией?

561. Основания трапеции равны a и b ($a > b$). Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.

562. Сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90° . Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

563. Найдите отношение оснований трапеции, если известно, что ее средняя линия делится диагоналями на три равные части.

564. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Докажите, что точки пересечения биссектрис каждого из треугольников ABO , BCO , CDO и DAO являются вершинами ромба.

565. На сторонах AB , BC , CD , DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M , N , K , L , делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм, причем его центр совпадает с центром параллелограмма $ABCD$.

566. Через центр параллелограмма $ABCD$ проведены две прямые. Одна из них пересекает стороны AB и CD соответственно в точках M и K , вторая — стороны BC и AD соответственно в точках N и L . Докажите, что четырехугольник $MNKL$ — параллелограмм.

567. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через вершину B и середину стороны BC . Найдите углы параллелограмма.

568. Окружность проходит через середины гипотенузы AB и катета BC прямоугольного треугольника ABC и касается катета AC . В каком отношении точка касания делит катет AC ?

569. Точки M и N — середины соседних сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые DM и BN пересекаются на диагонали AC .

570. Точки M и N — середины соседних сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

571. Один из углов прямоугольной трапеции равен 120° , большее основание равно 12. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей, если известно, что меньшая диагональ трапеции равна ее большему основанию.

572. Две окружности касаются внешним образом в точке K . Одна прямая касается этих окружностей в различных точках A и B , а вторая — соответственно в различных точках C и D . Общая касательная к окружностям, проходящая через точку K , пересекается с этими прямыми в точках M и N . Найдите MN , если $AC = a$, $BD = b$.

573. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей.

574. Стороны прямоугольника равны 1 и 3. Найдите диагонали четырехугольника, образованного биссектрисами внутренних углов.

575. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.

576. Большее основание трапеции равно 24. Найдите ее меньшее основание, зная, что расстояние между серединами ее диагоналей равно 4.

577. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD . Биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке P , а при вершинах C и D — в точке Q . Докажите, что длина отрезка PQ равна полупериметру трапеции.

578. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны BC , точка N — середина стороны CD , P — точка пересечения отрезков DM и BN . Докажите, что угол MAN равен углу BPM .

579. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AM и AP на биссектрисы внешних углов B и C . Докажите, что отрезок PM равен половине периметра треугольника ABC .

580. Через точку на стороне треугольника проведена прямая, параллельная другой стороне, до пересечения с третьей стороной треугольника. Через полученную точку проведена прямая, параллельная первой стороне треугольника, и т. д. Докажите, что:

а) если исходная точка совпадает с серединой стороны треугольника, то четвертая точка, полученная таким способом, совпадет с исходной;

б) если исходная точка отлична от середины стороны треугольника, то седьмая точка, полученная таким способом, совпадет с исходной.

581. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O . Докажите, что точки пересечения биссектрис каждого из треугольников ABO , BCO , CDO и DAO являются вершинами квадрата.

582. Вершины M и N равностороннего треугольника BMN лежат соответственно на сторонах AD и CD квадрата $ABCD$. Докажите, что $MN \parallel AC$.

583. Прямая имеет с параллелограммом $ABCD$ единственную общую точку B . Вершины A и C удалены от этой прямой на расстояния, равные a и b . На какое расстояние удалена от этой прямой вершина D ?

584. Докажите, что середины сторон равнобокой трапеции служат вершинами ромба.

585. Через точку, расположенную внутри треугольника, проведены прямые, параллельные его сторонам (рис. 24). Эти прямые разбивают тре-

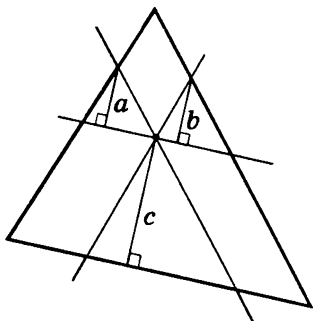


Рис. 24

угольник на три треугольника и три четырехугольника. Пусть a , b и c — параллельные высоты этих трех треугольников. Найдите параллельную им высоту исходного треугольника.

586. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки основания равнобедренного треугольника до боковых сторон постоянна.

587. Через каждую вершину параллелограмма проведена прямая, перпендикулярная диагонали, не проходящей через эту вершину. Докажите, что диагонали четырехугольника, образованного пересечениями четырех проведенных прямых, перпендикулярны сторонам параллелограмма.

588. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведены диаметры AC и AD этих окружностей. Найдите сумму отрезков BC и BD , если расстояние между центрами окружностей равно a , а центры окружностей лежат по разные стороны от общей хорды AB .

589. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведены диаметры AC и AD этих окружностей. Найдите модуль разности отрезков BC и BD , если расстояние между центрами окружностей равно a , а центры окружностей лежат по одну сторону от общей хорды AB .

590. Сторона треугольника равна a . Найдите отрезок, соединяющий середины медиан, проведенных к двум другим сторонам.

591. Найдите геометрическое место середин всех отрезков, один конец которых лежит на данной прямой, а второй совпадает с данной точкой, не лежащей на этой прямой.

592. Докажите, что если отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен ее средней линии, то диагонали трапеции перпендикулярны.

593. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон AD и

ВС. Найдите угол, образованный продолжением сторон AB и CD .

594. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60° . Найдите основания и меньшую боковую сторону трапеции.

595. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $BC \parallel AD$. Точки K и M — середины сторон CD и AD соответственно. Известно, что отрезки AK и CM пересекаются на диагонали BD . Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

596. Постройте общие касательные к двум данным окружностям.

597. Точки A и B высекают на окружности с центром O дугу величиной 60° . На этой дуге взята точка M . Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков MA и OB , перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков MB и OA .

598. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка O и построены точки A_1 , B_1 и C_1 , симметричные точке O относительно середин сторон BC , CA и AB . Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны и прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

599. От параллелограмма с помощью прямой, пересекающей две его противоположные стороны, отрезали ромб. От оставшегося параллелограмма таким же образом вновь отрезали ромб. И от этого вновь оставшегося параллелограмма опять отрезали ромб. В результате остался параллелограмм со сторонами 1 и 2. Найдите стороны исходного параллелограмма.

600. Докажите, что биссектрисы внешних углов параллелограмма при пересечении образуют прямоугольник, диагональ которого равна сумме двух соседних сторон параллелограмма.

601. Докажите, что если радиус вневписанной окружности равен полупериметру треугольника, то этот треугольник — прямоугольный.

602. В четырехугольнике $ABCD$ точка E — середина AB , F — середина CD . Докажите, что середины отрезков AF , CE , BF и DE являются вершинами параллелограмма.

603. Противоположные стороны шестиугольника попарно равны и параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

604. На сторонах AB , BC , CD , DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M , N , K , L , делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что при пересечении прямых AN , BK , CL и DM получится параллелограмм, причем его центр совпадает с центром параллелограмма $ABCD$.

605. BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC . На продолжении медианы CC_1 за точку C_1 отложен отрезок C_1C_2 , равный $\frac{1}{3}CC_1$. Оказалось, что $C_2B_1 = AB_1$. Докажите, что медианы CC_1 и BB_1 взаимно перпендикулярны.

606. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AM и AP на биссектрисы внешних углов B и C . Найдите отрезок PM , если периметр треугольника ABC равен 10.

607. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ втрое больше диагонали BD и пересекается с ней под углом в 60° . Найдите отрезок, соединяющий вершину D с серединой стороны BC , если $AC = 24$, а угол BDC — тупой.

608. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, меньше полусуммы ее боковых сторон.

609. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Биссектрисы углов при вершинах A и B пересекаются в точке M , а биссектрисы углов при вершинах C и D — в точке N . Найдите MN , если известно, что $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $AD = d$.

610. Одна из боковых сторон трапеции (рис. 25) равна сумме оснований. Докажите, что биссектрисы углов при этой стороне пересекаются на другой боковой стороне.

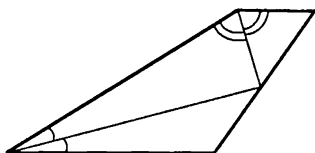


Рис. 25

611. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H , причем $CH = C_1H$ и $BH = 2B_1H$. Найдите угол BAC .

612. Докажите равенство треугольников по трем медианам.

613. Через середину S отрезка MN , концы которого лежат на боковых сторонах равнобедренного треугольника, проведена прямая, параллельная основанию треугольника и пересекающая боковые стороны в точках K и L . Докажите, что проекция отрезка MN на основание треугольника равна отрезку KL .

614. Средняя линия трапеции равна 4, углы при одном из оснований равны 40° и 50° . Найдите основания трапеции, если отрезок, соединяющий середины этих оснований, равен 1.

615. Пусть B и C — две точки на сторонах угла с вершиной A . Окружности с диаметрами AC и AB вторично пересекаются в точке D . Прямая AB вторично пересекает окружность с диаметром AC в точке K , а прямая AC вторично пе-

ресекает окружность с диаметром AB в точке M . Докажите, что прямые BM , CK и AD пересекаются в одной точке.

616. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что середина отрезка MN лежит на средней линии треугольника ABC , параллельной его основанию.

617. Докажите, что биссектрисы внутренних углов параллелограмма при пересечении образуют прямоугольник, диагональ которого равна разности двух соседних сторон параллелограмма.

618. AB — диаметр окружности, CD — хорда этой окружности. Перпендикуляры к хорде, проведенные через ее концы C и D , пересекают прямую AB в точках K и M соответственно. Докажите, что $AK = BM$.

619. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из вершины D параллелограмма $ABCD$ на диагональ AC . Докажите, что перпендикуляры к прямым AB и BC , проведенные через точки A и C соответственно, пересекутся на прямой DM .

620. Сторона AB треугольника ABC больше стороны AC , а $\angle A = 40^\circ$. Точка D лежит на стороне AB , причем $BD = AC$. Точки M и N — середины отрезков BC и AD соответственно. Найдите угол BNM .

621. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE . Из вершин B и C на прямую ED опущены перпендикуляры BF и CG . Докажите, что $EF = DG$.

622. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BSK и DCL . Докажите, что треугольник AKL — правильный.

623. Постройте треугольник по трем медианам.

624. В треугольнике ABC проведены медиана BM и высота $АН$. Известно, что $BM = AH$. Найдите угол MBC .

625. Четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность с центром O . Найдите расстояние от точки O до стороны AB , если известно, что $CD = a$.

626. Точка M — середина стороны CD параллелограмма $ABCD$, точка H — проекция вершины B на прямую AM . Докажите, что треугольник CBH — равнобедренный.

627. Одна из сторон вписанного четырехугольника является диаметром окружности. Докажите, что проекции сторон, прилежащих к этой стороне, на четвертую сторону (на прямую, задающую четвертую сторону) равны между собой.

628. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что их центры сами образуют квадрат.

629. Постройте пятиугольник по серединам его сторон.

630. Докажите, что расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот вдвое больше, чем расстояние от центра описанного круга до противоположной стороны.

631. Два равносторонних треугольника ABC и CDE расположены по одну сторону от прямой AE и имеют единственную общую точку C (рис. 26). Пусть M, N и K — середины отрезков BD, AC и CE соответственно. Докажите, что треугольник MNK — равносторонний.

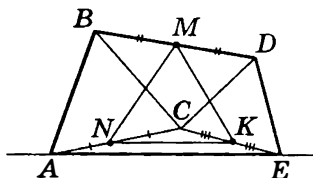


Рис. 26

632. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны CD , P — проекция вершины C на прямую AB , M — середина стороны AD . Докажите, что $\angle DMP = 3 \cdot \angle APM$.

633. Внутри треугольника ABC взята точка P так, что $\angle PAC = \angle PBC$. Из точки P на стороны BC и CA опущены перпендикуляры PM и PK соответственно. Пусть D — середина стороны AB . Докажите, что $DK = DM$.

5. УГЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С ОКРУЖНОСТЬЮ. ВПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ОКРУЖНОСТЬ

634. Докажите, что вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла (или дуги) окружности.

635. Докажите, что у четырехугольника, вписанного в окружность, суммы противоположных углов равны 180° .

636. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

637. Докажите, что угол, заключенный между касательной и хордой, проведенной через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними.

638. Какова угловая величина дуги, если радиус, проведенный в ее конец, составляет с ее хордой угол в 40° ?

639. Угловая величина дуги содержит 110° . Найдите величины вписанных углов, опирающихся на эту хорду.

640. Хорда делит окружность в отношении $7 : 11$. Найдите величины вписанных углов, опирающихся на эту хорду.

641. Хорда AB делит окружность на две дуги, из которых меньшая равна 130° , а большая делится хордой AC в отношении $31 : 15$, считая от A . Найдите угол BAC .

642. Через конец хорды, делящей окружность в отношении $3 : 5$, проведена касательная. Найдите острый угол между хордой и касательной.

643. Окружность разделена в отношении $5 : 9 : 10$, и через точки деления проведены касательные. Найдите наибольший угол в полученном треугольнике.

644. Меньшая сторона прямоугольника равна 1, острый угол между диагоналями равен 60° . Найдите радиус описанного круга.

645. В прямоугольнике диагональ образует со стороной угол в 20° . На какие четыре части делится вершинами этого прямоугольника описанная около него окружность?

646. C — точка на продолжении диаметра AB , CD — касательная, угол ADC равен 110° . Найдите угловую величину дуги BD .

647. AB — диаметр окружности, BC — касательная. Секущая AC делится окружностью в точке D пополам. Найдите угол DAB .

648. Из концов дуги в 200° проведены касательные до взаимного пересечения. Найдите угол между ними.

649. Угол между двумя касательными, проведенными из одной точки к окружности, равен 70° . Найдите угловые величины дуг, заключенных между точками касания.

650. Хорда делит окружность в отношении $11 : 16$. Найдите угол между касательными, проведенными из концов этой хорды.

651. Внутри данной окружности находится другая окружность. ABC и ADE — хорды большей окружности, касающиеся меньшей окружности в

точках B и D ; BMD — меньшая из двух дуг между точками касания; CNE — дуга между концами хорд. Найдите угловую величину дуги CNE , если дуга BMD содержит 130° .

652. В ромб вписана окружность. На какие четыре части она делится точками касания сторон, если острый угол ромба равен 37° ?

653. Можно ли описать окружность около четырехугольника, углы которого по порядку относятся, как: а) $2 : 4 : 5 : 3$; б) $5 : 7 : 8 : 9$?

654. Три последовательных угла вписанного четырехугольника относятся, как $1 : 2 : 3$. Найдите все углы четырехугольника.

655. Найдите углы четырехугольника $ABCD$, вершины которого расположены на окружности, если $\angle ABD = 74^\circ$, $\angle DBC = 38^\circ$, $\angle BDC = 65^\circ$.

656. Окружность касается одной из сторон угла в его вершине A и пересекает другую сторону в точке B . Угол равен 40° ; M — точка на меньшей дуге AB . Найдите угол AMB .

657. Окружность разделена в отношении $7 : 11 : 6$, и точки деления соединены между собой. Найдите углы полученного треугольника.

658. M — середина высоты BD в равнобедренном треугольнике ABC . Точка M служит центром окружности радиуса MD . Найдите угловую величину дуги окружности, заключенной между сторонами BA и BC , если $\angle BAC = 65^\circ$.

659. AB и AC — две хорды, образующие угол BAC , равный 70° . Через точки B и C проведены касательные до пересечения в точке M . Найдите $\angle BMC$.

660. Окружность с центром в точке O делит отрезок AO пополам. Найдите угол между касательными, проведенными из точки A .

661. Угловая величина дуги AB равна $\alpha < 90^\circ$. На продолжении ради-

уса OA отложен отрезок AC , равный хорде AB , и точка C соединена с B (рис. 27). Найдите угол ACB .

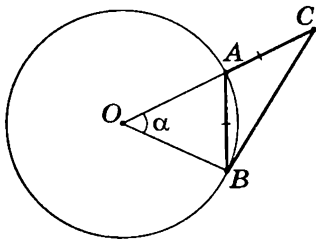


Рис. 27

662. В треугольнике ABC угол C — прямой. Из центра C радиусом AC описана дуга ADE , пересекающая гипотенузу в точке D , а катет CB — в точке E . Найдите угловые величины дуг AD и DE , если $\angle B = 40^\circ$.

663. ABC — секущая, A — внешняя точка окружности, угловая величина дуги BD равна 42° , а угловая величина дуги BDC равна 220° . Найдите угол ABD .

664. Найдите градусную меру дуги, если перпендикуляр, проведенный к хорде из ее конца, делит дополнительную (до окружности) дугу в отношении $5 : 2$.

665. Найдите углы при большем основании трапеции, вписанной в окружность, если ее основания видны из центра окружности под углами 80° и 100° .

666. В круговой сегмент AMB вписана трапеция $ACBD$, у которой $AC = CD$ и $\angle CAB = 51^\circ 20'$. Найдите угловую величину дуги AMB .

667. AB и AC — равные хорды, MAN — касательная, угловая величина дуги BC , не содержащей точки A , равна 200° . Найдите углы MAB и NAC .

668. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 25° . Под каким углом виден каждый его катет из центра описанной окружности?

669. Два угла треугольника равны 50° и 100° . Под каким углом видна каждая сторона треугольника из центра вписанной окружности?

670. AB и BC — хорды окружности; $\cup AB = 110^\circ$, $\cup AC = 40^\circ$. Найдите угол BAC .

671. Основание равностороннего треугольника служит диаметром окружности. На какие части делятся стороны треугольника полуокружностью, а полуокружность — сторонами треугольника?

672. Секущая ABC отсекает дугу BC , содержащую 112° ; касательная AD точкой касания D делит эту дугу в отношении $7 : 9$. Найдите $\angle BAD$.

673. Пусть O — центр круга, описанного около треугольника ABC . Найдите угол OAC , если: а) $\angle B = 50^\circ$; б) $\angle B = 126^\circ$.

674. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна диагонали BD и делит ее пополам. Найдите углы четырехугольника, если $\angle BAD = \alpha$.

675. Внутри данной окружности находится другая окружность. CAE и DBF — две хорды большей окружности (непересекающиеся), касающиеся меньшей окружности в точках A и B ; CND , EPF — дуги между концами хорд. Найдите угловую величину дуги CND , если дуги AMB и EPF содержат соответственно 154° и 70° .

676. Треугольник ABC — равнобедренный. Радиус OA описанного круга образует с основанием AC угол OAC , равный 20° . Найдите угол BAC .

677. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D , и через точку B — прямая, пересекающая окружности в точках E и F (точки C и E — на одной окружности, D и F — на другой). Докажите, что $\angle CBD = \angle EAF$.

678. Если в треугольнике медиана равна половине стороны, к которой

она проведена, то угол против этой стороны — прямой. Докажите это с помощью вспомогательной окружности.

679. Точки A и B соединены двумя дугами окружностей, обращенными выпуклостями в разные стороны: $\cup ACB = 117^\circ 23'$ и $\cup ADB = 42^\circ 37'$. Середины C и D этих дуг соединены с A . Найдите угол CAD .

680. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 40° . Одна из боковых сторон служит диаметром полуокружности, которая делится другими сторонами на три части. Найдите эти части.

681. Окружность разделена точками A, B, C, D так, что $\cup AB : \cup BC : \cup CD : \cup DA = 2 : 3 : 5 : 6$. Проведены хорды AC и BD , пересекающиеся в точке M . Найдите угол AMD .

682. Диаметр AB и хорда CD пересекаются в точке M , $\angle CMB = 73^\circ$, угловая величина дуги BC равна 110° . Найдите величину дуги BD .

683. Из произвольной точки M внутри острого угла с вершиной A опущены перпендикуляры MP и MQ на его стороны. Из вершины A проведен перпендикуляр AK на PQ . Докажите, что $\angle PAK = \angle MAQ$.

684. Два угла треугольника равны 40° и 80° . Найдите углы треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами данного треугольника.

685. Из точки P , расположенной внутри острого угла BAC , опущены перпендикуляры PC_1 и PB_1 на прямые AB и AC . Докажите, что угол C_1AP равен углу C_1B_1P .

686. Из произвольной точки M катета BC прямоугольного треугольника ABC опущен на гипотенузу AB перпендикуляр MN . Докажите, что угол MAN равен углу MCN .

687. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку B проводится прямая, пересекающая окруж-

ности в точках C и D , а затем через точки C и D проводятся касательные к этим окружностям (рис. 28). Докажите, что точки A, C, D и точка P пересечения касательных лежат на одной окружности.

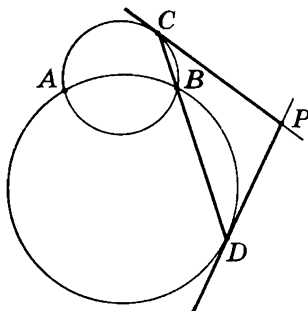


Рис. 28

688. Окружность разделена точками A, B, C, D так, что $\cup AB : \cup BC : \cup CD : \cup DA = 3 : 2 : 13 : 7$. Хорды AD и BC продолжены до пересечения в точке M . Найдите угол AMB .

689. На данной прямой MN постройте точку, из которой данный отрезок AB был бы виден под данным углом.

690. В равнобедренной трапеции угол при основании равен 50° , а угол между диагоналями, обращенный к боковой стороне, равен 40° . Где лежит центр описанной окружности: внутри или вне трапеции?

691. Через точку K , лежащую на окружности с центром O , проведены хорда KA (дуга KA больше 90°) и касательная MKP . Прямая, проведенная через центр O перпендикулярно радиусу OA , пересекает хорду AK в точке B и касательную MP в точке C . Докажите, что отрезок KC равен отрезку BC .

692. Окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M , стороны AC — в точке N , а сторону AB пересекает в точках K и L , причем $KLMN$ — квадрат. Найдите углы треугольника ABC .

693. В круге провели три хорды AB, BC и CD и отметили их середины — $M,$

N, K. Докажите, что $\angle BMN = \angle NKC$ или $\angle BMN + \angle NKC = 180^\circ$.

694. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и высоте, проведенной из вершины этого угла.

695. Две окружности пересекаются в точках *A* и *B*. Продолжения хорд *AC* и *BD* первой окружности пересекают вторую окружность в точках *E* и *F*. Докажите, что прямые *CD* и *EF* параллельны.

696. Угловые величины противоположных дуг, отсекаемых на окружности пересекающимися хордами, равны α и β . Найдите угол между хордами.

697. Угловые величины дуг, заключенных между двумя хордами, продолжения которых пересекаются вне круга, равны α и β ($\alpha > \beta$). Под каким углом пересекаются продолжения хорд?

698. Во вписанном четырехугольнике *ABCD* известны углы: $\angle DAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BKC = \gamma$, где *K* — точка пересечения диагоналей. Найдите угол *ACD*.

699. Из концов дуги *AB*, содержащей m° , проведены хорды *AC* и *BD* так, что угол *DMC*, образованный их пересечением, равен углу *DNC*, вписанному в дугу *CD*. Найдите градусную меру этой дуги.

700. В четырехугольнике *ABCD* углы *B* и *D* — прямые. Диагональ *AC* образует со стороной *AB* острый угол в 40° , а со стороной *AD* — угол в 30° . Найдите острый угол между диагоналями *AC* и *BD*.

701. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* дано: $\angle ABC = 116^\circ$, $\angle ADC = 64^\circ$, $\angle CAB = 35^\circ$ и $\angle CAD = 52^\circ$. Найдите угол между диагоналями, опирающийся на сторону *AB*.

702. Стороны пятиугольника в порядке обхода равны 5, 6, 7, 8 и 9. Стороны этого пятиугольника касаются одной окружности. На какие отрезки точка касания со стороной, равной 5, делит эту сторону?

703. Две окружности пересекаются в точках *A* и *B*. Прямая, проходящая через точку *A*, пересекает окружности в точках *M* и *N*, отличных от *A*, а параллельная ей прямая, проходящая через *B*, — соответственно в точках *P* и *Q*, отличных от *B*. Докажите, что $MN = PQ$.

704. В треугольнике *ABC* проведены медианы *AA₁* и *BB₁*. Докажите, что если $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$, то $AC = BC$.

705. Диагонали четырехугольника *ABCD*, вписанного в окружность, пересекаются в точке *E*. На прямой *AC* взята точка *M*, причем $\angle BME = 70^\circ$, $\angle ADB = 50^\circ$, $\angle CDB = 60^\circ$. Где расположена точка *M*: на диагонали *AC* или на ее продолжении? Ответ обосновать.

706. Докажите, что прямая, соединяющая середины дуг *AB* и *AC*, где *A*, *B* и *C* — три точки одной окружности, отсекает на хордах *AB* и *AC* равные отрезки, считая от точки *A*.

707. Докажите, что биссектрисы углов выпуклого четырехугольника образуют вписанный четырехугольник.

708. *O* — центр окружности, описанной около треугольника *ABC*, $\angle AOC = 60^\circ$. Найдите угол *AMC*, где *M* — центр окружности, вписанной в треугольник *ABC*.

709. На гипотенузе *AB* прямоугольного треугольника *ABC* во внешнюю сторону встроены квадрат с центром в точке *O*. Докажите, что *CO* есть биссектриса прямого угла.

710. На окружности даны точки *A*, *B*, *C*, *D* в указанном порядке; *M* — середина дуги *AB*. Обозначим точки пересечения хорд *MC* и *MD* с хордой *AB* через *E* и *K*. Докажите, что *KECD* — вписанный четырехугольник.

711. Окружности *S₁* и *S₂* пересекаются в точке *A*. Через точку *A* проведена прямая, пересекающая *S₁* в точке *B*, *S₂* в точке *C*. В точках *C* и *B* проведены касательные к окружностям, пересекающиеся в точке *D*. Докажите,

что угол BDC не зависит от выбора прямой, проходящей через точку A .

712. Четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Перпендикуляры, опущенные на сторону AD из вершин B и C , пересекают диагонали AC и BD в точках E и F соответственно (рис. 29). Найдите EF , если $BC = 1$.

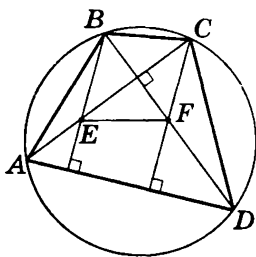


Рис. 29

713. К двум окружностям, пересекающимся в точках K и M , проведена общая касательная. Докажите, что если A и B — точки касания, то сумма углов AMB и AKB равна 180° .

714. В треугольнике ABC точка O — центр вписанной окружности, A_1 — точка пересечения прямой AO с описанной окружностью. Докажите, что $BA_1 = OA_1 = CA_1$.

715. Четыре точки окружности следуют в порядке A, B, C, D . Продолжения хорды AB за точку B и хорды CD за точку C пересекаются в точке E , причем угол AED равен 60° . Угол ABD в три раза больше угла BAC . Докажите, что AD — диаметр окружности.

716. Пусть AB — диаметр окружности, C — некоторая точка плоскости. Прямые AC и BC пересекают окружность в точках M и N соответственно. Прямые MB и NA пересекаются в точке K . Найдите угол между прямыми CK и AB .

717. В треугольнике ABC угол B — прямой, угол A равен α ($\alpha < \frac{\pi}{4}$), точка D — середина гипотенузы. Точка C_1

симметрична точке C относительно прямой BD . Найдите угол AC_1B .

718. В треугольнике ABC угол B — прямой, угол C равен α ($\alpha > \frac{\pi}{4}$), точка D — середина гипотенузы. Точка A_1 симметрична точке A относительно прямой BD . Найдите угол BA_1C .

719. Продолжение биссектрисы AD треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке M . Пусть Q — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Докажите, что треугольники MBQ и MCQ — равнобедренные.

720. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D . Докажите, что $AD = BD$.

721. Через вершину C равностороннего треугольника ABC проведена произвольная прямая, K и M — проекции точек A и B на эту прямую, P — середина AB . Докажите, что треугольник KMP — равносторонний.

722. Внутри угла с вершиной O взята некоторая точка M . Луч OM образует со сторонами угла углы, один из которых больше другого на 10° ; A и B — проекции точки M на стороны угла. Найдите угол между прямыми AB и OM .

723. Две прямые пересекаются в точке A ; B и C — проекции точки M на эти прямые. Найдите угол между прямой BC и прямой, проходящей через середины отрезков AM и BC .

724. В квадрате $ABCD$ из точки D как из центра проведена внутри квадрата дуга через вершины A и C . На AD как на диаметре построена внутри квадрата полуокружность. Отрезок прямой, соединяющей произвольную точку P дуги AC с точкой D , пересекает полуокружность AD в точке K . Докажите, что длина отрезка PK равна расстоянию от точки P до стороны AB .

725. Около треугольника ABC описана окружность с центром O ; M — се-

редина дуги, не содержащей точки A . Докажите, что угол OMA равен полуразности углов C и B треугольника ABC .

726. Равносторонние треугольники ABC и PQR расположены так, что вершина C лежит на стороне PQ , а вершина R — на стороне AB . Докажите, что $AP \parallel BQ$.

727. Трапеция с высотой h вписана в окружность. Боковая сторона трапеции видна из центра окружности под углом 120° . Найдите среднюю линию трапеции.

728. AM — биссектриса треугольника ABC . Точка D принадлежит стороне AC , причем $\angle DMC = \angle BAC$. Докажите, что $BM = MD$.

729. Окружность S_2 проходит через центр O окружности S_1 и пересекает ее в точках A и B . Через точку A проведена касательная к окружности S_2 . Точка D — вторая точка пересечения этой касательной с окружностью S_1 . Докажите, что $AD = AB$.

730. В треугольнике ABC биссектрисы BP и CT пересекаются в точке O . Известно, что точки A , P , O и T лежат на одной окружности. Найдите величину угла A .

731. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Противоположные стороны AB и CD при продолжении пересекаются в точке K , стороны BC и AD — в точке L . Докажите, что биссектрисы углов BKC и BLA перпендикулярны.

732. AB — диаметр окружности; C , D , E — точки на одной полуокружности $ACDEB$. На диаметре AB взяты: точка F так, что $\angle CFA = \angle DFB$, и точка G так, что $\angle DGA = \angle EGB$. Найдите $\angle FDG$, если дуга AC равна 60° , а дуга BE равна 20° .

733. Даны окружность и точка A вне ее; AB и AC — касательные к окружности (B и C — точки касания). Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC , лежит на данной окружности.

734. На продолжении (за точку A) стороны AC правильного треугольника ABC взята точка M , и около треугольников ABM и MBC описаны окружности. Точка A делит дугу MAB в отношении $MA : AB = n$. В каком отношении точка C делит дугу MCB ?

735. На стороне AC правильного треугольника ABC взята точка M , и около треугольников ABM и MBC описаны окружности. Точка C делит дугу MCB в отношении $\sphericalangle MC : \sphericalangle CB = n$. В каком отношении точка A делит дугу MAB ?

736. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке A ; AB — диаметр большей окружности. Хорда BK большей окружности касается меньшей окружности в точке C (рис. 30). Докажите, что AC — биссектриса треугольника ABK .

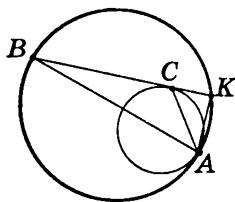


Рис. 30

737. Докажите, что если стороны пятиугольника в порядке обхода равны 4, 6, 8, 7 и 9, то его стороны не могут касаться одной окружности.

738. Вершина угла в 70° служит началом луча, образующего с его сторонами углы 30° и 40° . Из некоторой точки M на этот луч опущены перпендикуляры, основания которых A , B и C . Найдите углы треугольника ABC .

739. Через точку O на стороне правильного треугольника ABC проведены прямые, параллельные сторонам AB и AC и пересекающие стороны AC и AB в точках K и L соответственно. Окружность, проходящая через точки O , K и L , пересекает стороны AC и AB соответственно в точках Q и P , отличных

от K и L . Докажите, что треугольник OPQ — равносторонний.

740. Через одну из точек пересечения двух равных окружностей проведена общая секущая. Докажите, что отрезок этой секущей, заключенный между окружностями, делится пополам окружностью, построенной на общей хорде этих окружностей как на диаметре.

741. Четырехугольник вписан в окружность. Докажите, что сумма углов, вписанных в сегменты, прилежащие к сторонам четырехугольника и расположенные вне его, равна 540° .

742. Шестиугольник $ABCDEF$ — вписанный, причем $AB \parallel DE$ и $BC \parallel EF$. Докажите, что $CD \parallel EF$.

743. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E ; AD — биссектриса треугольника ABC . Докажите, что $AE = ED$.

744. В треугольнике ABC проведена высота AH ; O — центр описанной окружности. Докажите, что $\angle OAH = |\angle B - \angle C|$.

745. Из точки A проведены касательные AB и AC к окружности с центром O . Докажите, что если из точки M отрезок AO виден под углом 90° , то отрезки OB и OC видны из нее под равными углами.

746. Точки C и D лежат на окружности с диаметром AB . Прямые AC и BD , AD и BC пересекаются в точках P и Q . Докажите, что AB перпендикулярна PQ .

747. На отрезке AB взята точка M . На отрезках AM и MB как на сторонах построены по одну сторону от AB квадраты. Около квадратов описаны окружности, пересекающиеся в точке C (отличной от M). Докажите, что: а) угол ACB — прямой; б) точка F лежит на отрезке AC .

748. Точки A, B, C и D лежат на окружности. Точки M, N, K и L — середины дуг AB, BC, CD и DA . Докажи-

те, что хорды MK и NL перпендикулярны.

749. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , равен 1. Известно, что на этой окружности лежит центр другой окружности, проходящей через вершины A, C и точку пересечения высот треугольника ABC . Найдите AC .

750. В треугольнике ABC угол B равен 60° , биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O . Докажите, что $OD = OE$.

751. Три равные окружности имеют общую точку H , а точки их пересечения, отличные от H , образуют остроугольный треугольник ABC . Докажите, что H — точка пересечения высот треугольника ABC .

752. Три окружности имеют общую точку M и попарно пересекаются в точках P, Q, R . Через произвольную точку A одной из окружностей, лежащую на дуге PQ , не содержащей точки M , и точки P и Q , в которых окружность пересекает две другие окружности, проведены прямые, пересекающие эти же две окружности в точках B и C . Докажите, что точки B, C и R лежат на одной прямой.

753. Докажите, что в любом треугольнике ABC середина стороны BC лежит на отрезке, соединяющем точку пересечения высот с точкой окружности, описанной около этого треугольника, диаметрально противоположной вершине A , и делит этот отрезок пополам.

754. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку K первой окружности проводятся прямые KA и KB , пересекающие вторую окружность в точках P и Q . Докажите, что хорда PQ второй окружности перпендикулярна диаметру KM первой окружности.

755. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B , причем центр O окружности S_1 лежит на окружности

S_2 . Хорда AC окружности S_1 пересекает окружность S_2 в точке D . Докажите, что отрезки OD и BC перпендикулярны.

756. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вершины которого расположены на окружности, пересекаются в точке M . Известно, что $\angle ABC = 72^\circ$, $\angle BCD = 102^\circ$, $\angle AMD = 110^\circ$. Найдите $\angle ACD$.

757. Найдите расстояние между точками касания окружностей, вписанных в треугольники ABC и CDA , со стороной AC , если:

а) $AB = 5$, $BC = 7$, $CD = DA$;

б) $AB = 7$, $BC = CD$, $DA = 9$.

758. Точки A, B, C, D, E и F расположены на окружности. Хорды EC и AD пересекаются в точке M , а хорды BE и DF — в точке N . Докажите, что если хорды AB и CF параллельны, то они параллельны также прямой MN .

759. Через концы основания AD трапеции $ABCD$ проведена окружность, пересекающая прямые AB и CD в точках K и M . Докажите, что точки B, C, K и M лежат на одной окружности.

760. В окружность вписан равнобедренный треугольник. Докажите, что хорда, соединяющая середины дуг, отсекаемых сторонами треугольника, делится этими сторонами на три равные части.

761. Вершины B, C, D четырехугольника $ABCD$ расположены на окружности с центром O , которая пересекает сторону AB в точке F , а сторону AD — в точке E . Известно, что угол BAD — прямой, хорда EF равна хорде FB и хорды BC, CD, ED равны между собой. Найдите угол ABO .

762. Докажите, что точки, симметричные точке пересечения высот (ортоцентру) треугольника ABC относительно его сторон, лежат на описанной окружности этого треугольника.

763. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E , $AB = AD$, CA — биссектриса

угла C , $\angle BAD = 140^\circ$, $\angle BEA = 110^\circ$. Найдите угол CDB .

764. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и P (рис. 31). Через точку A проведена касательная AB к окружности S_1 , а через точку P — прямая CD , параллельная прямой AB (точки B и C лежат на S_2 , точка D — на S_1). Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

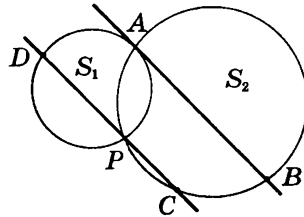


Рис. 31

765. (Теорема Коперника.) По неподвижной окружности, касаясь ее изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиуса. Какую траекторию описывает фиксированная точка K подвижной окружности?

766. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной окружности. Из вершины A проведена высота AH . Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

767. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E . Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к AB , пересекает сторону CD в точке M . Докажите, что EM — медиана треугольника CED , и найдите ее длину, если $AD = 8$, $AB = 4$ и $\angle CBD = \alpha$.

768. Докажите, что окружности, описанные около трех треугольников, отсекаемых от остроугольного треугольника средними линиями, имеют общую точку.

769. На сторонах AC и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты ACA_1A_2 и BCB_1B_2 . Дока-

жите, что прямые A_1B , A_2B_2 и AB_1 пересекаются в одной точке.

770. На сторонах произвольного треугольника ABC во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABC_1 , A_1BC и AB_1C . Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

771. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ через вершины A , B и точку P пересечения диагоналей проведена окружность, пересекающая сторону BC в точке E . Докажите, что если $AB = AD$, то $CD = CE$.

772. На хорде AB окружности S с центром в точке O взята точка C ; D — вторая точка пересечения окружности S с окружностью, описанной около треугольника ACO . Докажите, что $CD = CB$.

773. На плоскости расположены два квадрата $ABCD$ и $BKLN$ так, что точка K лежит на продолжении AB за точку B , а N лежит на луче BC . Найдите угол между прямыми DL и AN .

774. Три прямые проходят через одну точку и образуют попарно углы в 60° . Из произвольной точки M опущены перпендикуляры на эти прямые. Докажите, что основания перпендикуляров являются вершинами правильного треугольника.

775. Две окружности касаются внутренним образом в точке A . Из O — центра большей окружности — проведен радиус OB , касающийся меньшей окружности в точке C . Найдите $\angle BAC$.

776. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B , причем центр O окружности S_2 лежит на окружности S_1 . Хорда OC окружности S_1 пересекает окружность S_2 в точке D . Докажите, что точка D является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC .

777. Два равных равнобедренных треугольника ABC и DBE ($AB = BC = DB = BE$) имеют общую вершину B и лежат в одной плоскости так, что точ-

ки A и C находятся по разные стороны от прямой BD , а отрезки AC и DE пересекаются в точке K . Известно, что $\angle ABC = \angle DBE = \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\angle AKD = \beta < \alpha$. В каком отношении прямая BK делит угол ABC ?

778. Два равных ромба $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AD \parallel CB$) и $APQR$ ($AP \parallel QR$, $AR \parallel PQ$) имеют общую вершину A и лежат в одной плоскости. Известно, что $\angle BAD = \angle PAR = \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\angle QAC = \beta$.

Продолжения сторон BC и QR пересекаются в точке K . Ромбы расположены в разных полуплоскостях относительно прямой AD . Найдите величину угла KAD .

779. Отрезок, соединяющий вершину A треугольника ABC с центром Q вневписанной окружности, касающейся стороны BC , пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D . Докажите, что треугольник BDQ — равнобедренный.

780. Докажите, что четыре точки пересечения окружностей, построенных на сторонах вписанного четырехугольника как на хордах и отличные от вершин этого четырехугольника, лежат на одной окружности.

781. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O . Точки D и E диаметрально противоположны вершинам A и B соответственно. Прямая EO пересекает сторону AC в точке G , а сторону BC — в точке H (рис. 32). Докажите, что $OG \parallel BC$ и $EG = GH = GC$.

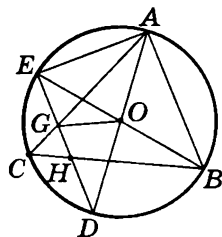


Рис. 32

782. Четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 расположены так, что S_1 касается внешним образом окружностей S_2 и S_4 , S_2 — окружностей S_1 и S_3 , S_3 — окружностей S_2 и S_4 , а S_4 — окружностей S_3 и S_1 . Докажите, что точки касания этих окружностей являются вершинами вписанного четырехугольника.

783. Вне правильного треугольника ABC , но внутри угла BAC взята точка M так, что угол CMA равен 30° и угол BMA равен α . Чему равен угол ABM ?

784. На сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах построены четыре круга. Докажите, что они покрывают весь четырехугольник.

785. Диагонали выпуклого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что четыре проекции точки пересечения диагоналей на стороны четырехугольника лежат на одной окружности.

786. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и AA_1 ; O — центр описанной около треугольника ABC окружности. Докажите, что прямые A_1B_1 и CO перпендикулярны.

787. Две окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точке A . Прямая O_1A пересекает окружность S_2 в точке K_2 , а прямая O_2A пересекает окружность S_1 в точке K_1 . Докажите, что $\angle O_1O_2A = \angle K_1K_2A$.

788°. Из точки A , расположенной вне окружности, проведены две касательные AM и AN (M и N — точки касания) и секущая, пересекающая окружность в точках P и Q . Пусть L — середина PQ . Докажите, что $\angle MLA = \angle NLA$.

789. Докажите, что высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами углов его ортотреугольника (т. е. треугольника с вершинами в основаниях высот данного).

790. В параллелограмме $ABCD$ угол ACD равен 30° . Известно, что центры окружностей, описанных около треугольников ABD и BCD , расположены на диагонали AC . Найдите угол ABD .

791°. В окружности с центром O проведен диаметр; A и B — точки окружности, расположенные по одну сторону от этого диаметра. На диаметре взята такая точка M , что AM и BM образуют равные углы с диаметром. Докажите, что $\angle AOB = \angle AMB$.

792. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Докажите, что четыре точки, в которых перпендикуляры, опущенные из O на стороны AB и CD , пересекают диагонали AC и BD , лежат на одной окружности.

793. Продолжение биссектрисы угла B треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке M ; O — центр вписанной окружности, O_1 — центр невписанной окружности, касающейся стороны AC . Докажите, что точки A, C, O и O_1 лежат на окружности с центром в точке M .

794. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена произвольная прямая, пересекающая эти окружности соответственно в точках C_1 и C_2 , отличных от A . Докажите, что отрезок C_1C_2 виден из точки B под одним и тем же углом для любой прямой C_1C_2 .

795. $ABCD$ — вписанный четырехугольник, продолжения сторон которого пересекаются в точках E и K . Докажите, что точки пересечения биссектрис углов AED и AKB со сторонами четырехугольника $ABCD$ являются вершинами ромба.

796. В треугольнике ABC стороны AC и BC не равны. Докажите, что биссектриса угла C делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными из вершины C , тогда и только тогда, когда $\angle C = 90^\circ$.

797. Постройте треугольник по точкам пересечения с описанной окружностью его высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из одной вершины.

798. (Задача Архимеда.) В дугу AB окружности вписана ломаная AMB из двух отрезков ($AM > MB$). Докажите, что основание перпендикуляра KH , опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM , делит ломаную пополам, т. е. $AK = HM + MB$.

799. В трапеции $ABCD$ (с основаниями BC и AD) на сторонах AB и CD выбраны точки K и M . Докажите, что если $\angle BAM = \angle CDK$, то $\angle BMA = \angle CKD$.

800. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle CBD = 58^\circ$, $\angle ABD = 44^\circ$, $\angle ADC = 78^\circ$. Найдите угол CAD .

801. Внутри треугольника ABC взята точка M так, что $\angle AMC = 60^\circ + \angle ABC$, $\angle CMB = 60^\circ + \angle CAB$, $\angle BMA = 60^\circ + \angle BCA$. Докажите, что проекции точки M на стороны треугольника служат вершинами правильного треугольника.

802. Даны две окружности одинакового радиуса. Они пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена их общая секущая, пересекающая окружности еще в точках C и D . Через точку B проведена прямая, перпендикулярная этой секущей. Она пересекает окружности еще в точках E и F . Докажите, что точки C , E , D и F являются вершинами ромба.

803. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ противоположные углы A и C — прямые. На диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF . Докажите, что $CE = FA$.

804. Точка E лежит на продолжении стороны AC правильного треугольника ABC за точку C . Точка K — середина отрезка CE . Прямая, проходящая через точку A перпендикулярно AB , и прямая, проходящая через

точку E перпендикулярно BC , пересекаются в точке D . Найдите углы треугольника BKD .

805. Обязательно ли треугольник равнобедренный, если центр вписанной в него окружности одинаково удален от середин двух сторон?

806. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 .

а) Докажите, что касательная в точке A к описанной окружности параллельна прямой B_1C_1 .

б) Докажите, что $B_1C_1 \perp OA$, где O — центр описанной окружности.

807. Сторона AD вписанного четырехугольника $ABCD$ является диаметром описанной окружности, M — точка пересечения диагоналей, P — проекция M на AD . Докажите, что M — центр окружности, вписанной в треугольник BCP .

808. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

809. Известно, что в четырехугольник можно вписать и около него можно описать окружность. Докажите, что отрезки, соединяющие точки касания противоположных сторон с вписанной окружностью, взаимно перпендикулярны.

810. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковой стороной AB пересекаются в точке P . Докажите, что центр O ее описанной окружности лежит на описанной окружности треугольника APB .

811. Через точку P , лежащую на общей хорде двух пересекающихся окружностей, проведены хорда KM первой окружности и хорда LN второй окружности. Докажите, что четырехугольник $KLMN$ — вписанный.

812. Докажите, что проекции точки пересечения диагоналей вписанного четырехугольника на его стороны

являются вершинами описанного четырехугольника, если только они не попадают на продолжения сторон.

813. Три равные окружности радиуса R пересекаются в точке M (рис. 33).

Пусть A , B и C — три другие точки их попарного пересечения. Докажите, что:

а) радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен R ;

б) M — точка пересечения высот треугольника ABC .

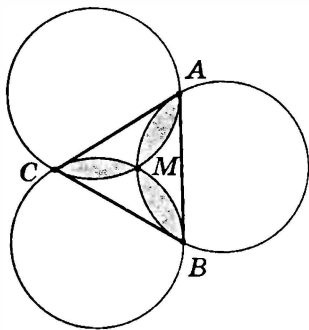


Рис. 33

814. С помощью одной линейки опустите перпендикуляр из данной точки на данный диаметр данной окружности (точка не лежит ни на окружности, ни на диаметре).

815. Две окружности касаются внутренним образом в точке M . Пусть AB — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке T . Докажите, что MT — биссектриса угла AMB .

816. Точка E лежит на стороне AC правильного треугольника ABC ; точка K — середина отрезка AE . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно прямой AB , и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно прямой BC , пересекаются в точке D . Найдите углы треугольника BKD .

817. В шестиугольнике $ABCDEF$ известно, что $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$ и $AD = BE = CF$. Докажите, что около этого шестиугольника можно описать окружность.

818. Все углы треугольника ABC меньше 120° . Докажите, что внутри него существует точка, из которой все стороны треугольника видны под углом 120° .

819. Через вершины A , B , C , D вписанного четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны, проведены касательные к описанной окружности. Докажите, что образованный ими четырехугольник — вписанный.

820. В остроугольном треугольнике ABC известно, что $CH = AB$, где H — точка пересечения высот. Найдите угол C .

821. Пусть H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC и $CH = R$, где R — радиус описанного круга. Найдите угол C .

822. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности на стороны треугольника (или их продолжения), лежат на одной прямой (прямая Симсона).

823. Докажите, что если диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны, то середины его сторон и основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения его диагоналей на стороны, лежат на одной окружности.

824. Точки K и P симметричны основанию H высоты BH треугольника ABC относительно его сторон AB и BC . Докажите, что точки пересечения отрезка KP со сторонами AB и BC (или их продолжениями) — основания высот треугольника ABC .

825. Докажите, что в любом неравностороннем треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

826. Основание каждой высоты треугольника проецируется на боковые стороны треугольника. Докажите, что шесть полученных точек лежат на одной окружности.

827. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle BAC = 20^\circ$, $\angle BCA = 35^\circ$, $\angle BDC = 40^\circ$, $\angle BDA = 70^\circ$. Найдите угол между диагоналями этого четырехугольника.

828. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол $\angle A = 90^\circ$, а угол $\angle C \leq 90^\circ$. Из вершин B и D на диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF . Известно, что $AE = CF$. Докажите, что угол C — прямой.

829. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D , E и F так, что $DE = BE$, $FE = CE$. Докажите, что центр описанной около треугольника ADF окружности лежит на биссектрисе угла DEF .

830. Докажите, что если для вписанного четырехугольника $ABCD$ выполнено равенство $CD = AD + BC$, то биссектрисы его углов A и B пересекаются на стороне CD .

831. В четырехугольнике $KLMN$, вписанном в окружность, биссектрисы углов K и N пересекаются в точке P , лежащей на стороне LM . Известно, что $KL : MN = b$. Найдите:

а) отношение расстояний от точки P до прямых KL и MN ;

б) отношение хорд LM и MN .

832. Докажите, что точка пересечения диагоналей описанного вокруг окружности четырехугольника совпадает с точкой пересечения диагоналей четырехугольника, вершинами которого служат точки касания сторон первого четырехугольника с окружностью.

6. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

833. Докажите, что высота прямоуг-
огольного треугольника, проведенная
из вершины прямого угла, есть сред-
нее пропорциональное (среднее гео-

метрическое) проекций катетов на ги-
потенузу, а каждый катет есть среднее
пропорциональное гипотенузы и сво-
ей проекции на нее.

834. (Теорема Пифагора.) Докажи-
те, что квадрат гипотенузы прямо-
угольного треугольника равен сумме
квадратов катетов.

835. (Формула Герона.) Пусть S —
площадь треугольника со сторонами
 a , b и c ; p — его полупериметр. Дока-
жите, что $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

836. Сформулируйте и докажите
теорему, обратную теореме Пифагора.

837. Диагонали ромба равны 24 и
70. Найдите сторону ромба.

838. Радиус круга равен 13, хорда
равна 10. Найдите ее расстояние от
центра.

839. К окружности радиуса 36 про-
ведена касательная из точки, удален-
ной от центра на 85. Найдите длину ка-
сательной.

840. Из общей точки проведены к
окружности две касательные. Радиус
окружности равен 11, а сумма касатель-
ных равна 120. Найдите расстояние от
центра до общей точки касательных.

841. В прямоугольном треугольнике
 ABC ($\angle C = 90^\circ$) известно, что $\angle A =$
 $= \alpha$, $BC = a$. Найдите гипотенузу и вто-
рой катет.

842. Найдите диагональ прямо-
угольного треугольника со сторонами 5 и 12.

843. Прямая, проходящая через
точку M , удаленную от центра окруж-
ности радиуса 10 на расстояние, рав-
ное 26, касается окружности в точке A .
Найдите AM .

844. Найдите высоту равнобедрен-
ного треугольника, проведенную к ос-
нованию, если стороны треугольника
равны 10, 13, 13.

845. Найдите диагонали ромба, ес-
ли они относятся как 3 : 4, а периметр
равен 1.

846. В равнобедренной трапеции
основания равны 10 и 24, боковая сто-
рона 25. Найдите высоту трапеции.

847. Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведенную из вершины прямого угла, если гипотенуза равна 8, а один из острых углов равен 60° .

848. Найдите расстояние от центра окружности радиуса 10 до хорды, равной 12.

849. Найдите сторону квадрата, вписанного в окружность радиуса 8.

850. Найдите высоту трапеции со сторонами, равными 10, 10, 10 и 26.

851. Вершина M правильного треугольника ABM со стороной a расположена на стороне CD прямоугольника $ABCD$. Найдите диагональ прямоугольника $ABCD$.

852. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна произведению катетов, деленному на гипотенузу.

853. AB и CD — две параллельные хорды, расположенные по разные стороны от центра O окружности радиуса 15; $AB = 18$, $CD = 24$. Найдите расстояние между хордами.

854. Две параллельные хорды AB и CD расположены по одну сторону от центра O окружности радиуса 30; $AB = 48$, $CD = 36$. Найдите расстояние между хордами.

855. В равнобедренном треугольнике центр вписанного круга делит высоту в отношении $17 : 15$. Основание равно 60. Найдите радиус этого круга.

856. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c , один из острых углов равен α . Найдите высоту, проведенную из вершины прямого угла.

857. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 120° , а основание равно 8. Найдите боковые стороны.

858. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки, равные a и b . Найдите катеты.

859. Основания равнобедренной трапеции равны a и b ($a > b$), острый угол равен 45° . Найдите площадь трапеции.

860. Из одной точки A проведены к данной прямой перпендикуляр и две наклонные (рис. 34). Найдите длину перпендикуляра, если наклонные равны 41 и 50, а их проекции на данную прямую относятся как $3 : 10$.

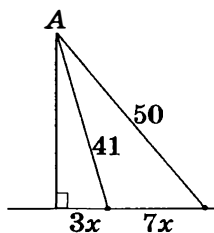


Рис. 34

861. В равнобедренной трапеции боковая сторона равна 41, высота равна 40 и средняя линия равна 45. Найдите основания.

862. Докажите, что в прямоугольной трапеции разность квадратов диагоналей равна разности квадратов оснований.

863. В трапеции $ABCD$ основание $AD = 2$, основание $BC = 1$. Боковые стороны $AB = CD = 1$. Найдите диагонали.

864. Один из катетов прямоугольного треугольника больше другого на 10, но меньше гипотенузы на 10. Найдите гипотенузу треугольника.

865. В треугольнике ABC угол BAC — прямой, стороны AB и BC равны соответственно 5 и 6. Точка K делит сторону AC в отношении $3 : 1$, считая от точки A , AH — высота треугольника ABC . Что больше: 2 или отношение BK к AH ?

866. Найдите периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, если известно, что хорда этой окружности длиной 2 удалена от центра на расстояние, равное 3.

867. Два круга радиусов r и R внешне касаются. Из центра одного круга проведена касательная к другому кругу, а из полученной точки касания проведена касательная к первому кругу. Найдите длину последней касательной.

868. В равнобедренном треугольнике основание равно 30, а боковая сторона равна 39. Найдите радиус вписанного круга.

869. Найдите радиус круга, описанного около равнобедренного треугольника с основанием 6 и боковой стороной 5.

870. Найдите периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, если известно, что хорда длиной 2 этой окружности удалена от ее центра на 3.

871. Найдите длину стороны квадрата, вписанного в окружность, если известно, что хорда длиной 2 этой окружности удалена от ее центра на 3.

872. На каком расстоянии от сторон правильного шестиугольника находится центр окружности, описанной около данного шестиугольника, если известно, что хорда длиной 3 этой окружности удалена от ее центра на 0,5?

873. Вершина M правильного треугольника ABM со стороной a расположена на стороне CD прямоугольника $ABCD$. Найдите диагональ прямоугольника $ABCD$.

874. Найдите высоту и радиусы вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника со стороной, равной a .

875. Точка M расположена на стороне CD квадрата $ABCD$ с центром O , причем $CM : MD = 1 : 2$. Найдите стороны треугольника AOM , если сторона квадрата равна 6.

876. Большее основание прямоугольной трапеции вдвое больше ее меньшего основания, а боковые сторо-

ны равны 4 и 5. Найдите диагонали трапеции.

877. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 3 : 7, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 42. Найдите отрезки гипотенузы.

878. В треугольнике больший угол при основании равен 45° , а высота делит основание на отрезки, равные 20 и 21. Найдите большую боковую сторону.

879. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит катет на отрезки m и n ($m > n$). Найдите другой катет и гипотенузу.

880. Периметр параллелограмма равен 90, а острый угол равен 60° . Диагональ параллелограмма делит его тупой угол на части в отношении 1 : 3. Найдите стороны параллелограмма.

881. В треугольнике ABC известно, что $AB = 3$, высота $CD = \sqrt{3}$. Основание D высоты CD лежит на стороне AB и $AD = BC$. Найдите AC .

882. Окружность радиуса R , построенная на большем основании AD трапеции $ABCD$ как на диаметре, касается меньшего основания BC в точке C , а боковой стороны AB — в точке A . Найдите диагонали трапеции.

883. Сторона правильного треугольника равна a . Найдите радиус вневписанной окружности.

884. На основании равнобедренного треугольника, равном 8, как на хорде построена окружность, касающаяся боковых сторон треугольника. Найдите радиус окружности, если высота, опущенная на основание треугольника, равна 3.

885. В окружности радиуса R проведен диаметр и на нем взята точка A на расстоянии a от центра. Найдите радиус второй окружности, которая касается диаметра в точке A и изнутри касается данной окружности.

886. В сектор AOB с радиусом R и углом 90° вписана окружность, касаю-

щаяся отрезков OA , OB и дуги AB (рис. 35). Найдите радиус окружности.

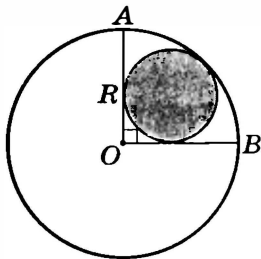


Рис. 35

887. O — центр окружности, C — точка пересечения хорды AB и радиуса OD , перпендикулярного ей, $OC = 9$, $CD = 32$. Найдите хорду.

888. AB — диаметр круга; BC — касательная; D — точка пересечения прямой AC с окружностью. Дано: $AD = 32$ и $DC = 18$. Найдите радиус круга.

889. Радиус круга равен R . Найдите длину хорды, проведенной из конца данного диаметра через середину перпендикулярного ему радиуса.

890. В прямоугольном треугольнике острый угол равен α , а радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен R . Найдите высоту треугольника, опущенную на гипотенузу.

891. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении $1 : 2$. Найдите стороны треугольника.

892. Хорда AC окружности радиуса R образует с диаметром AB угол, равный α . Найдите расстояние от точки C до диаметра AB .

893. Основания прямоугольной трапеции равны 6 и 8. Один из углов при меньшем основании равен 120° . Найдите диагонали трапеции.

894. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 16. Найдите медиану, проведенную к гипотенузе.

895. Даны отрезки a и b . Постройте отрезки $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$.

896. Найдите основание равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна a , а высота, опущенная на основание, равна отрезку, соединяющему середину основания с серединой боковой стороны.

897. Боковые стороны треугольника равны 25 и 30, а высота, проведенная к основанию, равна 24. Найдите основание.

898. В треугольнике ABC проведена высота AD . Докажите, что $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$ и $AB^2 - AC^2 = BM^2 - CM^2$, где M — произвольная точка высоты AD .

899. В равнобедренном треугольнике ABC боковая сторона AB равна 10 и основание AC равно 12. Биссектрисы углов A и C пересекаются в точке D . Найдите BD .

900. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной, равной 6, так, что угол в 60° у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите стороны треугольника.

901. В треугольнике ABC сторона AB равна 6. Основание D высоты CD лежит на стороне AB . Известно, что $AD = 4$, $BC = 4$. Найдите высоту AE , которая опущена из вершины A на сторону BC .

902. Даны две параллельные прямые на расстоянии 15 одна от другой; между ними дана точка M на расстоянии 3 от одной из них. Через точку M проведена окружность, касающаяся обеих прямых. Найдите расстояние между проекциями центра и точки M на одну из данных прямых.

903. Периметр равнобедренной трапеции, описанной около круга, равен p . Найдите радиус этого круга, если известно, что острый угол при основании трапеции равен α .

904. В равнобедренную трапецию с основаниями a и b вписана окружность. Найдите диагональ трапеции.

905. Три окружности разных радиусов попарно касаются друг друга внешним образом. Отрезки, соединяющие их центры, образуют прямоугольный треугольник. Найдите радиус меньшей окружности, если радиусы большей и средней равны 6 и 4.

906. В равносторонний треугольник вписана окружность. Этой окружности и сторон треугольника касаются три малые окружности. Найдите сторону треугольника, если радиус малой окружности равен r .

907. Из одной точки проведены к окружности две касательные. Длина каждой касательной равна 12, а расстояние между точками касания равно 14,4. Найдите радиус окружности.

908. Через концы дуги окружности, содержащей 120° , проведены касательные, и в фигуру, ограниченную этими касательными и данной дугой, вписана окружность. Докажите, что ее длина равна длине исходной дуги.

909. В окружности радиуса R проведена хорда, равная $\frac{R}{2}$. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой — секущая, параллельная касательной. Найдите расстояние между касательной и секущей.

910. В сегменте хорда равна a , а высота равна h . Найдите радиус круга.

911. Радиус круга равен 25; две параллельные хорды равны 14 и 40. Найдите расстояние между ними.

912. Из одной точки проведены к кругу две касательные. Длина касательной равна 156, а расстояние между точками касания равно 120. Найдите радиус круга.

913. AB и AC — касательные к одному кругу с центром O , M — точка

пересечения прямой AO с окружностью; DME — отрезок касательной, проведенной через точку M , между AB и AC . Найдите DE , если радиус круга равен 15, а расстояние AO равно 39.

914. К окружности радиуса, равно-го 7, проведены две касательные из одной точки, удаленной от центра на 25 (рис. 36). Найдите расстояние между точками касания.

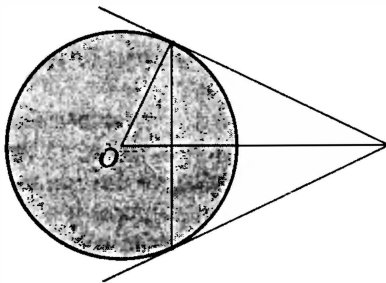


Рис. 36

915. Данного круга касаются два равных меньших круга — один изнутри, другой извне, причем дуга между точками касания содержит 60° . Радиусы меньших кругов равны r , радиус большего круга равен R . Найдите расстояние между центрами меньших кругов.

916. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке K . Найдите площадь треугольника CKB , если катет BC равен a и катет AC равен b .

917. Трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM вписана в окружность, центр которой лежит на основании KN . Диагональ KM трапеции равна 4, а боковая сторона KL равна 3. Найдите основание LM .

918. В треугольнике ABC угол BAC — прямой, стороны AB и BC равны соответственно 1 и 2. Биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке L , G — точка пересечения медиан

треугольника ABC . Что больше: BL или BG ?

919. В прямоугольнике $ABCD$ отрезки AB и BD равны соответственно 3 и 6. На продолжении биссектрисы BL треугольника ABD взята точка N такая, что точка L делит отрезок BN в отношении $10 : 3$, считая от точки B . Что больше: BN или CL ?

920. Косинус угла при основании равнобедренного треугольника равен $\frac{3}{5}$; высота, опущенная на основание, равна h . Найдите высоту, опущенную на боковую сторону.

921. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна a , один из острых углов равен α . Найдите расстояния от основания высоты, опущенной на гипотенузу, до катетов треугольника.

922. Из точки M проведены касательные MA и MB к окружности с центром O (A и B — точки касания). Найдите радиус окружности, если $\angle AMB = \alpha$ и $AB = a$.

923. Площадь прямоугольника равна 120, синус угла между диагональю и одной из сторон равен $\frac{5}{13}$.

Найдите стороны прямоугольника.

924. Прямые, касающиеся окружности с центром O в точках A и B , пересекаются в точке M . Найдите хорду AB , если отрезок MO делится ею на отрезки, равные 2 и 18.

925. Докажите, что произведение стороны треугольника на проведенную к ней высоту для данного треугольника постоянно.

926. Дан треугольник со сторонами 13, 14, 15. Найдите высоту, проведенную к большей стороне.

927. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

928. В прямоугольной трапеции меньшая диагональ равна большей боковой стороне. Найдите большую диа-

гональ, если большая боковая сторона равна a , а меньшее основание равно b .

929. В прямоугольном треугольнике медианы, проведенные к катетам, равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найдите гипотенузу треугольника.

930. В прямоугольном треугольнике медианы, проведенные из вершин острых углов, равны $\sqrt{156}$ и $\sqrt{89}$. Найдите гипотенузу треугольника.

931. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна c и $\angle ABC = \alpha$. Найдите все медианы в этом треугольнике.

932. В большем из двух concentрических кругов проведена хорда, равная 32 и касающаяся меньшего круга. Определите радиус каждого из кругов, если ширина образовавшегося кольца равна 8.

933. В треугольник вписана окружность радиуса 3. Найдите стороны треугольника, если одна из них разделена точкой касания на отрезки с длинами 4 и 3.

934. Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника равны 2 и 5 соответственно. Найдите катеты треугольника.

935. Около окружности с диаметром 15 описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17. Найдите основания трапеции.

936. Расстояния от одного конца диаметра до концов параллельной ему хорды равны 13 и 84. Найдите радиус круга.

937. Два круга касаются внешним образом (рис. 37). Найдите длину их

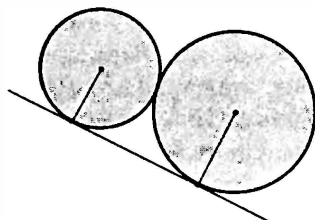


Рис. 37

общей внешней касательной (между точками касания), если радиусы равны 16 и 25.

938. Катет $AC = 15$, катет $CB = 8$. Из центра C радиусом CB описана дуга, отсекающая от гипотенузы часть BD . Найдите BD .

939. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен 16 и катет BC равен 12. Из центра B радиусом BC описана окружность и к ней проведена касательная, параллельная гипотенузе (причем касательная и треугольник лежат по разные стороны от гипотенузы). Катет BC продолжен до пересечения с проведенной касательной. Определите, на сколько продолжен катет.

940. Расстояние между центрами двух окружностей, лежащих одна вне другой, равно 65; длина их общей внешней касательной (между точками касания) равна 63; длина их общей внутренней касательной равна 25. Найдите радиусы окружностей.

941. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла опущен перпендикуляр на гипотенузу, и на нем как на диаметре построена окружность, которая на катетах CA и CB высекает внутренние отрезки m и n . Найдите катеты, если $m = 12$, $n = 18$.

942. В равнобедренном треугольнике основание равно 48, а боковая сторона равна 30. Найдите радиусы описанного и вписанного кругов и расстояние между их центрами.

943. В треугольнике ABC угол A — прямой, $\angle B = 30^\circ$. В треугольник вписана окружность, радиус которой равен $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины C до точки касания этой окружности с катетом AB .

944. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб со стороной a и острым углом 60° .

945. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с острым углом 60° , равен $\sqrt{3}$. Найдите стороны треугольника.

946. Высота параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, равна a и делит сторону пополам. Острый угол параллелограмма равен 30° . Найдите диагонали параллелограмма.

947. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 16. Найдите высоту, проведенную из вершины прямого угла.

948. Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора. Верна ли она?

949. Высота ромба, проведенная из вершины тупого угла, делит его сторону на отрезки длиной a и b . Найдите диагонали ромба.

950. Прямые, содержащие боковые стороны трапеции, пересекаются под прямым углом. Большая боковая сторона трапеции равна 8, а разность оснований равна 10. Найдите меньшую боковую сторону.

951. Из точки M проведены касательные MA и MB к окружности с центром O (A и B — точки касания). Найдите радиус окружности, если $\angle AMB = \alpha$ и $AB = a$.

952. На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону на отрезки, равные a и b . Найдите основание треугольника.

953. В тупоугольном равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 32, а боковая сторона равна 20. Из вершины B проведен перпендикуляр к боковой стороне до пересечения с основанием. На какие отрезки он делит основание?

954. Найдите биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника с катетами 24 и 18.

955. В треугольнике ABC высота $CD = 7$, а высота $AE = 6$. Точка E делит сторону BC так, что $BE : EC = 3 : 4$. Найдите сторону AB .

956. Докажите, что обратная величина квадрата высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипо-

тенузе, равна сумме обратных величин квадратов катетов.

957. Найдите площадь квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами a и b (сторона квадрата лежит на гипотенузе, а две вершины — на катетах треугольника).

958. Окружности радиусов 8 и 3 касаются внутренним образом. Из центра большей окружности проведена касательная к меньшей окружности. Найдите длину этой касательной.

959. Точка B расположена вне окружности, а точки A и C — две диаметрально противоположные точки этой окружности. Отрезок AB пересекается с окружностью в точке P , а отрезок CB — в точке Q . Известно, что $AB = 2$, $PC = \sqrt{2}$, $AQ = \sqrt{3}$. Найдите AC .

960. В треугольнике ABC известно, что $AB = 6$, $AB = BC$. На стороне AB как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону BC в точке D так, что $BD : DC = 2 : 1$. Найдите AC .

961. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12. Найдите катеты треугольника.

962. Дана прямоугольная трапеция. Окружность, построенная на меньшей боковой стороне как на диаметре, касается другой боковой стороны и делит ее на отрезки с длинами a и b (рис. 38). Найдите радиус окружности.

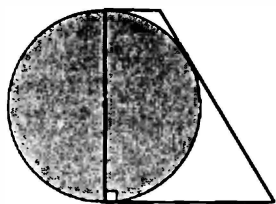


Рис. 38

963. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если радиус окружности,

вписанной в него, равен 3, а катет равен 10.

964. Дан круг радиуса R . Четыре круга равных радиусов касаются данного круга внешним образом, и каждый из этих четырех кругов касается двух других. Найдите радиусы этих четырех кругов.

965. Дан квадрат, две вершины которого лежат на окружности радиуса R , а две другие — на касательной к этой окружности. Найдите диагонали квадрата.

966. Окружность радиуса r касается некоторой прямой в точке M . На этой прямой по разные стороны от M взяты точки A и B так, что $MA = MB = a$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся данной окружности.

967. В круговой сектор с центральным углом 120° вписан круг. Найдите его радиус, если радиус данного круга равен R .

968. Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 13 и 15, а общая хорда равна 24. Найдите расстояние между центрами.

969. Радиусы двух кругов равны 27 и 13, а расстояние между центрами равно 50. Найдите длины их общих касательных.

970. Окружность с центром в вершине прямого угла прямоугольного треугольника радиусом, равным меньшему катету, делит гипотенузу на отрезки 98 и 527 (начиная от меньшего катета). Найдите катеты.

971. Длины двух параллельных хорд равны 40 и 48, расстояние между ними равно 22. Найдите радиус круга.

972. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Найдите расстояние от центра вписанного круга до высоты, опущенной на гипотенузу.

973. В прямоугольном треугольнике катеты равны 75 и 100. На отрезках гипотенузы, образуемых основанием высоты, построены полуокружности

по одну сторону с данным треугольником. Найдите отрезки катетов, заключенные внутри полукругов.

974. Точка удалена от прямой MN на расстояние a . Данным радиусом r описана окружность так, что она проходит через точку A и касается прямой MN . Найдите расстояние между полученной точкой касания и данной точкой A .

975. Сторона AB треугольника ABC равна 1. На стороне AB как на диаметре построена окружность, которая делит сторону AC точкой D пополам, а сторону BC точкой E в отношении $BE : EC = 7 : 2$. Найдите сторону AC .

976. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36, вписана окружность. Гипотенуза делится точкой касания в отношении $2 : 3$. Найдите стороны треугольника.

977. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Гипотенуза делится точкой касания на отрезки длиной 5 и 12. Найдите площадь треугольника.

978. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 30, вписана окружность. Один из катетов делится точкой касания в отношении $2 : 3$, считая от вершины прямого угла. Найдите стороны треугольника.

979. Сторона AD четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Найдите BC , если $AD = 6$, $BD = 3\sqrt{3}$, $\angle BAC : \angle CAD = 1 : 3$.

980. Три стороны четырехугольника в порядке обхода равны 7, 1 и 4. Найдите четвертую сторону этого четырехугольника, если известно, что его диагонали перпендикулярны.

981. Две вершины квадрата расположены на основании равнобедренного треугольника, а две другие — на его боковых сторонах. Найдите сторону квадрата, если основание треугольника равно a , а угол при основании равен 30° .

982. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60° . Найдите радиусы окружностей, если расстояние между их центрами равно a .

983. Высота треугольника ABC , опущенная на сторону BC , равна h , $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Найдите остальные высоты этого треугольника.

984. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен R . Угол при основании равен α . Найдите стороны треугольника.

985. В равнобедренной трапеции $ABCD$ боковая сторона равна 10, большее основание равно 24, а высота равна 8. Определите, что пересекает биссектриса острого угла трапеции: меньшее основание или его продолжение.

986. Найдите высоту трапеции, боковые стороны которой равны 6 и 8, а основания равны 4 и 14.

987. Основание равнобедренного треугольника равно 1, а углы при основании 30° . Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в данный равнобедренный, одна сторона которого перпендикулярна основанию данного.

988. Найдите диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12, если известно, что центр ее описанной окружности лежит на большем основании (рис. 39).

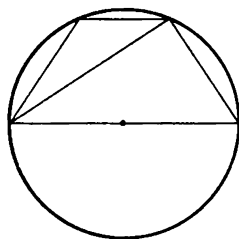


Рис. 39

989. Отрезок, соединяющий центры двух пересекающихся окружностей, делится их общей хордой на отрезки, равные 5 и 2. Найдите общую

хорду, если известно, что радиус одной окружности вдвое больше радиуса другой.

990. Сторона треугольника равна 2, прилежащие к ней углы равны 30° и 45° . Найдите остальные стороны треугольника.

991. Косинус угла при основании равнобедренного треугольника равен $\frac{3}{5}$; высота, опущенная на основание, равна h . Найдите высоту, опущенную на боковую сторону.

992. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке K . Найдите CK , если $BC = a$ и $AC = b$.

993. В трапеции $ABCD$ основание $AD = 2$, основание $BC = 1$. Боковые стороны $AB = CD = 1$. Найдите диагонали трапеции.

994. Через середину гипотенузы прямоугольного треугольника проведен к ней перпендикуляр. Отрезок этого перпендикуляра, заключенный внутри треугольника, равен s , а отрезок, заключенный между одним катетом и продолжением другого, равен $3s$. Найдите гипотенузу.

995. Длины параллельных сторон трапеции равны 25 и 4, а непараллельных — 20 и 13. Найдите высоту трапеции.

996. Основания равнобедренной трапеции a и b , боковая сторона равна c , а диагональ равна d . Докажите, что $d^2 = ab + c^2$.

997. В трапеции $ABCD$ одно основание в два раза больше другого. Меньшее основание равно s . Диагонали трапеции пересекаются под прямым углом, а отношение боковых сторон равно k . Найдите боковые стороны трапеции.

998. В прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что одна из его сторон находится на гипотенузе. Боковые отрезки гипотенузы равны m и n . Найдите площадь квадрата.

999. В равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на основание и боковую сторону, равны соответственно m и n . Найдите стороны треугольника.

1000. Окружности с центрами O_1 и O_2 имеют общую хорду AB , $\angle AO_1B = 60^\circ$. Отношение длины первой окружности к длине второй окружности равно $\sqrt{2}$. Найдите угол AO_2B .

1001. Сторона BC треугольника ABC равна 12. Около треугольника описана окружность радиуса 10. Найдите стороны AB и AC треугольника, если известно, что радиус OA окружности делит сторону BC на два равных отрезка.

1002. Окружности радиусов 2 и 3 внешним образом касаются друг друга в точке A . Их общая касательная, проходящая через точку A , пересекает две другие их общие касательные в точках B и C . Найдите BC .

1003. В треугольнике ABC на стороне AC как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону AB в точке M и сторону BC в точке N . Известно, что $AC = 2$, $AB = 3$, $AM : MB = 2 : 3$. Найдите AN .

1004. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу в точке D так, что $AD : BD = 1 : 3$. Высота, опущенная из вершины C прямого угла на гипотенузу, равна 3. Найдите катет BC .

1005. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R . Его диагонали взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке P . Найдите $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$ и $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$.

1006. Прямая, перпендикулярная двум сторонам параллелограмма, делит его на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Найдите острый угол параллелограмма, если его стороны равны a и b ($a < b$).

1007. Окружности радиусов r и R ($R > r$) касаются внешним образом в точке K . К ним проведены две общие внешние касательные (рис. 40). Их точки касания с меньшей окружностью — A и D , с большей — B и C соответственно.

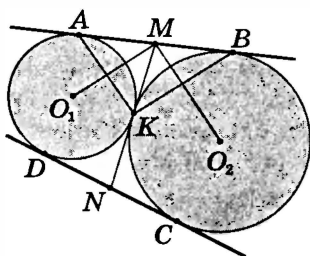


Рис. 40

а) Найдите AB и отрезок MN общей внутренней касательной, заключенный между внешними касательными.

б) Докажите, что углы AKB и O_1MO_2 — прямые (O_1 и O_2 — центры окружностей).

1008. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке C . Радиусы окружностей равны 2 и 7. Общая касательная к обеим окружностям, проведенная через точку C , пересекается с другой их общей касательной в точке D . Найдите расстояние от центра меньшей окружности до точки D .

1009. Найдите отношение радиусов двух окружностей, касающихся между собой, если каждая из них касается сторон угла, величина которого равна α .

1010°. Сторона треугольника равна 48, а высота, проведенная к этой стороне, равна 8,5. Найдите расстояние от центра окружности, вписанной в этот треугольник, до вершины, противоположной данной стороне, если радиус вписанной окружности равен 4.

1011°. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром в точке O , при этом $AO =$

$= OC = 1$, $BO = OD = 2$. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$.

1012. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c . Центры трех окружностей радиуса $\frac{c}{5}$ находятся в его вершинах. Найдите радиус четвертой окружности, которая касается трех данных и не содержит их внутри себя.

1013. В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $\angle A = \alpha > 90^\circ$ и $BC = a$. Найдите расстояние между точкой пересечения высот и центром описанной окружности.

1014°. В окружность радиуса $3 + \sqrt{3}$ вписан правильный шестиугольник $ABCDEK$. Найдите радиус круга, вписанного в треугольник ACD .

1015. Окружность радиуса $1 + \sqrt{2}$ описана около равнобедренного прямоугольного треугольника. Найдите радиус окружности, которая касается катетов этого треугольника и внутренним образом касается окружности, описанной около него.

1016°. На плоскости даны две окружности радиусов 12 и 7 с центрами в точках O_1 и O_2 , касающиеся некоторой прямой в точках M_1 и M_2 и лежащие по одну сторону от этой прямой. Известно, что $M_1M_2 : O_1O_2 = 2\sqrt{5} : 5$. Найдите M_1M_2 .

1017. На плоскости даны две окружности радиусов 4 и 3 с центрами в точках O_1 и O_2 , касающиеся некоторой прямой в точках M_1 и M_2 и лежащие по разные стороны от этой прямой. Известно, что $O_1O_2 : M_1M_2 = 2 : \sqrt{3}$. Найдите O_1O_2 .

1018°. Дана трапеция $ABCD$, у которой угол BAD — прямой. На стороне AB как на диаметре построена окружность, которая пересекает диагональ BD в точке M . Известно, что $AB = 3$, $AD = 4$, $BC = 1$. Найдите угол CAM .

1019. Точка пересечения медиан прямоугольного треугольника удалена от катетов на расстояния соответственно 3 и 4. Найдите расстояние от этой точки до гипотенузы.

1020°. Точки A , B и C расположены на одной прямой. Через точку B проходит некоторая прямая. Пусть M — произвольная точка на этой прямой. Докажите, что расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABM и CBM , не зависит от положения точки M . Найдите это расстояние, если $AC = a$, $\angle MBC = \alpha$.

1021. Радиус окружности, вписанной в ромб, равен r , а острый угол ромба равен α . Найдите сторону ромба.

1022. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна a и образует угол α с медианой, проведенной из той же вершины. Найдите катеты треугольника.

1023. В трапеции $ABCD$ большее основание $AD = 19$, боковая сторона $AB = 13$, а другая боковая сторона $CD = 12$ и перпендикулярна основаниям. Биссектриса острого угла BAD пересекает прямую DC в точке M . Определите, где лежит точка M : на отрезке DC или вне его.

1024. Найдите высоту равнобедренного треугольника, проведенную к боковой стороне, если основание равно a , а боковая сторона равна b .

1025. Вершины M и N равностороннего треугольника BMN лежат соответственно на сторонах AD и CD квадрата $ABCD$ со стороной, равной a . Найдите MN .

1026. Даны отрезки a и b . Постройте отрезок $\sqrt{ab}$.

1027. Высота CD треугольника ABC делит сторону AB на отрезки AD и BD , причем $AD \cdot BD = CD^2$. Верно ли, что треугольник ABC — прямоугольный?

1028. Две стороны треугольника равны 6 и 8. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите третью сторону треугольника.

1029. В треугольнике ABC известно, что BD — медиана, $BD = \frac{\sqrt{3}}{4}AB$, а $\angle DBC = 90^\circ$. Найдите угол ABD .

1030. На продолжении стороны AD прямоугольника $ABCD$ за точку D взята точка E , причем $DE = 0,5AD$ и $\angle BEC = 30^\circ$. Найдите отношение сторон прямоугольника $ABCD$.

1031. На продолжении стороны AB ромба $ABCD$ за точку B взята точка M , причем $MD = MC$ и $\angle MDC = \arctg \frac{8}{5}$.

Найдите отношение отрезков MA и MB .

1032. В трапеции $ABCD$ большее основание AD равно a , BC перпендикулярно CD , $AB = BC$, диагональ BD перпендикулярна AB (рис. 41). Найдите стороны трапеции.

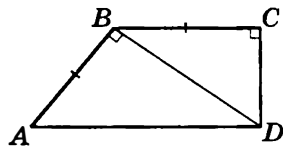


Рис. 41

1033. В треугольнике ABC медианы AE и BD , проведенные к сторонам BC и AC , пересекаются под прямым углом. Сторона BC равна a . Найдите другие стороны треугольника ABC , если $AE^2 + BD^2 = d^2$.

1034. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются под прямым углом, а одно основание в два раза больше другого. Отношение боковых сторон трапеции равно m . Найдите боковые стороны трапеции, если сумма квадратов диагоналей равна d^2 .

1035. В треугольнике известны стороны: $AB = 15$, $BC = 13$ и $AC = 14$. Че-

рез точку C проведен перпендикуляр к стороне AC до пересечения в точке K с продолжением стороны AB . Найдите BK и CK .

1036. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами 8 и 9. Найдите стороны треугольника.

1037. Боковая сторона, меньшее основание и диагональ равнобедренной трапеции равны соответственно 10, 6 и 14. Найдите большее основание.

1038. AA_1 , BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC . Докажите, что

$$AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = \\ = AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2.$$

1039. Четырехугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать и около него можно описать окружности. Диаметр описанной окружности совпадает с диагональю AC . Докажите, что модули разностей его противоположных сторон равны.

1040. В прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 26, вписана окружность радиуса 4. Найдите периметр треугольника.

1041. Диаметр AB окружности равен 1. На нем отложен отрезок AC , равный a . Проведена также хорда AD , равная b . Из точки C восстановлен перпендикуляр к AB , пересекающий хорду AD в точке E , а из точки D опущен перпендикуляр DF на AB . Оказалось, что $AE = AF$. Докажите, что $a = b^3$.

1042. В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса R . Найдите стороны трапеции, если ее меньшее основание равно $\frac{4R}{3}$.

1043. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов ее боковой стороны на расстояния 15 и 20. Найдите стороны трапеции.

1044. Окружность радиуса 2 касается внешним образом другой окружности в точке A . Общая касательная к обеим окружностям, проведенная через точку A , пересекается с другой их общей касательной в точке B . Найдите радиус второй окружности, если $AB = 4$.

1045. Окружности радиусов r и R касаются внешним образом. К ним проведена общая внешняя касательная; A и B — точки касания. Найдите радиус окружности, касающейся внешним образом данных окружностей и касающейся прямой AB .

1046. Даны окружности радиусов r и R ($R > r$). Расстояние между их центрами равно a ($a > R + r$). Найдите отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключенные между точками касания.

1047. В круге с центром O хорда AB пересекает радиус OC в точке D , причем $\angle CDA = 120^\circ$. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков AD , DC и дуги AC , если $OC = 2$, $OD = \sqrt{3}$.

1048. Дана окружность с центром в точке O и радиусом 2. Из конца отрезка OA , пересекающего с окружностью в точке M , проведена касательная AK к окружности, $\angle OAK = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков AK , AM и дуги MK .

1049. Сторона AB прямоугольника $ABCD$ равна 12, а сторона AD равна 5. Диагонали прямоугольника пересекаются в точке E . Найдите отношение расстояния от точки E до центра окружности, вписанной в треугольник AED , к расстоянию от точки E до центра окружности, вписанной в треугольник DEC .

1050. Найдите площадь ромба $ABCD$, если радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD , равны R и r .

1051. Найдите сумму квадратов расстояний от точки M , взятой на диа-

метре некоторой окружности, до концов любой из параллельных этому диаметру хорд, если радиус окружности равен R , а расстояние от точки M до центра окружности равно a .

1052. В окружность радиуса 17 вписан четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны и находятся на расстоянии 8 и 9 от центра окружности. Найдите стороны четырехугольника.

1053. Две окружности с центрами O_1 , O_2 и радиусами 32, пересекаясь, делят отрезок O_1O_2 на три равные части. Найдите радиус окружности, которая касается изнутри обеих окружностей и касается отрезка O_1O_2 .

1054. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α вписана окружность. Кроме того, построена вторая окружность, касающаяся боковых сторон треугольника и вписанной в него окружности. Найдите радиус второй окружности.

1055. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами 3 и 4 вершина C прямого угла соединена с серединой D гипотенузы AB . Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD .

1056. В прямоугольном треугольнике ABC с острым углом 30° проведена высота CD из вершины прямого угла C . Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD , если меньший катет треугольника ABC равен 1.

1057. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами m и n . Найдите стороны треугольника.

1058. Длины боковой стороны AD и основания CD трапеции $ABCD$ равны k , а длина основания $AB = 2k$. Длина диагонали AC равна l . Найдите длину боковой стороны BC .

1059. В прямоугольной трапеции верхнее основание равно высоте, а нижнее основание равно a . Найдите боковые стороны трапеции, если известно, что одна из них касается окружности, проходящей через обе верхние вершины, и касается нижнего основания (рис. 42).

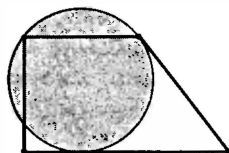


Рис. 42

1060. В треугольнике ABC медианы, проведенные к сторонам AC и BC , пересекаются под прямым углом. Найдите AB , если $AC = b$, $BC = a$.

1061. Диагональ равнобедренной трапеции равна a , а средняя линия равна b . Найдите высоту трапеции.

1062. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания $AD = 12$, $BC = 6$, высота равна 4. Диагональ AC делит угол BAD трапеции на две части. Какая из них больше?

1063. В прямоугольный треугольник с гипотенузой a и острым углом 30° вписан прямоугольник, одна из сторон которого вдвое больше другой. Большая сторона прямоугольника находится на гипотенузе, а противоположные ей вершины — на катетах. Найдите стороны прямоугольника.

1064. Докажите, что в прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу пропорциональны квадратам катетов.

1065. Дан треугольник со сторонами a , b и c . Докажите, что если медианы, проведенные к сторонам a и b , взаимно перпендикулярны, то $a^2 + b^2 = 5c^2$.

1066. Диагональ равнобедренной трапеции равна a , а средняя линия

равна b . Найдите высоту этой трапеции.

1067. Найдите радиусы вписанной и невписанных окружностей треугольника со сторонами 5, 12, 13.

1068. В трапеции $ABCD$ меньшая диагональ BD перпендикулярна основаниям AD и BC , сумма острых углов A и C равна 90° . Основания $AD = a$, $BC = b$. Найдите боковые стороны трапеции.

1069. В прямоугольной трапеции основания равны 17 и 25, а большая боковая сторона равна 10. Из середины этой стороны проведен перпендикуляр к ней до пересечения с продолжением другой стороны. Найдите длину этого перпендикуляра.

1070. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найдите стороны трапеции, если ее высота равна 12, а длины биссектрис — 15 и 13.

1071. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до двух противоположных вершин прямоугольника равна сумме квадратов расстояний от этой точки до двух других вершин прямоугольника.

1072. В сегмент с дугой 120° и высотой h вписан прямоугольник $ABCD$ так, что $AB : BC = 1 : 4$ (BC лежит на хорде). Найдите площадь прямоугольника.

1073. В сегмент, дуга которого равна 60° , вписан квадрат. Найдите площадь квадрата, если радиус круга равен $2\sqrt{3} + \sqrt{17}$.

1074. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N . Найдите отрезок CN , если катеты равны 1 и 4.

1075. В равнобедренной трапеции лежат две касающиеся окружности

радиусов R , каждая из которых касается обоих оснований и одной из боковых сторон, а центры окружностей лежат на диагоналях. Найдите стороны трапеции.

1076. К данной окружности проведены две параллельные касательные и третья касательная, пересекающая их. Докажите, что радиус окружности есть среднее геометрическое отрезков третьей касательной.

1077. В окружность вписан прямоугольник $ABCD$, сторона AB которого равна a . Из конца K диаметра KP , параллельного стороне AB , сторона BC видна под углом β . Найдите радиус окружности.

1078. Две окружности радиусов 4 и 3 касаются друг друга внешним образом. К этим окружностям проведены общие внешние касательные PQ и RS таким образом, что точки P и S принадлежат окружности большего радиуса, а точки Q и R принадлежат окружности меньшего радиуса. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков RS , SP и PQ .

1079. Стороны треугольника равны 10, 10, 12. Найдите радиусы вписанной и невписанных окружностей.

1080. Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается боковой стороны AB в точке F . Найдите площадь трапеции, если $AF = m$, $FB = n$, а меньшее основание трапеции BC равно b .

1081. В прямоугольной трапеции лежат две окружности. Одна из них, радиуса 4, вписана в трапецию, а вторая, радиуса 1, касается двух сторон трапеции и первой окружности. Найдите площадь трапеции.

1082. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AB и AC равны 4 и 3 соответственно. Точка D делит гипотенузу BC пополам. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ADC и ABD .

1083. В треугольнике ABC со сторонами $AB = \sqrt{3}$, $BC = 4$, $AC = \sqrt{7}$ проведена медиана BD . Окружности, вписанные в треугольники ABD и BDC , касаются BD в точках M и N соответственно. Найдите MN .

1084. Радиус OM окружности с центром в точке O и хорда KQ пересекаются в точке A . Отрезки OM и OA равны соответственно r и a , $\angle KAM = \alpha$ ($\alpha < 90^\circ$). Найдите радиус окружности, касающейся отрезков AK , AM и дуги MK .

1085. Найдите косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если точка пересечения его высот лежит на вписанной в треугольник окружности.

1086. Найдите длину хорды, если даны радиус r и расстояние a от одного конца хорды до касательной, проведенной через другой ее конец.

1087. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E (рис. 43). Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к BC , пересекает сторону AD в точке M . Докажите, что EM — медиана треугольника AED , и найдите ее длину, если $AB = 7$, $CE = 3$, $\angle ADB = \alpha$.

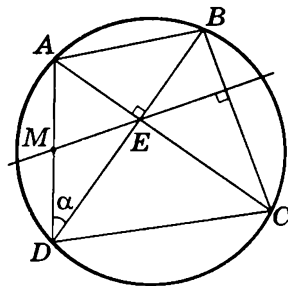


Рис. 43

1088. В треугольнике PQR угол QRP равен 60° . Найдите расстояние между точками касания со стороной QR окружности радиуса 2, вписанной

в треугольник, и окружности радиуса 3, касающейся продолжений сторон PQ и PR .

1089. К окружности проведены касательные, касающиеся ее в концах диаметра AB . Произвольная касательная к окружности пересекает эти касательные в точках K и M . Докажите, что произведение $AK \cdot BM$ постоянно.

1090. В окружность вписан равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α . Кроме того, построена вторая окружность, касающаяся обеих боковых сторон треугольника и первой окружности. Найдите радиус второй окружности.

1091. Сторона треугольника равна 2, прилежащие к ней углы равны 30° и 45° . Найдите остальные стороны треугольника.

1092. Диагональ AC равнобедренной трапеции $ABCD$ равна a и образует углы α и β с большим основанием AD и боковой стороной AB . Найдите основания трапеции.

1093. Стороны параллелограмма равны a и b , а угол между ними равен α . Найдите стороны и диагонали четырехугольника, образованного пересечением биссектрис внутренних углов параллелограмма.

1094. Найдите $\sin 15^\circ$ и $\operatorname{tg} 75^\circ$.

1095. Катет прямоугольного треугольника равен 2, а противолежащий ему угол равен 30° . Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники, на которые данный треугольник делится медианой, проведенной из вершины прямого угла.

1096. AB и CD — параллельные прямые, AC — секущая, E и F — точки пересечения прямых AB и CD с биссектрисами углов C и A . Дано: $AF = 96$, $CE = 110$. Найдите AC .

1097. Из вершины тупого угла ромба $ABCD$ проведены высоты BM и BN . В четырехугольник $BMDN$ вписана окружность радиуса 1. Найдите сторону ромба, если $\angle ABC = 2 \operatorname{arctg} 2$.

1098. Из вершины A острого угла ромба $ABCD$ опущены перпендикуляры AM и AN на продолжения сторон BC и CD . В четырехугольник $AMCN$ вписана окружность радиуса 1. Найдите сторону ромба, если $\angle BAC = 2 \arctg \frac{1}{2}$.

1099. Окружность, центр которой лежит вне квадрата $ABCD$, проходит через точки B и C . Найдите угол между касательными к окружности, проведенными из точки D , если отношение стороны квадрата к диаметру окружности равно $3 : 5$.

1100. Окружность, центр которой лежит внутри квадрата $PQRS$, проходит через точки Q и R . Найдите угол между касательными к окружности, проведенными из точки S , если отношение стороны квадрата к радиусу окружности равно $24 : 13$.

1101°. В прямоугольном треугольнике отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности равно $\frac{2}{5}$. Найдите острые углы треугольника.

1102. Катеты прямоугольного треугольника равны 36 и 48. Найдите расстояние от центра вписанной в треугольник окружности до высоты, проведенной к гипотенузе.

1103. В треугольнике PQR угол QPR равен 60° . Через вершины P и R проведены перпендикуляры к сторонам QR и PQ соответственно. Точка пересечения этих перпендикуляров находится от вершин P и Q на расстоянии, равном 1. Найдите стороны треугольника PQR .

1104. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена медиана CD . Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD , если $BC = 4$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен $\frac{5}{2}$.

1105°. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники AOB и BOC , если $BC = 8$, $BD = 10$.

1106. Около окружности описана равнобедренная трапеция $ABCD$. Боковые стороны AB и CD касаются окружности в точках M и N , K — середина AD . В каком отношении прямая BK делит отрезок MN ?

1107. В прямоугольном треугольнике ABC с острым углом A , равным 30° , проведена биссектриса BD другого острого угла. Найдите расстояние между центрами двух окружностей, вписанных в треугольники ABC и CBD , если меньший катет равен 1.

1108. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE , пересекающиеся в точке O . Известно, что $OE = 1$, а вершина C лежит на окружности, проходящей через точки E , D и O . Найдите стороны и углы треугольника EDO .

1109°. На отрезке AB длины $2R$ как на диаметре построена окружность. Вторая окружность того же радиуса, что и первая, имеет центр в точке A . Третья окружность касается первой окружности внутренним образом, второй окружности — внешним образом, а также касается отрезка AB . Найдите радиус третьей окружности.

1110. В равнобедренной трапеции с острым углом α при основании окружность, построенная на боковой стороне как на диаметре, касается другой боковой стороны. В каком отношении она делит большее основание трапеции?

1111. Две равные окружности пересекаются в точке C . Через точку C проведены две прямые, пересекающие данные окружности в точках A , B и M , N соответственно. Прямая AB параллельна линии центров, а прямая MN образует угол α с линией центров. Известно, что $AB = a$. Найдите NM .

1112. На отрезке AB длины $2R$ как на диаметре построена окружность. Вторая окружность, радиус которой равен половине радиуса первой окружности, касается ее внутренним образом в точке A . Третья окружность касается первой окружности внутренним образом, второй окружности — внешним образом, а также касается отрезка AB (рис. 44). Найдите радиус третьей окружности.

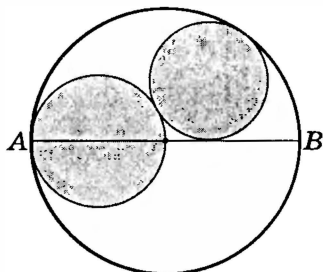


Рис. 44

1113. В равнобедренной трапеции $ABCD$ боковая сторона в $\sqrt{2}$ раз меньше основания BC , CE — высота. Найдите периметр трапеции, если $BE = \sqrt{5}$, $BD = \sqrt{10}$.

1114. В ромбе $ABCD$ из вершины D на сторону BC опущен перпендикуляр DK . Найдите сторону ромба, если $AC = 2\sqrt{6}$, $AK = \sqrt{14}$.

1115. На прямой расположены три точки A , B и C , причем $AB = BC = 3$. Три окружности радиуса R имеют центры в точках A , B и C . Найдите радиус четвертой окружности, касающейся всех трех данных, если:

а) $R = 1$; б) $R = 2$; в) $R = 5$.

1116. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N . Найдите отрезок CN , если катеты равны 1 и 4.

1117. Медиана BD остроугольного треугольника ABC равна 8. Ортого-

нальные проекции этой медианы на стороны AB и BC равны 6 и $5\sqrt{2}$ соответственно. Найдите сторону AC .

1118. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через середину диагонали AC и пересекает сторону AB в точке M . Найдите отношение $AM : AB$, если $AC = 3BD$.

1119. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через середину диагонали BD и пересекает сторону CD в точке K . Найдите отношение $KD : CD$, если $BD = 2AC$.

1120. В окружности радиуса 5 проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD . Найдите AC , если $BD = 8$.

1121. Длины основания CD , диагонали BD и боковой стороны AD трапеции $ABCD$ равны p . Длина боковой стороны BC равна q . Найдите длину диагонали AC .

1122. В некоторый угол вписана окружность радиуса 5. Хорда, соединяющая точки касания, равна 8. К окружности проведены две касательные, параллельные хорде. Найдите стороны полученной трапеции.

1123. Во вписанном в окружность четырехугольнике две противоположные стороны взаимно перпендикулярны, одна из них равна a , а прилежащий к ней угол делится диагональю на части α и β (угол α прилежит к данной стороне). Найдите диагонали четырехугольника.

1124. Две окружности радиусов R и r ($R > r$) касаются внешним образом. Найдите радиусы окружностей, касающихся обеих данных окружностей и прямой, проходящей через центры данных.

1125. На сторонах прямоугольного треугольника, вне его, построены квадраты. Известно, что шесть вершин квадратов, не принадлежащих треугольнику, лежат на окружности радиуса 1. Найдите стороны треугольника.

1126. Гипотенуза прямоугольного треугольника служит стороной квадрата, расположенного вне треугольника. Найдите расстояние между вершиной прямого угла треугольника и центром квадрата, если сумма катетов треугольника равна d .

1127. Гипотенуза прямоугольного треугольника служит стороной квадрата, расположенного вне треугольника. Найдите расстояние между вершиной прямого угла треугольника и центром квадрата, если катеты треугольника равны a и b .

1128°. Два квадрата $ABCD$ и $KLMN$ расположены так, что вершины B, C, K и N лежат на одной прямой, а четыре оставшиеся расположены по разные стороны от BC и лежат на одной окружности. Известно, что сторона одного из квадратов на 1 больше стороны другого. Найдите расстояние от центра окружности до прямой BC .

1129°. В равнобедренной трапеции $KLMN$ основание KN равно 9, основание LM равно 5. Точки P и Q лежат на диагонали LN , причем точка P расположена между точками L и Q , а отрезки KP и MQ перпендикулярны диагонали LN . Найдите площадь трапеции $KLMN$, если $QN : LP = 5$.

1130. В плоскости даны квадрат с последовательно расположенными вершинами A, B, C, D и точка O . Известно, что $OB = OD = 13$, $OC = 5\sqrt{2}$ и что площадь квадрата больше 225. Найдите сторону квадрата и выясните, где расположена точка O — вне или внутри квадрата.

1131°. Из произвольной точки M , лежащей внутри правильного треугольника ABC , опущены перпендикуляры MC_1, MA_1, MB_1 на стороны AB, BC и CA соответственно. Докажите, что

$$\begin{aligned} AC_1 + BA_1 + CB_1 &= \\ &= C_1B + A_1C + B_1A. \end{aligned}$$

1132. В квадрат, площадь которого равна 18, вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Стороны прямоугольника относятся как 1 : 2. Найдите площадь прямоугольника.

1133. В окружности пересекающиеся хорды AB и CD перпендикулярны, $AD = m$, $BC = n$. Найдите диаметр окружности.

1134. Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность радиуса R , $LM = n$, диагонали KM и LN перпендикулярны. Найдите KN .

1135. Две окружности, радиусы которых относятся как $9 : 4\sqrt{3}$, касаются друг друга внутренним образом (рис. 45). Проведены две равные хорды большей окружности, касающиеся меньшей окружности. Одна из этих хорд перпендикулярна отрезку, соединяющему центры окружностей, а другая нет. Найдите угол между этими хордами.

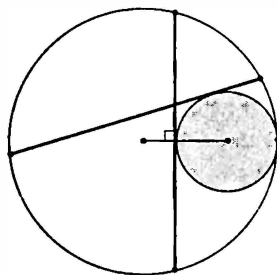


Рис. 45

1136. Две окружности, радиусы которых относятся как $5 : 2\sqrt{2}$, касаются друг друга внутренним образом. Проведены две равные хорды окружности, касающиеся меньшей окружности. Одна из этих хорд перпендикулярна отрезку, соединяющему центры окружностей, а другая нет. Найдите угол между этими хордами.

1137. Вокруг четырехугольника $ABCD$ с взаимно перпендикулярными

диагоналями AC и BD описана окружность радиуса 2. Найдите сторону CD , если $AB = 3$.

1138°. Четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность с центром O . Найдите расстояние от точки O до стороны AB , если известно, что $CD = 8$.

1139. В четырехугольнике $ABCD$ расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон AB , BC и CD , а другая — сторон AB , AD и CD . Прямая MN пересекает стороны AB и CD соответственно в точках M и N и касается обеих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если периметр четырехугольника $MBCN$ равен $2p$, $BC = a$ и разность радиусов окружностей равна r .

1140°. Через точку A окружности радиуса 10 проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и AC . Вычислите радиус окружности, касающейся данной окружности и построенных хорд, если $AB = 16$.

1141. В равнобедренную трапецию, длины оснований которой равны a и b ($a > b$), можно вписать окружность. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной около этой трапеции окружностей.

1142°. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Найдите углы трапеции.

1143°. Из точки K , расположенной вне окружности с центром в точке O , проведены к этой окружности две касательные MK и NK (M и N — точки касания). На хорде MN взята точка C ($MC < CN$). Через точку C перпендикулярно отрезку OC проведена прямая, пересекающая отрезок NK в точке B . Известно, что радиус окружности ра-

вен R , $\angle MKN = \alpha$, $MC = b$. Найдите CB .

1144. Докажите, что прямые AB и KM перпендикулярны тогда и только тогда, когда $AK^2 - BK^2 = AM^2 - BM^2$.

1145. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противоположных сторон равны.

1146°. Вершины прямоугольника, не являющегося квадратом, расположены по одной на каждой стороне некоторого квадрата. Докажите, что стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата.

1147. Гипотенуза KM прямоугольного треугольника KMP является хордой окружности радиуса $\sqrt{7}$. Вершина P находится на диаметре, который параллелен гипотенузе. Расстояние от центра окружности до гипотенузы равно $\sqrt{3}$. Найдите острые углы треугольника KMP .

1148°. В остроугольном треугольнике ABC проведены биссектриса AL и медиана CM . Точки K и N являются ортогональными проекциями на сторону AC точек L и M соответственно, причем $AK : KC = 4 : 1$, $AN : NC = 3 : 7$. Найдите отношение $AL : CM$.

1149°. В трапеции $KLMN$ длина основания LM равна 17, а угол LKN острый и вдвое больше угла KNM . Окружность с центром на прямой LM касается прямых KM , KN и отрезка MN . Найдите периметр трапеции $KLMN$, если известно, что радиус окружности равен 15.

1150. В круге проведены два диаметра AB и CD , M — некоторая точка. Известно, что $AM = 15$, $BM = 20$, $CM = 24$. Найдите DM .

1151. К двум непересекающимся окружностям проведены общие касательные прямые. Угол между внешними касательными равен α , а угол между внутренними касательными

равен β . Найдите угол между прямыми, проведенными из центра окружности большего радиуса и касающимися второй окружности.

1152. Две окружности касаются друг друга внешним образом. Четыре точки A, B, C и D касания их общих внешних касательных последовательно соединены. Докажите, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, и найдите ее радиус, если радиусы данных окружностей равны R и r .

1153. Найдите отношение сторон прямоугольного треугольника, если известно, что одна половина гипотенузы (от вершины до середины гипотенузы) видна из центра вписанной окружности под прямым углом.

1154. Хорда окружности удалена от центра на расстояние h . В каждый из сегментов, стягиваемых хордой, вписан квадрат так, что две соседние вершины квадрата лежат на дуге, две другие — на хорде. Чему равна разность сторон квадратов?

1155. Три окружности радиусов 1, 2 и 3 касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей.

1156°. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен $\sqrt{3} - 1$. Угол BAC этого треугольника равен 60° , а радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC , равен $\sqrt{3} + 1$. Найдите углы ABC и ACB данного треугольника.

1157. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Найдите его площадь, если радиус описанной окружности равен R и $AB = 2BC$.

1158. На отрезке AC дана точка B , причем $AB = 14$, $BC = 28$. На отрезках AB , BC , AC как на диаметрах постро-

ены полуокружности в одной плоскости относительно прямой AB . Найдите радиус окружности, касающейся всех трех полуокружностей.

1159. Точка K лежит на стороне BC треугольника ABC . Докажите, что соотношение $AK^2 = AB \cdot AC - KB \cdot KC$ выполнено тогда и только тогда, когда $AB = AC$ или $\angle BAK = \angle CAK$.

1160. В прямоугольном секторе AOB проведена хорда AB и в образовавшийся сегмент вписан квадрат. Найдите отношение стороны квадрата к радиусу окружности, которая касается хорды AB , дуги AB и стороны квадрата, перпендикулярной хорде AB .

1161°. Диагональ BD трапеции $ABCD$ равна m , а боковая сторона AD равна n . Найдите основание CD , если известно, что основание, диагональ и боковая сторона трапеции, выходящие из вершины C , равны между собой.

1162. Две окружности радиусов R и r касаются внешне в точке A . На окружности радиуса r взята точка B , диаметрально противоположная точке A , и в этой точке построена касательная l (рис. 46). Найдите радиус окружности, касающейся внешним образом двух данных окружностей и прямой l .

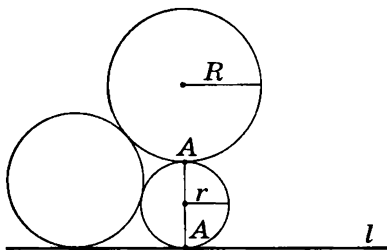


Рис. 46

1163°. На биссектрисе угла с вершиной L взята точка A . Точки K и M — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на стороны угла. На отрезке KM взята точка P ($KP < PM$) и через точку P перпендикулярно отрезку AP проведена прямая, пересекаю-

щая прямую KL в точке Q (K между Q и L), а прямую ML — в точке S . Известно, что $\angle KLM = \alpha$, $KM = a$, $QS = b$. Найдите KQ .

1164. В прямоугольнике $ABCD$, где $AB = 6$, $AD = 3\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, расположены две окружности. Окружность радиуса 2 с центром в точке K касается сторон AB и AD . Окружность радиуса 1 с центром в точке L касается стороны CD и первой окружности. Найдите площадь треугольника CLM , если M — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую, проходящую через точки K и L .

1165. В треугольнике KMN проведены высота NA , биссектриса NB и медиана NC , которые делят угол KNM на четыре равные части. Найдите высоту NA , биссектрису NB и медиану NC , если радиус описанной около треугольника KMN окружности равен R .

1166. Две окружности радиусов r и R с центрами в точках O_1 и O внешне касаются в точке K . В точке A окружности радиуса R проведена касательная, пересекающая окружность радиуса r в точках B и C . Известно, что $BC : AB = p$ и отрезок AC пересекает отрезок O_1K . Определите:

а) при каких условиях на r , R и p возможна такая геометрическая конфигурация;

б) отрезок BC .

1167. В прямоугольном треугольнике ABC катет $AB = 3$, $AC = 6$. Центры окружностей радиусов 1, 2 и 3 находятся соответственно в точках A , B и C . Найдите радиус окружности, касающейся каждой из трех данных окружностей внешним образом.

1168. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. На всех его сторонах как на диаметрах построены полуокружности, лежащие вне треугольника. Найдите радиус окружности, касающейся построенных полуокружностей.

1169. Углы при основании AD трапеции $ABCD$ равны 2α и 2β . Докажите, что трапеция описанная тогда и только тогда, когда $\frac{BC}{AD} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$.

1170. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 3$ и $BC = 4$. Через точку C проведена прямая, лежащая вне треугольника и образующая с катетами углы, равные 45° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A , B и касающейся этой прямой.

1171. Точка C расположена на отрезке AB . По одну сторону от прямой AB на отрезках AB , AC и BC построены как на диаметрах полуокружности S , S_1 и S_2 . Через точку C проведена прямая CD , перпендикулярная AB (D — точка на полуокружности S). Окружность K_1 касается отрезка CD и полуокружностей S и S_1 , а окружность K_2 — отрезка CD и полуокружностей S и S_2 . Докажите, что окружности K_1 и K_2 равны.

1172. На отрезке AC взята точка B , и на отрезках AB , BC и CA построены полуокружности S_1 , S_2 и S_3 по одну сторону от AC . D — точка на S_3 , проекция которой на AC совпадает с точкой B . Общая касательная к S_1 и S_2 касается этих полуокружностей в точках F и E соответственно.

а) Докажите, что прямая EF параллельна касательной к S_3 , проведенной через точку D .

б) Докажите, что $BFDE$ — прямоугольник.

1173. В прямоугольном секторе AOB из точки B как из центра проведена дуга OC (C — точка пересечения этой дуги с дугой AB) радиуса BO . Окружность S_1 касается дуги AB , дуги OC и прямой OA , а окружность S_2 касается дуги OC , прямой OA и окружности S_1 . Найдите отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2 .

1174. В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны AB , пересекает прямую AC в точке M , а перпендикуляр, проходящий через середину стороны AC , пересекает прямую AB в точке N . Известно, что $MN = BC$ и прямая MN перпендикулярна прямой BC . Найдите углы треугольника ABC .

1175. В треугольнике ABC проведены высота AH , равная h , медиана AM , равная m , и биссектриса AN . Точка N — середина отрезка MH . Найдите расстояние от вершины A до точки пересечения высот треугольника ABC .

1176°. Даны две окружности с центрами O_1 и O_2 . Докажите, что геометрическим местом точек M , для которых касательные к данным окружностям равны, есть прямая, перпендикулярная O_1O_2 , или часть такой прямой. В каких случаях искомым геометрическим местом является вся прямая?

1177. Трапеция $AEFG$ ($EF \parallel AG$) расположена в квадрате $ABCD$ со стороной 14 так, что точки E , F и G лежат на сторонах AB , BC и CD соответственно. Диагонали AF и EG перпендикулярны, $EG = 10\sqrt{2}$. Найдите периметр трапеции.

1178. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) на диагонали BD расположена точка K так, что $BK : KD = 1 : 2$. Найдите углы треугольника AKC , если $AC = AD - 2BC$, $\angle CAD = \alpha$.

7. ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

1179°. Докажите, что отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

1180. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит треугольник на два подобных треугольника.

1181°. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB = 420$. На стороне BC взята точка E так, что $BE : BC = 5 : 7$, и проведена прямая DE , пересекающая продолжение AB в точке F . Найдите BF .

1182. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ и AB втрое больше A_1B_1 . Найдите медиану A_1M_1 треугольника $A_1B_1C_1$, если медиана AM треугольника ABC равна 12.

1183. Хорды AB и CD пересекаются в точке M , лежащей внутри круга. Докажите, что треугольники AMD и CMD подобны.

1184. Боковая сторона треугольника разделена на пять равных частей; из точек деления проведены прямые, параллельные основанию. Основание равно 20. Найдите отрезки параллельных прямых, заключенные между боковыми сторонами.

1185. Боковые стороны треугольника разделены на 7 равных частей; соответствующие точки деления соединены отрезками. Найдите длины этих отрезков, если основание равно 28.

1186. Пусть M — середина стороны BC параллелограмма $ABCD$. В каком отношении отрезок AM делит диагональ BD ?

1187. В треугольнике ABC угол BAC — прямой, стороны AB и BC равны соответственно 1 и 3. Точка K делит сторону AC в отношении 7 : 1, считая от точки A . Что больше: AC или BK ?

1188. Через точку O пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию. Найдите отрезок этой прямой между боковыми сторонами трапеции, если средняя линия трапеции равна $\frac{4}{3}$, а точка O делит диагональ трапеции на части, отношение которых равно 1 : 3.

1189. Основания трапеции равны 1,8 и 1,2; боковые стороны ее длиной

1,5 и 1,2 продолжены до взаимного пересечения. На сколько продолжены боковые стороны?

1190. Дан треугольник ABC . На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $CN = AC$; точка K — середина стороны AB (рис. 47). В каком отношении прямая KN делит сторону BC ?

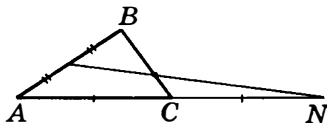


Рис. 47

1191. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E . Найдите стороны треугольника AED , если $AB = 3$, $BC = 10$, $CD = 4$, $AD = 12$.

1192°. Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника, проходит через вершину противоположного острого угла и имеет центр на гипотенузе треугольника. Найдите радиус окружности, если катеты равны 5 и 12.

1193. В равнобедренном треугольнике высота равна 20, а основание относится к боковой стороне, как 4 : 3. Найдите радиус вписанного круга.

1194. В равнобедренном треугольнике центр вписанного круга делит высоту в отношении 12 : 5, а боковая сторона равна 60. Найдите основание.

1195. В равнобедренном треугольнике радиус вписанного круга составляет $\frac{2}{7}$ высоты, а периметр этого треугольника равен 56. Найдите его стороны.

1196. Хорда $AB = 15$, хорда $AC = 21$ и хорда $BC = 24$. Точка D — середина дуги CB . На какие части BE и EC делится хорда BC прямой AD ?

1197. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . Найдите AC , если:

а) $AA_1 = 4$, $BB_1 = 5$, $BC = 6$;

б) $A_1C = 8$, $B_1C = 5$, $BB_1 = 12$.

1198°. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 1. Точка K принадлежит стороне CD и $CK : KD = 1 : 2$. Найдите расстояние от вершины C до прямой AK .

1199. Окружность касается одного из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника и проходит через вершину противоположного острого угла. Найдите радиус окружности, если ее центр лежит на гипотенузе треугольника, а катет треугольника равен a .

1200. Боковая сторона трапеции разделена на пять равных частей, и через третью точку деления (считая от вершины меньшего основания) проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите отрезок прямой, заключенный между сторонами трапеции, если основания трапеции равны a и b ($a > b$).

1201. В треугольнике ABC с данными сторонами a , b и c проведена параллельно AC прямая MN так, что $AM = BN$. Найдите MN .

1202. В треугольник ABC вписан ромб $ADEF$ так, что угол A у них общий, а вершина E находится на стороне BC . Найдите сторону ромба, если $AB = c$ и $AC = b$.

1203. Прямая, проведенная через вершину ромба вне его, отсекает на продолжении двух сторон отрезки p и q . Найдите сторону ромба.

1204°. В треугольник с основанием a и высотой h вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах. Найдите сторону квадрата.

1205. В треугольник, основание которого равно 48, а высота 16, вписан

прямоугольник с отношением сторон $5 : 9$, причем большая сторона лежит на основании треугольника. Найдите стороны прямоугольника.

1206. В треугольник, у которого основание равно 30 , а высота равна 10 , вписан прямоугольный равнобедренный треугольник так, что его гипотенуза параллельна основанию данного треугольника, а вершина прямого угла лежит на этом основании. Найдите гипотенузу.

1207. ABC — данный треугольник; CD — биссектриса угла C ; точка E лежит на BC , причем $DE \parallel AC$. Найдите DE , если $BC = a$ и $AC = b$.

1208. $ABCD$ — данный параллелограмм. Через точку пересечения его диагоналей проведена перпендикулярная к BC прямая, которая пересекает BC в точке E , а продолжение AB — в точке F . Найдите BE , если $AB = a$, $BC = b$ и $BF = c$.

1209°. В треугольник вписан ромб так, что один угол у них общий, а противоположная вершина делит сторону треугольника в отношении $2 : 3$. Диагонали ромба равны m и n . Найдите стороны треугольника, содержащие стороны ромба.

1210. В равнобедренный треугольник ABC вписан ромб $DECF$ так, что вершина E лежит на отрезке BC , вершина F лежит на отрезке AC и вершина D лежит на отрезке AB . Найдите сторону ромба, если $AB = BC = 12$, $AC = 6$.

1211. Найдите биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника, катеты которого равны 6 и 8 .

1212. Две окружности касаются внешним образом. Прямая, проведенная через точку касания, образует в окружностях хорды, из которых одна равна $\frac{13}{5}$ другой. Найдите радиусы, если расстояние между центрами равно 36 .

1213. В треугольник вписан полукруг, у которого полуокружность касается основания, а диаметр (с концами на боковых сторонах треугольника) параллелен основанию (рис. 48). Найдите радиус, если основание треугольника равно a , а высота h .

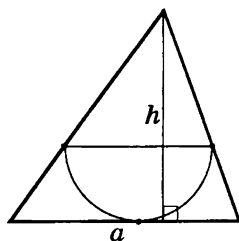


Рис. 48

1214. В равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна 100 , а основание 60 , вписан круг. Найдите расстояние между точками касания, находящимися на боковых сторонах.

1215. В равнобедренном треугольнике ABC сторона $AC = b$, сторона $BA = BC = a$; AN и CM — биссектрисы углов A и C . Найдите MN .

1216. В треугольнике ABC известно, что $AB = 15$, $BC = 12$, $AC = 18$. В каком отношении центр вписанной окружности треугольника делит биссектрису угла C ?

1217. В треугольнике ABC стороны $AB = 15$ и $AC = 10$; AD — биссектриса угла A . Из точки D проведена прямая, параллельная AB , до пересечения с AC в точке E . Найдите AE , EC и DE .

1218. В треугольнике ABC проведена прямая BD так, что $\angle ABD = \angle BCA$. Найдите отрезки AD и DC , если $AB = 2$ и $AC = 4$.

1219. В треугольник вписан ромб со стороной m так, что один угол у них общий, а противоположная вершина ромба лежит на стороне треугольника и делит эту сторону на отрезки длиной p и q . Найдите стороны треугольника.

1220. На каждой стороне ромба находится по одной вершине квадрата, стороны которого параллельны диагоналям ромба. Найдите сторону квадрата, если диагонали ромба равны 8 и 12.

1221. С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на n равных частей.

1222°. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 и высотой 8, проведена касательная, параллельная основанию. Найдите длину отрезка этой касательной, заключенного между сторонами треугольника.

1223. В угол вписаны три окружности — малая, средняя и большая. Большая окружность проходит через центр средней, а средняя — через центр малой. Вычислите радиусы средней и большой окружности, если радиус малой равен r и расстояние от ее центра до вершины угла равно a .

1224. Две окружности радиуса r касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиуса R в точках A и B соответственно. Найдите радиус r , если $AB = 12$, $R = 8$.

1225. Две окружности радиуса r касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается изнутри третьей окружности радиуса R в точках A и B соответственно. Найдите радиус R , если $AB = 11$, $r = 5$.

1226°. Радиус сектора равен r , а хорда его дуги равна a . Найдите радиус круга, вписанного в этот сектор.

1227°. В прямоугольном треугольнике ABC длина катета AB равна 21, а длина катета BC равна 28. Окружность, центр O которой лежит на гипотенузе AC , касается обоих катетов. Найдите радиус окружности.

1228°. Через вершину C параллелограмма $ABCD$ проведена произвольная прямая, пересекающая продолжения сторон AB и AD в точках K и M со-

ответственно. Докажите, что произведение $BK \cdot DM$ не зависит от того, как проведена эта прямая.

1229°. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$, в которой $\angle C = \angle B = 90^\circ$. На стороне AD как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону BC в точках M и N . Докажите, что $BM \cdot MC = AB \cdot CD$.

1230. Каждая из боковых сторон трапеции разделена на 5 равных частей. Пусть M и N — вторые точки деления на боковых сторонах, считая от вершин меньшего основания. Найдите MN , если основания трапеции равны a и b ($a > b$).

1231. В параллелограмм вписан ромб так, что его стороны параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите сторону ромба, если диагонали параллелограмма равны l и m .

1232°. Точки K и M лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC , причем $AK : BK = 3 : 2$, $BM : MC = 3 : 1$. Через точку B проведена прямая l , параллельная AC . Прямая KM пересекает прямую l в точке P , а прямую AC — в точке N . Найдите BP и CN , если $AC = a$.

1233. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки M и N так, что $MN \parallel BC$. На отрезке MN взята точка P так, что $MP = \frac{1}{3} MN$. Прямая AP пересекает сторону BC в точке Q . Докажите, что $BQ = \frac{1}{3} BC$.

1234°. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ разделена на n равных частей. Первая точка деления P соединена с вершиной B . Докажите, что прямая BP отсекает на диагонали AC часть AQ , которая равна $\frac{1}{n+1}$ всей диагонали.

1235. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Докажите, что $AO \cdot BO = CO \cdot DO$ тогда и только тогда, когда $BC \parallel AD$.

1236. Дан равнобедренный треугольник с основанием 12 и боковой стороной 18. Отрезки какой длины нужно отложить от вершины треугольника на его боковых сторонах, чтобы, соединив их концы, получить трапецию с периметром, равным 40?

1237. В равнобедренной трапеции $ABCD$ дано: $AB = CD = 3$, основание $AD = 7$, $\angle BAD$ равен 60° . На диагонали BD расположена точка M так, что $BM : MD = 3 : 5$. Какую из сторон трапеции, BC или CD , пересекает продолжение отрезка AM ?

1238. На сторонах AD и DC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки N и M так, что $AN : AD = 1 : 3$, $DM : DC = 1 : 4$. Отрезки BM и CN пересекаются в точке O (рис. 49). Найдите отношение $OM : OB$.

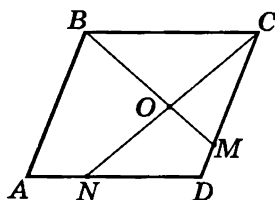


Рис. 49

1239. Точка на гипотенузе, равноудаленная от обоих катетов, делит гипотенузу на отрезки длиной 30 и 40. Найдите катеты треугольника.

1240. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O . Найдите периметр трапеции, если $BO = \frac{7}{8}$, $OD = \frac{25}{8}$, $\angle ABD = 90^\circ$.

1241. В равнобедренном треугольнике ABC основание AB является диаметром окружности, которая пересекает боковые стороны AC и CB в точках D и E соответственно. Найдите периметр треугольника ABC , если $AD = 2$, $AE = \frac{8}{3}$.

1242. В прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 и 8, вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите сторону квадрата.

1243. Окружность, центр которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC , касается двух катетов AC и BC соответственно в точках E и D . Найдите угол ABC , если известно, что $AE = 1$, $BD = 3$.

1244. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD прямого угла ACB ; DM и DN являются соответственно высотами треугольников ADC и BDC . Найдите AC , если известно, что $AM = 4$, $BN = 9$.

1245. В параллелограмме $ABCD$ точки E и F лежат соответственно на сторонах AB и BC , M — точка пересечения прямых AF и DE , причем $AE = 2BE$, а $BF = 3CF$. Найдите отношение $AM : MF$.

1246. Диагональ AC вписанного четырехугольника $ABCD$ является биссектрисой угла DAB . Докажите, что один из двух треугольников, отсекаемых от треугольника ABC диагональю BD , подобен треугольнику ABC .

1247. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 20, а диаметр описанной окружности равен 25. Найдите радиус вписанной окружности.

1248. В параллелограмме $ABCD$ точки E и F лежат соответственно на сторонах AB и BC , M — точка пересечения прямых AF и DE , причем $AE = 2BE$, $BF = 3CF$. Найдите отношение $AM : MF$.

1249. В круге проведены две хорды AB и CD , пересекающиеся в точке M ; K — точка пересечения биссектрисы угла BMD с хордой BD . Найдите отрезки BK и KD , если $BD = 3$, а площади треугольников CMB и AMD относятся как $1 : 4$.

1250. Две окружности радиусов R и r касаются сторон данного угла и друг

друга. Найдите радиус третьей окружности, касающейся сторон того же угла, центр которой находится в точке касания окружностей между собой.

1251. В равнобедренный треугольник ABC вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании BC , а две другие — на боковых сторонах треугольника. Сторона квадрата относится к радиусу круга, вписанного в треугольник, как $8 : 5$. Найдите углы треугольника.

1252. В прямоугольный треугольник ABC вписан квадрат $AEKM$ так, что точка K лежит на гипотенузе, а E и M — на катетах. Сторона этого квадрата относится к радиусу круга, вписанного в треугольник ABC , как $(2 + \sqrt{2}) : 2$. Найдите углы треугольника.

1253. Большее основание AD трапеции $ABCD$ равно a , меньшее — $BC = b$. Диагональ AC разделена на три равные части и через ближайшую к A точку деления M проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите отрезок этой прямой, заключенный между диагоналями.

1254. На диагоналях AC и BD трапеции $ABCD$ взяты соответственно точки M и N так, что $AM : MC = DN : NB = 1 : 4$. Найдите MN , если основания $AD = a$, $BC = b$ ($a > b$).

1255. Точки M и N находятся на сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$, причем $AM : MB = 1 : 2$, $AN : ND = 3 : 2$. Отрезки DM и CN пересекаются в точке K . Найдите отношения $DK : KM$ и $CK : KN$.

1256°. На медиане AA_1 треугольника ABC взята точка M так, что $AM : MA_1 = 1 : 3$. В каком отношении прямая BM делит сторону AC ?

1257°. Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключенный внутри трапеции, разбивается ее диагоналями на три части. Докажите, что отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны между собой.

1258. Точки M и K лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC соответственно, отрезки AK и CM пересекаются в точке P . Известно, что каждый из отрезков AK и CM делится точкой P в отношении $2 : 1$, считая от вершин. Докажите, что AK и CM — медианы треугольника.

1259. На стороны BC и CD параллелограмма $ABCD$ (или на их продолжения) опущены перпендикуляры AM и AN . Докажите, что треугольник MAN подобен треугольнику ABC .

1260. В трапеции точка пересечения диагоналей равноудалена от прямых, на которых лежат боковые стороны. Докажите, что трапеция равнобедренная.

1261. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на стороне BC взята точка D так, что $BD : DC = 1 : 4$. В каком отношении прямая AD делит высоту BE треугольника ABC , считая от вершины B ?

1262. В равнобедренной трапеции $ABCD$ большее основание $AD = 12$, $AB = 6$ (рис. 50). Найдите расстояние от точки O пересечения диагоналей до точки K пересечения продолжений боковых сторон, если продолжения боковых сторон пересекаются под прямым углом.

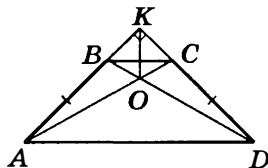


Рис. 50

1263. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ взята точка K . Прямая AK пересекает прямые BC и CD в точках L и M . Докажите, что

$$AK^2 = LK \cdot KM.$$

1264. Найдите радиусы двух равных окружностей, касающихся друг

друга внешним образом, при этом одна из них касается двух катетов прямоугольного треугольника, а другая — меньшего катета и гипотенузы, если один из острых углов треугольника равен 30° , а противолежащий катет равен 1.

1265. Высота BK ромба $ABCD$, опущенная на сторону AD , пересекает диагональ AC в точке M . Найдите MD , если известно, что $BK = 4$, $AK : KD = 1 : 2$.

1266. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна b . Расстояние между основаниями биссектрис треугольника, проведенных к боковым сторонам, равно m . Найдите основание треугольника.

1267. На стороне AB треугольника ABC взята точка K , а на стороне BC — точки M и N так, что $AB = 4AK$, $CM = BN$, $MN = 2BN$. Найдите отношения $AO : ON$ и $KO : OM$, где O — точка пересечения прямых AN и KM .

1268. В треугольнике ABC проведена биссектриса BE , которую центр O вписанной окружности делит в отношении $BO : OE = 2$. Найдите сторону AB , если $AC = 7$, $BC = 8$.

1269. Биссектриса угла N треугольника MNP делит сторону MP на отрезки, равные 28 и 12. Найдите периметр треугольника MNP , если известно, что $MN - NP = 18$.

1270. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 3$, $BC = 4$ и $AC = 5$ проведена биссектриса BD . В треугольники ABD и BCD вписаны окружности, которые касаются BD в точках M и N соответственно. Найдите MN .

1271. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC длина боковой стороны AB равна 2. Биссектриса угла BAD пересекает прямую BC в точке E . В треугольник ABE вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE в точке H ; $MH = 1$. Найдите угол BAD .

1272. На стороне CB треугольника ABC взята точка M , а на стороне CA —

точка P . Известно, что $\frac{CP}{CA} = 2\frac{CM}{CB}$.

Через точку M проведена прямая, параллельная CA , а через P — прямая, параллельная AB . Докажите, что построенные прямые пересекаются на медиане, выходящей из вершины C .

1273. Две окружности пересекаются в точках A и B . В каждой из этих окружностей проведены хорды AC и AD так, что хорда одной окружности касается другой окружности. Найдите AB , если $CB = a$, $DB = b$.

1274. Докажите, что биссектриса треугольника делит основание на отрезки, пропорциональные боковым сторонам.

1275. Дан треугольник ABC . На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $CN = \frac{2}{3}AC$. Точка

K находится на стороне AB , причем $AK : KB = 3 : 2$. В каком отношении прямая KN делит сторону BC ?

1276. Дан треугольник ABC . На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $AC = 2CN$. Точка M находится на стороне BC , причем $BM : MC = 1 : 3$. В каком отношении прямая MN делит сторону AB ?

1277. Точки K и M расположены на сторонах AB и BC треугольника ABC , причем $BK : KA = 1 : 4$, $BM : MC = 3 : 2$. Прямая MK пересекает прямую AC в точке N . Найдите отношение $AC : CN$.

1278. AA_1 — медиана треугольника ABC . Точка C_1 лежит на стороне AB , причем $AC_1 : C_1B = 1 : 2$. Отрезки AA_1 и CC_1 пересекаются в точке M . Найдите отношения $AM : MA_1$ и $CM : MC_1$.

1279. В треугольнике ABC точка K на стороне AB и точка M на стороне AC расположены так, что $AK : KB = 3 : 2$, а $AM : MC = 4 : 5$. Найдите отношение, в котором прямая, проходящая через точку K параллельно стороне BC , делит отрезок BM .

1280. В треугольнике ABC точка M лежит на стороне AC , а точка L на стороне BC расположена так, что $BL : LC = 2 : 5$. Прямая, проходящая через точку L параллельно стороне AB , пересекает отрезок BM в точке O , причем $BO : OM = 7 : 4$. Найдите отношение, в котором точка M делит сторону AC .

1281. Точки A_1 и B_1 делят стороны BC и AC треугольника ABC в отношениях: $BA_1 : A_1C = 1 : p$ и $AB_1 : B_1C = 1 : q$. В каком отношении отрезок AA_1 делится отрезком BB_1 ?

1282. Высота BL ромба $ABCD$, опущенная на сторону AD , пересекает диагональ AC в точке E . Найдите AE , если известно, что $BL = 8, AL : LD = 3 : 2$.

1283. В треугольнике ABC биссектриса AP угла A делится центром O вписанной окружности в отношении $AO : OP = \sqrt{3} : 2 \sin \frac{5\pi}{18}$. Найдите углы B и C , если известно, что угол A равен $\frac{5\pi}{9}$.

1284. Дана трапеция $ABCD$, причем $BC = a, AD = b$ (рис. 51). Параллельно основаниям трапеции BC и AD проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке P , диагональ AC в точке L , диагональ BD в точке R и сторону CD в точке Q . Известно, что $PL = LR$. Найдите PQ .

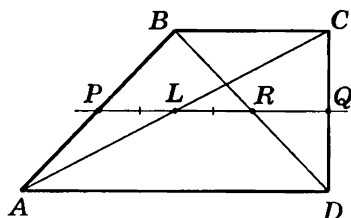


Рис. 51

1285. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точки касания делят каждую боковую сторону на отрезки длиной m и n , считая от вер-

шины. К окружности проведены три касательные, параллельные каждой из сторон треугольника. Найдите отрезки касательных, заключенных между сторонами треугольника.

1286. AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC . Докажите, что:

а) треугольник AA_1C подобен треугольнику BB_1C ;

б) треугольник ABC подобен треугольнику A_1B_1C .

1287. Медианы AM и BE треугольника ABC пересекаются в точке O . Точки O, M, E, C лежат на одной окружности. Найдите AB , если $BE = AM = 3$.

1288. В треугольнике ABC сторона BC равна a , радиус вписанной окружности равен r . Определите радиусы двух равных окружностей, касающихся друг друга, если одна из них касается сторон BC и BA , а другая — BC и CA .

1289. Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность. Расстояния от концов гипотенузы AB до прямой, касающейся окружности в точке C , равны m и n соответственно. Найдите катеты AC и BC .

1290. Окружность радиуса 1 касается окружности радиуса 3 в точке C . Прямая, проходящая через точку C , пересекает окружность меньшего радиуса в точке A , а большего радиуса — в точке B . Найдите AC , если $AB = 2\sqrt{5}$.

1291. Из вершины C остроугольного треугольника ABC опущена высота CH , а из точки H опущены перпендикуляры HM и HN на стороны BC и AC соответственно. Докажите, что треугольники MNC и ABC подобны.

1292. На стороне BC треугольника ABC взята точка D так, что $BD : AB = DC : AC$. Докажите, что AD — биссектриса треугольника ABC .

1293. Диагональ AC трапеции $ABCD$ делит ее на два подобных тре-

угольника. Докажите, что $AC^2 = ab$, где a и b — основания трапеции.

1294. (Замечательное свойство трапеции.) Докажите, что точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции, середины оснований и точка пересечения диагоналей лежат на одной прямой.

1295. Точки A_1 и C_1 находятся на сторонах BC и AB треугольника ABC . Отрезки AA_1 и CC_1 пересекаются в точке M . В каком отношении прямая BM делит сторону AC , если $AC_1 : C_1B = 2 : 3$ и $BA_1 : A_1C = 1 : 2$?

1296. В треугольнике ABC на основании AC взяты точки P и Q так, что $AP < AQ$. Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что $PQ = 3$. Найдите AC .

1297. Точки A , B и C лежат на одной прямой, а точки A_1 , B_1 и C_1 — на другой. Докажите, что если $AB_1 \parallel BA_1$ и $AC_1 \parallel CA_1$, то $BC_1 \parallel CB_1$.

1298. Точки D и E делят стороны AC и AB правильного треугольника ABC в отношениях $AD : DC = BE : EA = 1 : 2$. Прямые BD и CE пересекаются в точке O . Докажите, что угол AOC — прямой.

1299. Через точку, взятую внутри произвольного треугольника, параллельно его сторонам проведены отрезки с концами на сторонах треугольника. Докажите, что сумма трех отношений длин этих отрезков к длинам параллельных им сторон треугольника равна 2.

1300. Медиана BK и биссектриса CL треугольника ABC пересекаются в точке P . Докажите равенство

$$\frac{PC}{PL} - \frac{AC}{BC} = 1.$$

1301. В треугольнике ABC проведены три высоты: AH , BK и CL . Докажите равенства:

$$AK \cdot BL \cdot CH = AL \cdot BH \cdot CK = HK \cdot KL \cdot LH.$$

1302. Точки K и N расположены соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC , причем $AK = BK$ и $AN = 2NC$. В каком отношении отрезок KN делит медиану AM треугольника ABC ?

1303. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию и пересекающая боковые стороны в точках E и F . Отрезок EF равен 2. Найдите основания, если их отношение равно 4.

1304°. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке E . Вокруг треугольника ECB описана окружность, а касательная к этой окружности, проведенная в точке E , пересекает прямую AD в точке F таким образом, что точки A , D и F лежат последовательно на этой прямой. Известно, что $AF = a$, $AD = b$. Найдите EF .

1305. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P . Отрезок, соединяющий вершину C с точкой M , являющейся серединой отрезка AD , равен $\frac{5}{4}$. Расстояние от точки P до отрезка

BC равно $\frac{1}{2}$ и $AP = 1$. Найдите AD ,

если известно, что вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

1306. Около окружности радиуса 1 описаны ромб и треугольник, две стороны которого параллельны диагоналям ромба, а третья параллельна одной из сторон ромба и равна 5. Найдите сторону ромба.

1307. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом при вершине A . На лучах AB и CB отмечены точки H и K соответственно так, что $CH = BC$ и $AK = AB$.

а) Докажите, что $DH = DK$.

б) Докажите, что треугольники DKN и ABK подобны.

1308. Прямоугольный треугольник ABC разделен высотой CD , проведенной к гипотенузе, на два треугольника BCD и ACD . Радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, равны 4 и 3 соответственно. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

1309. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена высота CD . На отрезках CD и DA взяты точки E и F так, что $CE : CD = AF : AD$ (рис. 52). Докажите, что прямые BE и CF перпендикулярны.

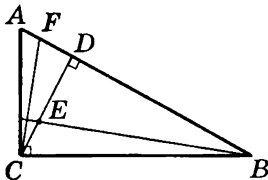


Рис. 52

1310. Точка M , лежащая вне круга с диаметром AB , соединена с точками A и B . Отрезки MA и MB пересекают окружность в точках C и D соответственно. Площадь круга, вписанного в треугольник AMB , в четыре раза больше, чем площадь круга, вписанного в треугольник CMD . Найдите углы треугольника AMB , если известно, что один из них в два раза больше другого.

1311. Постройте прямую, параллельную основаниям трапеции, так, чтобы отрезок этой прямой внутри трапеции делился диагоналями на три равные части.

1312. Основание равнобедренного треугольника равно 12, а боковая сторона равна 18. К боковым сторонам треугольника проведены высоты. Найдите длину отрезка, концы которого совпадают с основанием высот.

1313. В прямоугольной трапеции отношение диагоналей равно 2, а отношение оснований равно 4. Найдите углы трапеции.

1314. В равнобедренном треугольнике ABC точки D и E делят боковые стороны в отношении $BD : DA = BE : EC = n$. Найдите углы треугольника, если AE перпендикулярна CD .

1315. Непараллельные стороны трапеции продолжены до взаимного пересечения и через полученную точку проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите длину отрезка этой прямой, ограниченного продолжениями диагоналей, если длины оснований трапеции равны a и b .

1316. В точках A и B прямой, по одну сторону от нее, восстановлены два перпендикуляра $AA_1 = a$ и $BB_1 = b$. Докажите, что точка пересечения прямых AB_1 и A_1B будет находиться на одном и том же расстоянии от прямой AB независимо от положения точек A и B .

1317. В треугольнике ABC высота BD равна 6, медиана CE равна 5, расстояние от точки пересечения отрезков BD и CE до стороны AC равно 1. Найдите сторону AB .

1318. В треугольнике ABC сторона AC равна b , сторона AB равна c , а биссектриса внутреннего угла A пересекается со стороной BC в точке D такой, что $DA = DB$. Найдите сторону BC .

1319. Через точку P медианы CC_1 треугольника ABC проведены прямые AA_1 и BB_1 (точки A_1 и B_1 лежат на сторонах BC и CA). Докажите, что $A_1B_1 \parallel AB$.

1320. Основания трапеции равны a и b ($a > b$). Прямые, соединяющие середину большего основания с концами меньшего основания, пересекают диагонали трапеции в точках M и N . Найдите отрезок MN .

1321. Через точку D , взятую на стороне AB треугольника ABC , проведена прямая, параллельная AC и пересекающая сторону BC в точке E . Докажите, что AE , CD и медиана, проведенная через вершину B , пересекаются в одной точке.

1322. На основании AD трапеции $ABCD$ взяты точки K и L так, что $AK = LD$. Отрезки AC и BL пересекаются в точке M , отрезки KC и BD — в точке N . Докажите, что отрезок MN параллелен основаниям трапеции.

1323. (Теорема Ван-Обеля.) Точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC , причем отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке K . Докажите, что

$$\frac{AK}{KA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B}.$$

1324. На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая DE делит площадь треугольника ABC пополам и образует с прямой AB угол 15° . Найдите углы треугольника ABC .

1325. В окружности проведены диаметр MN и хорда AB , параллельная диаметру MN . Касательная к окружности в точке M пересекает прямые NA и NB соответственно в точках P и Q . Известно, что $MP = p$, $MQ = q$. Найдите MN .

1326. Биссектриса одного из острых углов прямоугольного треугольника в точке пересечения с высотой, опущенной на гипотенузу, делится на отрезки, отношение которых равно $1 : \sqrt{2}$, считая от вершины. Найдите острые углы треугольника.

1327. Сторона AB треугольника ABC равна 3, $BC = 2AC$, E — точка пересечения продолжения биссектрисы CD данного треугольника с описанной около него окружностью, $DE = 1$. Найдите AC .

1328. Прямая, проходящая через точку пересечения медиан треугольника ABC , пересекает стороны BA и BC в точках A' и C' соответственно. При этом $BA' < BA = 3$, $BC = 2$, $BA' \cdot BC' = 3$. Найдите BA' .

1329. На стороне PQ треугольника PQR взята точка N , а на стороне PR — точка L , причем $NQ = LR$. Точка пересечения отрезков QL и NR делит отрезок QL в отношении $m : n$, считая от точки Q . Найдите отношение $PN : PR$.

1330. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D , лежащих по разные стороны от прямой AB . Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E . Найдите AE , если $AB = 10$, $AC = 16$, $AD = 15$.

1331. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D , лежащих по разные стороны от прямой AB . Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E . Найдите AB , если $AC = 16$, $AD = 21$, $AE = 24$.

1332. В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 9$ и $CD = 5$ биссектриса угла D пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла B пересекает те же две биссектрисы в точках L и K , причем точка K лежит на основании AD .

а) В каком отношении прямая LN делит сторону AB , а прямая MK — сторону BC ?

б) Найдите отношение $MN : KL$, если $LM : KN = 3 : 7$.

1333. Трапеция разделена на три трапеции прямыми, параллельными основаниям. Известно, что в каждую из трех получившихся трапеций можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, вписанной в среднюю трапецию, если радиусы окружностей, вписанных в две оставшиеся, равны R и r .

1334. В угол, равный 2α , вписаны две касающиеся окружности. Найдите отношение радиуса меньшей окружности к радиусу третьей окружности, касающейся первых двух и одной из сторон угла.

1335. Две окружности радиусов R и r ($R > r$) касаются внешне в точке C . К ним проведена общая внешняя касательная AB , где A и B — точки касания. Найдите стороны треугольника ABC .

1336. В треугольник вписана окружность радиуса r . Касательные к этой окружности, параллельные сторонам треугольника, отсекают от него три маленьких треугольника (рис. 53). Пусть r_1, r_2, r_3 — радиусы вписанных в эти треугольники окружностей. Докажите, что $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

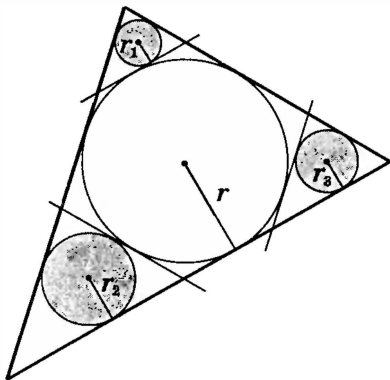


Рис. 53

1337. Около окружности описана равнобедренная трапеция. Боковая сторона трапеции равна a , отрезок, соединяющий точки касания боковых сторон с окружностью, равен b . Найдите диаметр окружности.

1338°. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что площадь треугольника ODC (O — точка пересечения диагоналей) есть среднее пропорциональное между площадями треугольников BOC и AOD . Докажите, что $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

1339. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, заключен-

ного внутри трапеции, если основания равны a и b .

1340. В треугольнике ABC точки P и Q лежат на стороне AC , а прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что $BP = BQ$, $AB = 9$, $BC = 11$. Найдите AC .

1341. В трапеции $ABCD$ сторона AB перпендикулярна основаниям AD и BC . Точка E — середина стороны CD . Найдите отношение $AD : BC$, если $AE = 2AB$ и AE перпендикулярно CD .

1342. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на высоте BD как на диаметре построена окружность. Через точки A и C к окружности проведены касательные AM и CN , продолжения которых пересекаются в точке O . Найдите отношение $AB : AC$, если $OM : AC = k$ и высота BD больше основания AC .

1343°. (Теорема Менелая.) Дан треугольник ABC . Некоторая прямая пересекает его стороны AB , BC и продолжение стороны AC в точках C_1 , A_1 , B_1 соответственно. Докажите, что

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$$

1344. На основании AD трапеции $ABCD$ взята точка E так, что $AE = BC$. Отрезки CA и CE пересекают диагональ BD в точках O и P соответственно. Докажите, что если $BO = PD$, то

$$AD^2 = BC^2 + AD \cdot BC.$$

1345. Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точки A_1, B_1 и C_1 таковы, что $AB_1 \parallel BA_1$, $AC_1 \parallel CA_1$ и $BC_1 \parallel CB_1$. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

1346. Отрезок BE разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника, причем коэффициент подобия равен $\sqrt{3}$. Найдите углы треугольника ABC .

1347. Биссектриса внешнего угла A треугольника ABC пересекает продол-

жение стороны BC в точке M . Докажите, что $BM : MC = AB : AC$.

1348. Дана трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Точки P, M, Q, N — середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что отрезки AQ, PD и MN пересекаются в одной точке.

1349. Точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC , причем отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке K .

Докажите, что $\frac{KA_1}{AA_1} + \frac{KB_1}{BB_1} + \frac{KC_1}{CC_1} = 1$ и

$$\frac{AK}{AA_1} + \frac{BK}{BB_1} + \frac{CK}{CC_1} = 2.$$

1350. Даны отрезки a, b, c, d и e . С помощью циркуля и линейки постройте отрезок, равный $\frac{abc}{de}$.

1351. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M, N и K так, что $AM : MB = 2 : 3, AK : KC = 2 : 1, BN : NC = 1 : 2$. В каком отношении прямая MK делит отрезок AN ?

1352. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки K, L и M так, что $AK : KB = 2 : 3, BL : LC = 1 : 2, CM : MA = 3 : 1$. В каком отношении отрезок KL делит отрезок BM ?

1353. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и равны 4. Найдите стороны треугольника ABC .

1354. На окружности даны точки A, B и C , причем точка B более удалена от прямой l , касающейся окружности в точке A , чем C . Прямая AC пересекает прямую, проведенную через точку B параллельно l , в точке D . Докажите, что $AB^2 = AC \cdot AD$.

1355. В треугольнике ABC проведена высота AH , а из вершин B и C опущены перпендикуляры BB_1 и CC_1 на прямую, проходящую через точку A . Докажите, что треугольник HB_1C_1 подобен треугольнику ABC .

1356. Из двух точек прямой проведены по две касательные к окружности. В образованные углы с вершинами в этих точках вписаны окружности равного радиуса. Докажите, что их линия центров параллельна данной прямой.

1357. Три окружности S_1, S_2 и S_3 попарно касаются друг друга в трех различных точках (рис. 54). Докажите, что прямые, соединяющие точку касания окружностей S_1 и S_2 с двумя другими точками касания, пересекают окружность S_3 в точках, являющихся концами ее диаметра.

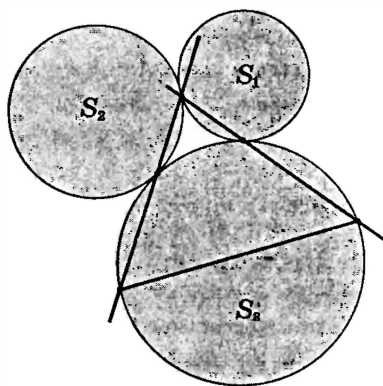


Рис. 54

1358. В треугольнике ABC известно, что $AB = c, AC = b$ ($b > c$), AD — биссектриса. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная AD и пересекающая AC в точке E . Найдите AE .

1359. Продолжение медианы треугольника ABC , проведенной из вершины A , пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D . Найдите BC , если $AC = DC = 1$.

1360. Продолжения высот AM и CN остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках P и Q . Найдите радиус описанной окружности, если $AC = a, PQ = \frac{6a}{5}$.

1361. Периметр треугольника ABC равен 8. В треугольник вписана окружность и к ней проведена касательная, параллельная стороне AB . Отрезок этой касательной, заключенный между сторонами AC и CB , равен 1. Найдите сторону AB .

1362. Точки M и N принадлежат боковым сторонам AB и AC равнобедренного треугольника ABC , причем MN параллельно BC , а в трапецию $BMNC$ можно вписать окружность. Ее радиус равен R , а радиус окружности, вписанной в треугольник AMN , равен r . Найдите:

а) основание BC ;

б) расстояние от точки A до ближайшей точки касания;

в) расстояние между хордами окружностей, соединяющими точки касания с боковыми сторонами трапеции $BMNC$.

1363. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A . Найдите радиусы окружностей, если хорды, соединяющие точку A с точками касания с одной из общих внешних касательных, равны 6 и 8.

1364. На боковых сторонах PQ и ST равнобедренной трапеции $PQST$ выбраны соответственно точки M и N так, что отрезок MN параллелен основаниям трапеции. Известно, что в каждую из трапеций $PMNT$ и $MQSN$ можно вписать окружность. Найдите основания исходной трапеции, если $PQ = c$, $MN = d$ ($c > 2d$).

1365. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке E . Известно, что диагональ BD является биссектрисой угла ABC и что отрезок BD равен 25, а отрезок CD равен 15. Найдите BE .

1366. В треугольнике ABC отрезок MN с концами на отрезках AC и BC параллелен основанию AB и касается вписанной окружности. Предполагая,

что углы A и B известны и равны соответственно 2α и 2β , найдите коэффициент подобия треугольников ABC и MNC .

1367. Из вершины тупого угла A треугольника ABC опущена высота AD . Из точки D радиусом, равным AD , описана окружность, пересекающая стороны треугольника AB и AC в точках M и N соответственно. Найдите AC , если известно, что $AB = c$, $AM = m$ и $AN = n$.

1368. Около окружности описана равнобедренная трапеция $ABCD$. Боковая сторона AB касается окружности в точке M , а основание AD — в точке N . Отрезки MN и AC пересекаются в точке P так, что $NP : PM = 2$. Найдите отношение $AD : BC$.

1369. Две окружности радиусов 5 и 3 внутренне касаются. Хорда большей окружности касается меньшей окружности и делится точкой касания в отношении 3 : 1. Найдите эту хорду.

1370. Две окружности радиусов $\sqrt{5}$ и $\sqrt{2}$ пересекаются в точке A . Расстояние между центрами окружностей равно 3. Через точку A проведена прямая, пересекающая окружности в точках B и C так, что $AB = AC$ (точка B не совпадает с C). Найдите AB .

1371. Около треугольника ABC описана окружность. Диаметр AD пересекает сторону BC в точке E , при этом $AE = AC = BE : CE = m$. Найдите отношение DE к AE .

1372. Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность. Диаметр AD пересекает сторону BC в точке E , при этом $DE : EA = k$. Найдите $CE : BC$.

1373. Окружность радиуса 4 вписана в равнобедренную трапецию, длина меньшего основания которой равно 4. Найдите расстояние между точками, в которых окружность касается боковых сторон трапеции.

1374. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ известны отношения $AB : DC = 1 : 2$ и $BD : AC = 2 : 3$. Найдите $DA : BC$.

1375. В треугольнике ABC точка O является центром описанной окружности. Через вершину B проведена прямая, перпендикулярная AO , пересекающая прямую AC в точке K , а через вершину C проведена прямая, также перпендикулярная AO , пересекающая AB в точке M . Найдите BC , если $BK = a$, $CM = b$.

1376. Биссектриса угла C треугольника ABC делит сторону AB на отрезки, равные a и b ($a > b$). Касательная к описанной окружности треугольника ABC , проходящая через точку C , пересекает прямую AB в точке D . Найдите CD .

1377. Треугольник ABC не имеет тупых углов. На стороне AC этого треугольника взята точка D так, что $AD = \frac{3}{4}AC$. Найдите угол BAC , если известно, что прямая BD разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника.

1378. (Теорема Чевы.) Пусть точки A_1, B_1 и C_1 принадлежат соответственно сторонам BC, AC и AB треугольника ABC . Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

1379. Каждая сторона выпуклого четырехугольника поделена на три равные части. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены отрезками. Докажите, что эти отрезки делят друг друга на три равные части.

1380. Дан треугольник со сторонами, равными a, b и c . Прямая, параллельная стороне, равной a , касается вписанной окружности треугольника

и пересекает две другие стороны в точках M и N . Найдите MN .

1381. В треугольник с периметром, равным 20, вписана окружность. Отрезок касательной, проведенный к окружности параллельно основанию, заключенный между сторонами треугольника, равен 2,4. Найдите основание треугольника.

1382. В трапеции $ABCD$ известно, что $BC \parallel AD$, $\angle ABC = 90^\circ$. Прямая, перпендикулярная стороне CD , пересекает сторону AB в точке M , а сторону CD — в точке N . Известно также, что $MC = a$, $BN = b$, а расстояние от точки D до прямой MC равно c . Найдите расстояние от точки A до прямой BN .

1383. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D , лежащих по разные стороны от прямой AB . Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E . Найдите AE , если $AB = 10$, $AC = 16$, $AD = 15$.

1384. Из точки M , лежащей вне окружности, проведены к этой окружности две касательные. Расстояния от точки C , лежащей на окружности, до касательных равны a и b . Найдите расстояние от точки C до прямой AB , где A и B — точки касания.

1385. Дана окружность с диаметром AB . Вторая окружность с центром в точке A пересекает первую в точках C и D , а диаметр AB — в точке E (рис. 55). На дуге CE , не содержащей точки D , взята точка M , отличная от

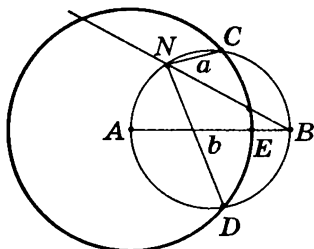


Рис. 55

точек C и E . Луч BM пересекает первую окружность в точке N . Известно, что $CN = a$, $DN = b$. Найдите MN .

1386. Дана прямоугольная трапеция. Известно, что некоторая прямая, параллельная основаниям, пересекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Найдите основания исходной трапеции, если ее боковые стороны равны c и d ($c < d$).

1387. В треугольник ABC помещены три равных окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Все три окружности имеют одну общую точку. Найдите радиусы этих окружностей, если радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны R и r .

1388. Дана прямоугольная трапеция, основания которой равны a и b ($a < b$). Известно, что некоторая прямая, параллельная основаниям, пересекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Найдите радиусы этих окружностей.

1389. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB меньше стороны AC , D — точка пересечения прямой DB , перпендикулярной к AB , и прямой DC , перпендикулярной к AC . Прямая, проходящая через точку B перпендикулярно AD , пересекает AC в точке M . Известно, что $AM = m$, $MC = n$. Найдите AB .

1390. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, делит этот треугольник на два треугольника. Расстояние между центрами вписанных окружностей этих треугольников равно 1. Найдите радиус вписанной окружности исходного треугольника.

1391. В остроугольном треугольнике ABC на высоте AD взята точка M , а на высоте BP — точка N так, что углы BMC и ANC — прямые. Расстояние между точками M и N равно $4 + 2\sqrt{3}$,

угол MCN равен 30° . Найдите биссектрису CL треугольника CMN .

1392. Через произвольную точку P стороны AC треугольника ABC параллельно его медианам AK и CL проведены прямые, пересекающие стороны BC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что медианы AK и CL делят отрезок EF на три равные части.

1393. (Теорема Карно.) Некоторая прямая пересекает стороны A_1A_2 , A_2A_3 , ..., A_nA_1 (или их продолжения) многоугольника $A_1A_2...A_n$ в точках M_1 , M_2 , ..., M_n соответственно. Докажите, что $\frac{A_1M_1}{M_1A_2} \cdot \frac{A_2M_2}{M_2A_3} \dots \frac{A_nM_n}{M_nA_1} = 1$.

1394. Через точку O проведены две прямые, касающиеся окружности в точках M и N . На окружности взята точка K (точки O и K — по разные стороны от прямой MN). Расстояния от точки K до прямых OM и MN равны соответственно p и q . Найдите расстояние от точки K до прямой ON .

1395. В угол с вершиной A , равный 60° , вписана окружность с центром O . К этой окружности проведена касательная, пересекающая стороны угла в точках B и C . Отрезок BC пересекается с отрезком AO в точке M . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , если $AM : MO = 2 : 3$ и $BC = 7$.

1396. Окружности S_1 и S_2 касаются окружности S внутренним образом в точках A и B , причем одна из точек пересечения окружностей S_1 и S_2 лежит на отрезке AB . Докажите, что сумма радиусов окружностей S_1 и S_2 равна радиусу окружности S . Верно ли обратное?

1397. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от точки A до прямых BC , DC и DE равны соответственно a , b , c . Найдите расстояние от вершины A до прямой BE .

1398. Дана окружность с диаметром KL . Вторая окружность с цент-

ром в точке K пересекает первую окружность в точках M и N , а диаметр KL — в точке A . На дуге AN , не содержащей точки M , взята точка B , отличная от точек A и N . Луч LB пересекает первую окружность в точке C . Известно, что $CN = a$, $CM = b$. Найдите BC .

1399. Дана окружность с диаметром BC . Вторая окружность с центром в точке C пересекает первую окружность в точках D и E , а диаметр BC — в точке F , FK — диаметр второй окружности. На дуге EK , не содержащей точки D , взята точка L , отличная от точек E и K . Отрезок BL пересекает первую окружность в точке M . Известно, что $ML = m$, $EM = n$. Найдите DM .

1400. Верно ли утверждение: «Если две стороны и три угла одного треугольника равны двум сторонам и трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны»?

1401. В треугольник вписана окружность. Точки касания соединены с противоположными вершинами треугольника. Докажите, что полученные отрезки пересекаются в одной точке.

1402. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) расстояние от вершины A до прямой CD равно длине боковой стороны. Найдите углы трапеции, если $AB : BC = 5$.

1403. В треугольнике ABC проведены BK — медиана, BE — биссектриса, AD — высота. Найдите сторону AC , если известно, что прямые BK и BE делят отрезок AD на три равные части и $AB = 4$.

1404. Прямая, соединяющая точку P пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ с точкой Q пересечения прямых AB и CD , делит сторону AD пополам. Докажите, что она делит пополам и сторону BC .

1405. На высотах BB_1 и CC_1 треугольника ABC взяты точки B_2 и C_2 так, что $\angle AB_2C = \angle AC_2B = 90^\circ$. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.

1406. На сторонах остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H . Докажите, что $AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H = CH \cdot C_1H$ тогда и только тогда, когда H — точка пересечения высот треугольника ABC .

1407. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1 ; B_2 и C_2 — середины высот BB_1 и CC_1 . Докажите, что треугольник $A_1B_2C_2$ подобен треугольнику ABC .

1408. Через центр окружности, описанной около треугольника $ABNC$, проведены прямые, перпендикулярные сторонам AC и BC . Эти прямые пересекают высоту CH треугольника или ее продолжение в точках P и Q . Известно, что $CP = p$, $CQ = q$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

1409. Радиус окружности, описанной около треугольника KLM , равен R . Через вершину L проведена прямая, перпендикулярная стороне KM . Эту прямую пересекают в точках A и B серединные перпендикуляры к сторонам KL и LM . Известно, что $AL = a$. Найдите BL .

1410. Около окружности описана трапеция $ABCD$, боковая сторона AB перпендикулярна основаниям, M — точка пересечения диагоналей трапеции. Площадь треугольника CMD равна S . Найдите радиус окружности.

1411. В треугольнике ABC , все стороны которого различны, биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке D . Известно, что $AB - BD = a$, $AC + CD = b$. Найдите AD .

1412. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ расположена точка K , на продолжении стороны CD за точку D — точка L . Прямые KD и BL пересекаются в точке N , а прямые LA и CK — в точке M . Докажите, что отрезок MN параллелен стороне AD .

1413. (Теорема Птолемея.) Докажите, что если четырехугольник вписан в окружность, то сумма произведений длин двух пар его противоположных сторон равна произведению длин его диагоналей.

1414. В полукруг помещены две окружности диаметрами d и D ($d < D$) так, что каждая окружность касается дуги и диаметра полукруга, а также другой окружности (рис. 56). Через

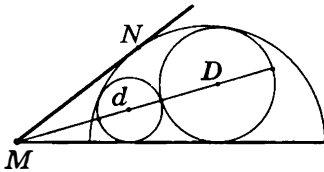


Рис. 56

центры окружностей проведена прямая, пересекающая продолжение диаметра полукруга в точке M . Из точки M проведена касательная к дуге полукруга (N — точка касания). Найдите MN .

8. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ В КРУГЕ

1415. (Теорема о касательной и секущей.) Из одной точки проведены касательная и секущая к некоторой окружности. Докажите, что произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квадрату длины отрезка касательной.

1416. Докажите, что произведения отрезков пересекающихся хорд окружности равны между собой.

1417. Касательная и секущая, проведенные из одной точки к одной окружности, взаимно перпендикулярны. Касательная равна 12, а внутренняя часть секущей равна 10. Найдите радиус окружности.

1418. Диагонали AC и BD вписанного в окружность четырехугольника

$ABCD$ взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M . Известно, что $AM = 3$, $BM = 4$ и $CM = 6$. Найдите CD .

1419. Через точку M проведены две прямые. Одна из них касается некоторой окружности в точке A , а вторая пересекает эту окружность в точках B и C , причем $BC = 7$ и $BM = 9$. Найдите AM .

1420. Из внешней точки проведены к окружности секущая длиной 12 и касательная, длина которой составляет $\frac{2}{3}$ внутреннего отрезка секущей. Найдите длину касательной.

1421. На одной стороне прямого угла с вершиной в точке O взяты две точки A и B , причем $OA = a$, $OB = b$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся другой стороны угла.

1422. Из точки A проведены два луча, пересекающие данную окружность: один — в точках B и C , другой — в точках D и E . Известно, что $AB = 7$, $BC = 7$, $AD = 10$. Найдите DE .

1423. Из точки A проведены два луча, пересекающие данную окружность: один — в точках B и C , другой — в точках D и E . Известно, что $AB = 7$, $BD = 7$, $CE = 10$. Найдите AE .

1424. Дана точка P , удаленная на расстояние, равное 7, от центра окружности, радиус которой равен 11. Через точку P проведена хорда, равная 18. Каковы длины отрезков, на которые делится хорда точкой P ?

1425. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке K , известно, что $AB = a$, $BK = b$, $AK = c$, $CD = d$. Найдите AC .

1426. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 2 и является хордой некоторой окружности. Катет AC равен 1 и лежит внутри окружности, а его продолжение пересе-

кает окружность в точке D , причем $CD = 3$. Найдите радиус окружности.

1427. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.

1428. В квадрат $ABCD$ со стороной a вписана окружность, которая касается стороны CD в точке E . Найдите величину хорды, соединяющей точки, в которых окружность пересекается с прямой AE .

1429. В прямоугольном треугольнике ABC угол A — прямой, катет AB равен a , радиус вписанной окружности равен r . Вписанная окружность касается катета AC в точке D . Найдите хорду, соединяющую точки пересечения окружности с прямой BD .

1430. Точка M внутри окружности делит хорду этой окружности на отрезки, равные a и b . Через точку M проведена хорда AB , делящаяся точкой M пополам. Найдите AB .

1431. Пересекающиеся хорды окружности делятся точкой пересечения в одном и том же отношении. Докажите, что эти хорды равны между собой.

1432. Через точку A , находящуюся внутри окружности на расстоянии, равном 7 от ее центра, проведена прямая, пересекающая окружность в точках B и C . Найдите радиус окружности, если известно, что $AB = 3$, $BC = 5$.

1433. Через точку A , находящуюся внутри окружности на расстоянии, равном 7 от ее центра, проведена прямая, пересекающая окружность в точках B и C . Найдите радиус окружности, если известно, что $AB = 3$, $BC = 5$.

1434. Из точки A , лежащей вне окружности, проведены к окружности касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16, а расстояние от точки A до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32. Найдите радиус окружности, если секущая удалена от ее центра на 5.

1435. AB — диаметр окружности, BC и CDA — касательная и секущая. Найдите отношение $CD : DA$, если BC равно радиусу.

1436. На прямой расположены точки A , B , C и D , причем $AB = BC = CD$ (рис. 57). Отрезки AB , BC и CD служат диаметрами окружностей. Из точки A к окружности с диаметром CD проведена касательная l . Найдите отношение хорд, высекаемых на прямой l окружностями с диаметрами AB и BC .

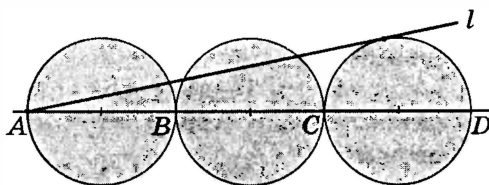


Рис. 57

1437. Из точки M , расположенной вне окружности на расстоянии $\sqrt{7}$ от центра, проведены касательная MA (A — точка касания) и секущая, внутренняя часть которой вдвое меньше внешней и равна радиусу окружности. Найдите радиус окружности.

1438. Хорды AB и CD пересекаются в точке P . Известно, что $AB = CD = 12$, $\angle APC = 60^\circ$ и $AC = 2BD$. Найдите стороны треугольника BPD .

1439. Радиусы двух концентрических окружностей относятся, как 1 : 2. Хорда большей окружности делится меньшей окружностью на три равные части. Найдите отношение этой хорды к диаметру большей окружности.

1440. Точка M лежит внутри окружности радиуса R и удалена от центра на расстояние d . Докажите, что для любой хорды AB этой окружности, проходящей через точку M , произведение $AM \cdot BM$ одно и то же. Чему оно равно?

1441. Через точку K , находящуюся вне окружности радиуса 4, проведена

прямая, пересекающая окружность в точках L и M . Найдите расстояние от точки K до центра окружности, если известно, что $KL = 4$, $KM = 5$.

1442. Каждая из сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC разделена на три равные части, и через четыре точки деления на этих сторонах проведена окружность, высекающая на основании AC хорду DE . Найдите отношение площадей треугольников ABC и BDE , если $AB = BC = 3$ и $AC = 4$.

1443. Около треугольника ABC , в котором $BC = a$, $\angle B = \alpha$, $\angle C = \beta$, описана окружность. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке K . Найдите AK .

1444. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу, если известно, что катет BC равен 10.

1445. Окружность касается стороны BC треугольника ABC в ее середине, проходит через точку A , а отрезки AB и AC пересекает в точках D и E соответственно. Найдите угол BAC , если известно, что $BC = 12$, $AD = 3,5$ и $EC = \frac{9}{\sqrt{5}}$.

1446. Дан треугольник ABC . Окружность радиуса R касается стороны AC в точке M и стороны BC в точке P . Сторона AB пересекает эту окружность в точках K и E (точка E лежит на отрезке BK). Найдите BE , зная, что $BC = a$, $CM = b < a$, $\angle KME = \alpha$.

1447. В угол вписаны две окружности; у них есть общая внутренняя касательная T_1T_2 (T_1 и T_2 — точки касания), которая пересекает стороны угла в точках A_1 и A_2 . Докажите, что $A_1T_1 = A_2T_2$ (или, что эквивалентно, $A_1T_2 = A_2T_1$).

1448. В угол вписаны две окружности; одна из них касается сторон уг-

ла в точках K_1 и K_2 , а другая — в точках L_1 и L_2 . Докажите, что прямая K_1L_2 высекает на этих двух окружностях равные хорды.

1449. Окружность, проходящая через точку D и касающаяся сторон AB и BC равнобедренной трапеции $ABCD$, пересекает стороны AD и CD соответственно в точках M и N . Известно, что $AM : DM = 1 : 3$, $CN : DN = 4 : 3$. Найдите основание BC , если $AB = 7$ и $AD = 6$.

1450. В параллелограмме $KLMN$ сторона KL равна 8. Окружность, касающаяся сторон NK и NM , проходит через точку L и пересекает стороны KL и ML в точках C и D соответственно. Известно, что $KC : LC = 4 : 5$ и $LD : MD = 8 : 1$. Найдите сторону KN .

1451. В окружности с центром O проведены хорды AB и CD , пересекающиеся в точке M , причем $AM = 4$, $MB = 1$, $CM = 2$. Найдите угол OMC .

1452. Каждая из двух равных пересекающихся хорд окружности делится точкой пересечения на две отрезка. Докажите, что отрезки первой хорды соответственно равны отрезкам второй.

1453. Докажите, что если точка пересечения высот остроугольного треугольника делит высоты в одном и том же отношении, то треугольник правильный.

1454. На отрезке AC взята точка B . На AB и AC как на диаметрах построены окружности. К отрезку AC в точке B проведен перпендикуляр BD до пересечения с большей окружностью в точке D . Из точки C проведена касательная CK к меньшей окружности. Докажите, что $CB = CK$.

1455. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и D ; AB и CD — касательные к первой и второй окружностям (B и C — точки на окружностях). Докажите, что $\frac{AC}{BD} = \frac{CD^2}{AB^2}$.

1456. Сторона квадрата $ABCD$ равна 1 и является хордой некоторой окружности, причем остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Касательная $СК$, проведенная из вершины C к этой же окружности, равна 2. Найдите диаметр окружности.

1457. Сторона AB правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна $\sqrt{3}$ и является хордой некоторой окружности, причем остальные стороны шестиугольника лежат вне этой окружности. Длина касательной $СМ$, проведенной к той же окружности из вершины C (соседней с вершиной B), равна 3. Найдите диаметр окружности.

1458. Сторона AB треугольника ABC является хордой некоторой окружности. Стороны AC и BC лежат внутри окружности, продолжение стороны AC пересекает окружность в точке D , а продолжение стороны BC — в точке E , причем $AB = AC = CD = 2$, $CE = \sqrt{2}$. Найдите радиус окружности.

1459. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB = 3$ и $BC = 4$ через середины сторон AB и AC проведена окружность, касающаяся катета BC . Найдите длину отрезка гипотенузы AC , который лежит внутри этой окружности.

1460. В треугольнике ABC известно, что $AB = \sqrt{14}$ и $BC = 2$. Окружность проведена через точку B , через середину D отрезка BC , через точку E на отрезке AB и касается стороны AC . Найдите отношение, в котором эта окружность делит отрезок AB , если DE — диаметр этой окружности.

1461. Дан ромб со стороной a и острым углом α . Найдите радиус окружности, проходящей через две соседние вершины ромба, и касающейся противоположной стороны ромба или ее продолжения.

1462. В равнобедренном треугольнике ABC угол B — прямой, а $AB = BC = 2$. Окружность касается обоих

катетов в их серединах и высекает на гипотенузе хорду DE (рис. 58). Найдите площадь треугольника BDE .

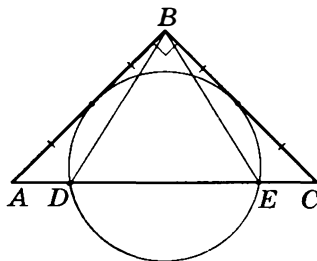


Рис. 58

1463. В окружности проведены три попарно пересекающиеся хорды. Каждая хорда разделена точками пересечения на три равные части. Найдите радиус окружности, если одна из хорд равна a .

1464. В треугольнике ABC угол при вершине A равен 60° . Через точки B, C и точку D , лежащую на стороне AB , проведена окружность, пересекающая сторону AC в точке E . Найдите AE , если $AD = 3$, $BD = 1$ и $EC = 4$. Найдите радиус окружности.

1465. Точка M находится на продолжении хорды AB . Докажите, что если точка C окружности такова, что $MC^2 = MA \cdot MB$, то MC — касательная к окружности.

1466. Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник — правильный.

1467. Касательная, проведенная через вершину C вписанного в окружность треугольника ABC , пересекает продолжение стороны AB за вершину B в точке D . Известно, что радиус окружности равен 2, $AC = \sqrt{12}$ и $\angle CDA + \angle ACB = 2\angle BAC$. Найдите секущую AD .

1468. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC соответственно в точках D и E . Найдите высоту треугольника ABC , опущенную из

точки A , если $AB = 5$, $AC = 2$, а точки A, D, E, C лежат на одной окружности.

1469. Из точки A проведены секущая и касательная радиуса R . Пусть B — точка касания, а D и C — точки пересечения секущей с окружностью, причем точка D лежит между A и C . Известно, что BD — биссектриса угла B треугольника ABC и $BD = R$. Найдите расстояние от точки A до центра окружности.

1470. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведены биссектрисы AD, BE, CF . Найдите BC , если известно, что $AC = 1$, а вершина A лежит на окружности, проходящей через точки D, E, F .

1471. Отрезок KL является диаметром некоторой окружности. Через его концы K и L проведены две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках P и Q , лежащих по одну сторону от прямой KL . Найдите радиус окружности, если $\angle PKL = 60^\circ$ и точка пересечения прямых KP и QL удалена от точек P и Q на расстояние 1.

1472. Окружность радиуса r вписана в угол величины α . Другая окружность радиуса R касается одной стороны угла в той же точке, что и первая, пересекая вторую сторону угла в точках A и B . Найдите AB .

1473. В окружность вписан треугольник. Вторая окружность, концентрическая с первой, касается одной стороны треугольника и делит каждую из двух других сторон на три равные части. Найдите отношение радиусов этих окружностей.

1474. Окружность, диаметр которой равен $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины A и B прямоугольника $ABCD$. Длина касательной, проведенной из точки C к окружности, равна 3, $AB = 1$. Найдите все возможные значения, которые может принимать длина стороны BC .

1475. Окружность проходит через соседние вершины M и N прямоугольника $MNPQ$. Длина касательной, проведенной из точки Q к окружности, равна 1, $PQ = 2$. Найдите все возможные значения, которые может принимать площадь прямоугольника $MNPQ$, если диаметр окружности равен $\sqrt{5}$.

1476. Одна из двух прямых, проходящих через точку M , касается окружности в точке C , а вторая пересекает эту окружность в точках A и B , причем A — середина отрезка BM . Известно, что $MC = 2$ и $\angle BMC = 45^\circ$. Найдите радиус окружности.

1477. Точка M лежит вне окружности радиуса R и удалена от центра на расстояние d . Докажите, что для любой прямой, проходящей через точку M и пересекающей окружность в точках A и D , произведение $MA \cdot MB$ одно и то же. Чему оно равно?

1478. В окружности радиуса R проведены хорда AB и диаметр AC . Хорда PQ , перпендикулярная диаметру AC , пересекает хорду AB в точке M . Известно, что $AB = a$, $PM : MQ = 3$. Найдите AM .

1479. В окружности радиуса $\sqrt{19}$ проведены хорды AB, CD, EF . Хорды AB и CD пересекаются в точке K , хорды CD и EF пересекаются в точке L , а хорды AB и EF пересекаются в точке M , причем $AM = BK, CK = DL, LF = 3, ML = 2$. Найдите величину угла CKB , если известно, что он тупой.

1480. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A . Их общая касательная касается первой окружности в точке B , а второй — в точке C . Прямая, проходящая через точки A и B , пересекает вторую окружность в точке D . Известно, что $AB = 5, AD = 4$. Найдите CD .

1481. В окружности радиуса R проведены диаметр BC и хорда BD . Хорда

PQ , перпендикулярная диаметру BC , пересекает хорду BD в точке M . Известно, что $BD = a$, $PM : MQ = 1 : 3$. Найдите BM .

1482. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

1483. Точки A_1 и B_1 принадлежат соответственно сторонам OA и OB угла AOB (не равного 180°) и $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1$. Докажите, что точки A, B, A_1, B_1 принадлежат одной окружности.

1484. На окружности взяты две диаметрально противоположные точки A и C , а точка B расположена вне окружности. Отрезок AB пересекается с окружностью в точке P , отрезок CB — в точке Q . Известно, что $\angle ABC = 45^\circ$ и отрезки AB и AC относятся как $1 : \sqrt{3}$. Найдите отношение отрезков CP и AQ .

1485. Две окружности внутренне касаются. Прямая, проходящая через центр большей окружности, пересекает ее в точках A и D , а меньшую окружность — в точках B и C . Найдите отношение радиусов окружностей, если $AB : BC : CD = 3 : 7 : 2$.

1486. В прямоугольном треугольнике ABC угол C — прямой, $AC : AB = 4 : 5$. Окружность с центром на катете AC касается гипотенузы AB и пересекает катет BC в точке P так, что $BP : PC = 2 : 3$. Найдите отношение радиуса окружности к катету BC .

1487. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 120^\circ$, $AC = 1$, $BC = \sqrt{7}$. На продолжении стороны CA взята точка M так, что BM является высотой треугольника ABC . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и M и касающейся в точке M окружности, проходящей через точки M, B и C .

1488. В треугольнике ABC сторона BC равна 4, а медиана, проведенная к

этой стороне, равна 3 (рис. 59). Найдите длину общей хорды двух окружностей, каждая из которых проходит через точку A и касается BC , причем одна касается BC в точке B , а вторая — в точке C .

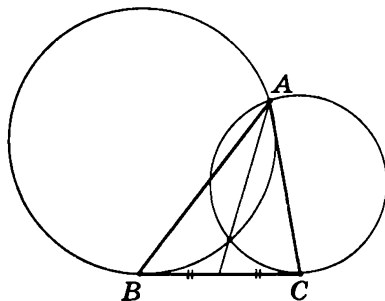


Рис. 59

1489. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M , причем $AM = AC$. Докажите, что продолжения высот AA_1 и DD_1 треугольников CAM и BDM пересекаются на окружности.

1490. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC , взята точка P . Отрезки AP и BC пересекаются в точке Q .

Докажите, что $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

1491. Окружность касается сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ и проходит через вершину C . Сторону DC она пересекает в точке N . Найдите площадь трапеции $ABND$, если $AB = 9$ и $AD = 8$.

1492. Окружность и прямая касаются в точке M . Из точек A и B этой окружности опущены перпендикуляры на прямую, равные a и b соответственно. Найдите расстояние от точки M до прямой AB .

1493. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Окружность радиуса R с центром в точке O проходит через точки A и B и пересекает прямую BC в точке M , отличной от B и C . Найдите расстояние от

точки O до центра окружности, описанной около треугольника ACM .

1494. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K . Найдите KC , если $BC = 4$, а $AK = 6$.

1495. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC . Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E . Найдите расстояние от точки E до прямой CD , если $AD = 4$, $BC = 3$.

1496. Окружность, проведенная через вершины A , B и D прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle A = \angle B = 90^\circ$) пересекает продолжение основания BC и продолжение боковой стороны CD в точках M и N соответственно, причем $CM : CB = CN : CD = 1 : 2$. Найдите отношение диагоналей BD и AC трапеции.

1497. В трапеции $ABCD$ основание $AB = a$, основание $CD = b$ ($a < b$). Окружность, проходящая через вершины A , B и C , касается стороны AD . Найдите диагональ AC .

1498. На прямой расположены точки A , B , C и D , следующие друг за другом в указанном порядке. Известно, что $BC = 3$, $AB = 2CD$. Через точки A и C проведена некоторая окружность, а через точки B и D — другая. Их общая хорда пересекает отрезок BC в точке K . Найдите BK .

1499. В треугольнике ABC проведена биссектриса AP . Известно, что $BP = 16$, $PC = 20$ и что центр окружности, описанной около треугольника ABP , лежит на отрезке AC . Найдите сторону AB .

1500. Две окружности пересекаются в точках A и B . Из точки A к этим окружностям проведены касательные AM и AN (M и N — точки окружностей). Докажите, что:

а) $\angle ABN + \angle MAN = 180^\circ$;

б) $\frac{BM}{BN} = \left(\frac{AM}{AN}\right)^2$.

1501. Радиусы окружностей S_1 и S_2 , касающихся в точке A , равны R и r ($R > r$). Найдите длину касательной, проведенной к окружности S_2 из точки B окружности S_1 , если известно, что $AB = a$. (Разберите случаи внутреннего и внешнего касания.)

1502. Касательные к описанной вокруг треугольника ABC окружности, проведенные в точках A и B , пересекаются в точке P . Докажите, что прямая PC пересекает сторону AB в точке K , делящей ее в отношении $AC^2 : BC^2$.

1503. Даны угол с вершиной O и окружность, касающаяся его сторон в точках A и B . Из точки A параллельно OB проведен луч, пересекающий окружность в точке C . OC пересекает окружность в точке E . Прямые AE и OB пересекаются в точке K . Докажите, что $OK = KB$.

1504. Две окружности радиусов 5 и 4 касаются внешне. Прямая, касающаяся меньшей окружности в точке A , пересекает большую в точках B и C так, что $AB = BC$. Найдите AC .

1505. Окружность, вписанная в треугольник ABC , делит медиану BM на три равные части. Найдите отношение $BC : CA : AB$.

1506. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC , угол A равен 45° , угол D равен 60° . На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках M и N . Хорда MN пересекает основание AD в точке E . Найдите отношение $AE : ED$.

1507. Окружность с центром, расположенным внутри прямого угла, касается одной стороны угла, пересекает другую сторону в точках A и B и пересекает биссектрису угла в точках C и D . Хорда AB равна $\sqrt{6}$, хорда CD равна $\sqrt{7}$. Найдите радиус окружности.

1508. В треугольнике ABC угол B равен 45° , угол C равен 30° . На меди-

нах BM и CN как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q . Хорда PQ пересекает сторону BC в точке D . Найдите отношение $BD : DC$.

1509°. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Докажите, что три общие хорды каждой пары этих окружностей пересекаются в одной точке.

1510. Окружность S_1 касается сторону угла ABC в точках A и C . Окружность S_2 касается прямой AC в точке C , проходит через точку B и пересекает окружность S_1 в точке M (рис. 60). Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.

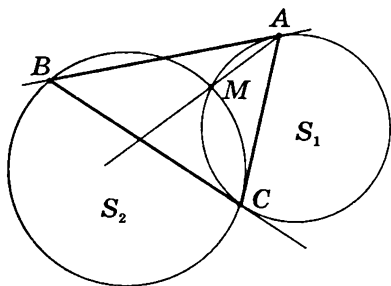


Рис. 60

1511. Прямая OA касается окружности в точке A , а хорда BC параллельна OA . Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L . Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

1512°. На продолжении хорды KL окружности с центром O взята точка A , и из нее проведены касательные AP и AQ ; M — середина отрезка PQ . Докажите, что $\angle MKO = \angle MLO$.

1513°. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD . Точка M на диагонали AC такова, что около четырехугольника $BCDM$ можно описать окружность. Докажите, что BD — общая касательная окруж-

ностей, описанных около треугольников ABM и ADM .

1514. Докажите, что квадрат биссектрисы треугольника равен произведению сторон, ее заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, на которые она разделена биссектрисой.

1515. На продолжении стороны AD ромба $ABCD$ за точку D взята точка K . Прямые AC и BK пересекаются в точке Q . Известно, что $AK = 14$ и что точки A , B и Q лежат на окружности радиуса 6, центр которой принадлежит отрезку AK . Найдите BK .

1516. Дан ромб $KLMN$. На продолжении стороны KN за точку N взята точка P так, что $KP = 40$. Прямые KM и LP пересекаются в точке O . Точки K , L и O лежат на окружности радиуса 15 с центром на отрезке KP . Найдите KM .

1517. Две окружности пересекаются в точках A и B . Хорда CD первой окружности имеет с хордой EF второй окружности общую точку M . Отрезок AB в три раза больше отрезка CM , который, в свою очередь, в два раза меньше отрезка MD и в шесть раз меньше отрезка MF . Какие значения может принимать длина отрезка AM , если известно, что $BM = 2$, а отрезок AB в девять раз больше отрезка EM ?

1518. В ромбе $ABCD$ угол BAD — острый. Окружность, вписанная в этот ромб, касается сторон AB и CD в точках M и N соответственно и пересекает отрезок CM в точке P , а отрезок BN — в точке Q . Найдите $BQ : QN$, если $CP : PM = 9 : 16$.

1519. На боковых сторонах трапеции как на диаметрах построены окружности. Докажите, что отрезки касательных, проведенных из точки пересечения диагоналей трапеции к этим окружностям, равны между собой.

1520. Две окружности радиусов r и R ($r < R$) внешним образом касаются

друг друга. Прямая касается этих окружностей в точках M и N . В точках A и B окружности касаются внешним образом третьей окружности. Прямые AB и MN пересекаются в точке C . Из точки C проведена касательная к третьей окружности (D — точка касания). Найдите CD .

1521. Прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей треугольника, перпендикулярна одной из его биссектрис. Известно, что отношение расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей к радиусу описанной окружности равно h . Найдите углы треугольника.

1522. В треугольнике PQR точка A — центр вписанной окружности, а точка B — центр окружности, описанной около треугольника PQR . Прямая AB перпендикулярна биссектрисе QA треугольника PQR . Известно, что $\angle ABQ = \beta$. Найдите углы треугольника PQR .

1523. Пусть R — радиус описанной окружности треугольника ABC , r_a — радиус внеписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны BC . Докажите, что квадрат расстояния между центрами этих окружностей равен $R^2 + 2Rr_a$.

9. МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

1524. (Обобщенная теорема синусов.) Докажите, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около треугольника.

1525. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

1526. Сторона треугольника равна 21, а две другие стороны образуют угол

в 60° и относятся, как $3 : 8$. Найдите эти стороны.

1527. В треугольнике основание равно 12; один из углов при нем равен 120° ; сторона против этого угла равна 28. Найдите третью сторону.

1528. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC на продолжении гипотенузы AB за точку B отложен отрезок BD , равный BC . Найдите стороны треугольника ADC , если катет $BC = a$.

1529. В прямоугольном треугольнике ABC катет $AC = 15$ и катет $BC = 20$. На гипотенузе AB отложен отрезок AD , равный 4. Найдите CD .

1530. На сторонах угла ABC , равноуго 120° , отложены отрезки $AB = BC = 4$. Проведите окружность через точки A , B , C и найдите ее радиус.

1531. Угол при вершине D трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC равен 60° . Найдите диагонали трапеции, если $AD = 10$, $BC = 3$ и $CD = 4$.

1532. В треугольнике боковая сторона равна 16 и образует с основанием угол в 60° ; другая боковая сторона равна 14. Найдите основание.

1533. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 9, катет $BC = 3$. На гипотенузе взята точка M , причем $AM : MB = 1 : 2$. Найдите CM .

1534. Дан равносторонний треугольник со стороной, равной a . Найдите отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, делящей противоположную сторону в отношении $2 : 1$.

1535. Стороны параллелограмма равны 2 и 4, а угол между ними равен 60° (рис. 61). Через вершину этого угла проведены прямые, проходящие че-

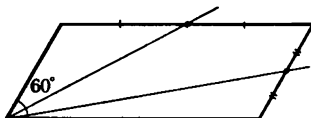


Рис. 61

рез середины двух других сторон параллелограмма. Найдите косинус угла между этими прямыми.

1536. Диагональ параллелограмма делит его угол на части в 30° и 45° . Найдите отношение сторон параллелограмма.

1537. Определите вид треугольника (относительно его углов), если даны три стороны или их отношения:

- 1) 2, 3, 4; 2) 3, 4, 5; 3) 4, 5, 6;
4) 10, 15, 18; 5) 68, 119, 170.

1538. Сторона треугольника равна $2\sqrt{7}$, а две другие стороны образуют угол в 30° и относятся, как $1 : 2\sqrt{3}$. Найдите эти стороны.

1539. Одна из сторон параллелограмма равна 10, а диагонали равны 20 и 24. Найдите косинус острого угла между диагоналями.

1540. Одна из сторон треугольника равна 6, вторая сторона равна $2\sqrt{7}$, а противолежащий ей угол равен 60° . Найдите третью сторону треугольника.

1541. В треугольнике ABC дана точка D на стороне AB . Найдите CD , если известно, что $BC = 37$, $AC = 15$, $AB = 44$, $AD = 14$.

1542. В треугольнике ABC известно, что $AC = 13$, $AB = 14$, $BC = 15$. На стороне BC взята точка M так, что $CM : MB = 1 : 2$. Найдите AM .

1543. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5 и 8 и углом между ними, равным 60° .

1544. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$. На продолжении гипотенузы AB отложен отрезок BD , равный катету BC , и точка D соединена с C . Найдите CD , если $BC = 7$ и $AC = 24$.

1545. В прямоугольном треугольнике даны катеты a и b . Найдите расстояние от вершины прямого угла до ближайшей к ней точки вписанной окружности.

1546. Хорда окружности равна 10. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой — секущая, параллельная касательной. Найдите радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен 12.

1547. В четырехугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle DAB = 90^\circ$, $\angle BDC = 90^\circ$. Кроме того, $DB = a$, $DC = b$. Найдите расстояние между центрами двух окружностей, одна из которых проходит через точки D, A, B , а другая — через точки B, C, D .

1548. Трапеция $KLMN$ с основаниями LM и KN вписана в окружность, центр которой лежит на основании KN . Диагональ LN трапеции равна 4, а угол MNK равен 60° . Найдите основание LM трапеции.

1549. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая основание этого треугольника в точке D . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, если $AD = \sqrt{3}$, а угол ABC равен 120° .

1550. В ромбе $ABCD$ точки M и N — середины сторон BC и CD соответственно. Найдите угол MAN , если $\angle BAD = 60^\circ$.

1551. В квадрате $ABCD$ точка M — середина BC , а O — точка пересечения DM и AC . Найдите величину угла $МОС$.

1552. В выпуклом четырехугольнике $MNLQ$ углы при вершинах N и L — прямые, а угол при вершине M равен $\arctg \frac{2}{3}$. Найдите диагональ NQ , если известно, что сторона LQ вдвое меньше стороны MN и на 2 больше стороны LN .

1553. Найдите косинусы углов трапеции с основаниями, равными 3 и 7, и боковыми сторонами, равными 2 и 5.

1554. В треугольнике даны два угла α и β и радиус R описанной окруж-

ти. Найдите высоту, опущенную из вершины третьего угла треугольника.

1555. Стороны треугольника равны a , b , c . Докажите, что медиана m , проведенная к стороне c , равна $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

1556. В треугольнике две стороны равны 11 и 23, а медиана, проведенная к третьей, равна 10. Найдите третью сторону.

1557. Докажите справедливость следующих формул для площади треугольника: $S = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$, $S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$, где α , β , γ — углы треугольника, a — сторона, лежащая против угла α , R — радиус описанного круга.

1558. В ромбе $ABCD$ угол при вершине A равен 60° . Точка N делит сторону AB в отношении $AN : BN = 2 : 1$. Найдите тангенс угла DNC .

1559. Можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность, если $\angle ADC = 30^\circ$, $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 6$?

1560. Прямая, пересекающая основание равнобедренного треугольника и проходящая через противоположную вершину, делит этот треугольник на два. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около этих треугольников, равны.

1561. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, в котором $AB = CD = a$, $\angle BAD = \angle BCD = \alpha < 90^\circ$, $BC \neq AD$.

1562. Докажите, что если стороны a , b и противолежащие им углы α и β треугольника связаны соотношением $\frac{a}{\cos \alpha} = \frac{b}{\cos \beta}$, то треугольник равнобедренный.

1563. В треугольнике ABC высота BD равна 11,2, а высота AE равна 12. Точка E лежит на стороне BC и $BE : EC = 5 : 9$. Найдите сторону AC .

1564. На продолжении боковой стороны AB равнобедренного треугольни-

ка ABC за вершину A взята точка D , причем $AD = 2AB$ (рис. 62). Известно, что $\angle BAC = 120^\circ$. Докажите, что треугольник BDC — равнобедренный.

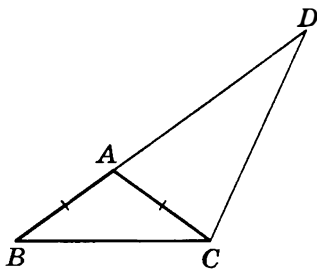


Рис. 62

1565. Точки M и N лежат соответственно на сторонах AD и BC ромба $ABCD$, причем $DM : AM = BN : NC = 2 : 1$. Найдите MN , если известно, что сторона ромба равна a , а $\angle BAD = 60^\circ$.

1566. Диагональ параллелограмма, равная b , перпендикулярна стороне параллелограмма, равной a . Найдите вторую диагональ параллелограмма.

1567. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$, $AB = a$; AD — биссектриса. Найдите BD .

1568. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами, равными a , a и b .

1569. Дан треугольник ABC , в котором $AC = \sqrt{2}$, $BC = 1$, $\angle ABC = 45^\circ$. Найдите угол BAC .

1570. Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $AB = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

1571. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c , а острый угол равен α . Найдите биссектрису прямого угла.

1572. Две стороны треугольника равны $2\sqrt{2}$ и 3, площадь треугольника равна 3. Найдите третью сторону.

1573. Стороны треугольника равны 11, 13 и 12. Найдите медиану, проведенную к большей стороне.

1574. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Кроме того, $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$ и $AD = 2$. Найдите AC .

1575. Дан угол, равный α , с вершиной в точке A . Расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из некоторой точки B на стороны угла, равно a . Найдите AB .

1576. В треугольнике ABC на стороне AC как на диаметре описана окружность, которая пересекает сторону AB в точке M , а сторону BC — в точке N . Известно, что $AC = 2$, $AB = 3$, $AN = 1,8$. Найдите косинус угла BAC .

1577. Диаметр AB окружности продолжили за точку B и на продолжении отметили точку C . Из точки C провели секущую под углом к AC в 7° , пересекающую окружность в точках D и R , считая от точки C . Известно, что $DC = 3$, а угол DAC равен 30° . Найдите диаметр окружности.

1578. В окружности диаметра 4 проведены диаметр AB и хорда CD , пересекающиеся в точке E . Известно, что углы ABC и BCE равны соответственно 60° и 8° . Найдите CE .

1579. В выпуклом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны соответственно a и b и пересекаются под углом 60° . Найдите диагонали четырехугольника.

1580. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E, F, H, G являются соответственно серединами отрезков AB, BC, CD, AD ; O — точка пересечения отрезков EH и FG . Известно, что $EH = a$, $FG = b$, $\angle FOH = 60^\circ$. Найдите диагонали четырехугольника $ABCD$.

1581. В прямоугольной трапеции $ABCD$ углы A и D прямые, сторона AB параллельна стороне CD ; длины сторон равны: $AB = 1$, $CD = 4$, $AD = 5$. На стороне AD взята точка M так, что угол CMD вдвое больше угла BMA . В каком отношении точка M делит сторону AD ?

1582. В треугольнике ABC медианы, проведенные к сторонам AC и BC , пересекаются под прямым углом. Сторона AC равна b , сторона BC равна a . Найдите сторону AB .

1583. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом, равным 30° , если известно, что биссектриса, проведенная из вершины прямого угла, равна a .

1584. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами, равными 13, 14, 15.

1585. Прямая, проходящая через точки G и K , делит пополам угол FGH , $KF \perp GF$, $KH \perp GH$, $KF = KH = 8$, $GK = 17$. Отрезок GL содержит точку F и $FL = 2$. Отрезок GM содержит точку H и $HM = 19$. Найдите LM .

1586. В остроугольном треугольнике ABC известно, что $BC = a$, $AC = b$, $\angle ACB = \alpha$. Найдите высоту CD и угол ABC .

1587. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20. Найдите биссектрису угла при основании треугольника.

1588. В треугольник с боковыми сторонами 9 и 15 вписан параллелограмм так, что одна из его сторон, равная 6, лежит на основании треугольника, а диагонали параллелограмма параллельны боковым сторонам треугольника (рис. 63). Найдите другую сторону параллелограмма и основание треугольника.

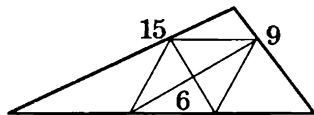


Рис. 63

1589. В треугольник вписан параллелограмм со сторонами 3 и 5 и диагональю, равной 6. Найдите стороны треугольника, если известно, что диагонали параллелограмма параллель-

ны боковым сторонам треугольника, а меньшая из его сторон лежит на основании треугольника.

1590. В треугольнике известны одна сторона a и два прилежащих к ней угла β и γ . Найдите биссектрису третьего угла.

1591. Основание равнобедренного треугольника равно a , угол при вершине равен α . Найдите биссектрису, проведенную к боковой стороне.

1592. Дан параллелограмм, в котором острый угол равен 60° . Найдите отношение сторон параллелограмма, если отношение квадратов диагоналей равно $\frac{1}{3}$.

1593. В треугольнике ABC на сторонах AB , BC и AC взяты соответственно точки K , L и M . Известно, что $AK = 5$, $KB = 3$, $BL = 2$, $LC = 7$, $CM = 1$, $MA = 6$. Найдите расстояние от точки M до середины KL .

1594. В параллелограмме $ABCD$ известны длины диагоналей $AC = 15$, $BD = 9$. Радиус окружности, описанной около треугольника ADC , равен 10. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABD .

1595. Основания равнобедренной трапеции относятся как $5 : 12$, а ее высота равна 17. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции, если известно, что ее средняя линия равна высоте.

1596. Окружность касается двух параллельных прямых l и m в точках A и B соответственно; CD — диаметр окружности, параллельный этим прямым. Прямая BC пересекает прямую l в точке E , а прямая ED — прямую m в точке F . Найдите углы треугольника BRF .

1597. В треугольнике ABC известны стороны: $BC = AC = 12$, $AB = 6$; AD — биссектриса. Найдите радиус R окружности, описанной около треугольника ABC . Выясните, что больше: R или $6,5$.

1598. Медианы AM и CN треугольника ABC пересекаются в точке O . Известно, что $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, $AC = b$. Найдите расстояние от точки O до прямой AC .

1599. В треугольнике ABC со стороной $AB = \sqrt{5}$ из вершины B к стороне AC проведены медиана $BM = 2\sqrt{2}$ и высота $BH = 2$. Найдите сторону BC , если известно, что $\angle ABC + \angle ACB < 90^\circ$.

1600. В треугольнике ABC известно, что $AB = AC$, высота AH равна 9, а диаметр описанной окружности равен 25. Найдите радиус вписанной окружности.

1601. В треугольнике ABC длина $AB = 4$, длина BC равна 5. Из вершины B проведен отрезок BM (M на AC), причем $\angle ABM = 45^\circ$ и $\angle MBC = 30^\circ$.

а) В каком отношении точка M делит сторону AC ?

б) Найдите отрезки AM и MC .

1602. Отношение длин двух пересекающихся окружностей равно $\sqrt{3}$. Общая хорда этих окружностей стягивает в меньшей из них дугу в 120° . Найдите стягиваемую этой хордой дугу большей окружности.

1603. Окружность радиуса R с центром в точке O проходит через вершины A и B треугольника ABC , пересекает отрезок BC в точке M и касается прямой AC в точке A . Найдите CM , зная, что $\angle ACO = \alpha$, $\angle MAB = \beta$.

1604. В параллелограмме $ABCD$ с углом A , равным 60° , проведена биссектриса угла B , пересекающая сторону CD в точке E . В треугольник ECB вписана окружность радиуса R . Другая окружность вписана в трапецию $ABED$. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

1605. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB , BC , AC соответственно в точках M , D , N . Известно, что $NA = 2$, $NC = 3$, $\angle BCA = 60^\circ$. Найдите MD .

1606. На стороне AB треугольника ABC во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник. Найдите расстояние между его центром и вершиной C , если $AB = c$ и $\angle C = 120^\circ$.

1607. В треугольнике ABC заданы: $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Найдите радиус окружности, касающейся стороны AC в точке A и касающейся стороны BC .

1608. В треугольнике ABC к стороне AC проведены высота BK и медиана MB , причем $AM = BM$. Найдите косинус угла KBM , если $AB = 1$, $BC = 2$.

1609. В параллелограмме $PQRS$ биссектриса угла при вершине P , равного 80° , пересекает сторону RS в точке L . Найдите радиус окружности, касающейся отрезка PQ и лучей QR и PL , если известно, что $PQ = 7$.

1610. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. Известно, что $AD = 10$, $BC = 2$, $AB = CD = 5$. Биссектриса угла BAD пересекает продолжение основания BC в точке K . Найдите биссектрису угла ABK в треугольнике ABK .

1611. В треугольнике ABC сторона $BC = 5$. Окружность проходит через вершины B и C и пересекает сторону AC в точке K так, что $CK = 3$, $KA = 1$. Известно, что косинус угла ACB равен $\frac{4}{5}$. Найдите отношение радиуса данной окружности к радиусу окружности, вписанной в треугольник ABK .

1612. В ромбе $ABCD$ со стороной $(1 + \sqrt{5})$ и острым углом BAD , равным 60° , расположена окружность, вписанная в треугольник ABD (рис. 64). Из

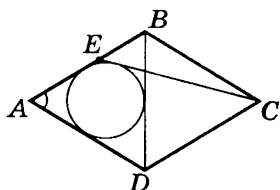


Рис. 64

точки C к окружности проведена касательная, пересекающая сторону AB в точке E . Найдите AE .

1613. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC , пересекая сторону AB в точке E и сторону BC в точке F . Угол AEC в 5 раз больше угла BAF , а угол ABC равен 72° . Найдите радиус окружности, если $AC = 6$.

1614. Точка O лежит на отрезке AB так, что $AO = 13$, $OB = 7$. С центром в точке O проведена окружность радиуса 5. Из A и B к ней проведены касательные, пересекающиеся в точке M , причем точки касания лежат по одну сторону от прямой AB . Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника AMB .

1615. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC , пересекает сторону AB в точке D и сторону BC в точке E . Найдите угол CDB , если $AD = 5$, $AC = 2\sqrt{7}$, $BE = 4$, $BD : CE = 3 : 2$.

1616. Из одной точки окружности проведены две хорды длинами 9 и 17. Найдите радиус окружности, если расстояние между серединами данных хорд равно 5.

1617. Из одной точки окружности проведены две хорды длинами 10 и 12. Найдите радиус окружности, если расстояние от середины меньшей хорды до большей хорды равно 4.

1618. В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ABD = \angle ACD = 45^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $BC = 1$. Найдите AD .

1619. В треугольнике ABC угол A равен 60° , $AB = 1$, $BC = a$. Найдите AC .

1620. В треугольнике ABC дано: $\angle CAB = 75^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$. На стороне CA берется точка K так, что $CK : AB = 3$. На стороне CB берется точка M . Найдите $KM : AB$, если известно, что это отношение меньше $\frac{3}{4}$ и что прямая

$МК$ отсекает от треугольника ABC треугольник, ему подобный.

1621. В окружности проведены хорды AB и BC , причем $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3\sqrt{3}$, $\angle ABC = 60^\circ$. Найдите длину той хорды окружности, которая делит угол ABC пополам.

1622. Медианы прямоугольного треугольника, проведенные к катетам, относятся, как $\sqrt{2} : 1$. Найдите углы треугольника.

1623. Стороны треугольника равны 11, 13 и 12. Найдите медиану, проведенную к большей стороне.

1624. В треугольнике две стороны равны 11 и 23, а медиана, проведенная к третьей, равна 10. Найдите третью сторону.

1625. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны AB в точке M , при этом $AM = 1$, $BM = 4$. Найдите CM , если известно, что $\angle BAC = 120^\circ$.

1626. Основания трапеции равны 1 и 6, а диагонали — 3 и 5. Под каким углом видны основания из точки пересечения диагоналей?

1627. Дан треугольник ABC , в котором $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. На стороне AB взята точка D , а на стороне AC — точка M , причем CD — биссектриса треугольника ABC , $DM \parallel BC$ и $AM = a$. Найдите CM .

1628. Углы треугольника равны α , β и γ , а периметр равен P . Найдите стороны треугольника.

1629. Одна из боковых сторон трапеции образует с большим основанием угол, равный α , а вторая равна a и образует с меньшим основанием угол, равный β ($\beta > \alpha$). Найдите среднюю линию трапеции, если меньшее основание равно b .

1630. В окружность радиуса R вписан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) с углом BAC , равным α . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

1631. Трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписана в окружность. Известно, что

$BC = a$, $AD = b$, $\angle CAD = \alpha$. Найдите радиус окружности.

1632. Касательная к окружности (K — точка касания) параллельна хорде LM . Известно, что $LM = 6$, $KM = 5$. Найдите радиус окружности.

1633. Найдите биссектрису AD треугольника ABC со сторонами $BC = 18$, $AC = 15$, $AB = 12$.

1634. В треугольнике ABC угол BAC равен 60° , высота, опущенная из вершины C на сторону AB , равна $\sqrt{3}$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 5. Найдите стороны треугольника ABC .

1635. В параллелограмме $ABCD$ высота, проведенная из вершины B тупого угла на сторону DA , делит ее в отношении $5 : 3$, считая от вершины D . Найдите отношение $AC : BD$, если $AD : AB = 2$.

1636. Докажите, что отношение суммы квадратов медиан треугольника к сумме квадратов его сторон равно $\frac{3}{4}$.

1637. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b . Найдите биссектрису прямого угла этого треугольника.

1638. Докажите, что для произвольного треугольника выполняется

$$\text{равенство } r = \frac{a \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \text{ где } r — \text{ра-}$$

диус вписанной окружности, α, β и γ — углы треугольника ABC , $a = BC$.

1639. В треугольнике ABC проведены высота BM , биссектриса BN и медиана BL (рис. 65). Известно, что

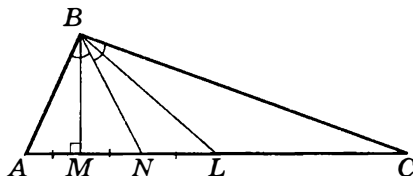


Рис. 65

$AM = MN = NL$. Найдите тангенс угла A этого треугольника.

1640. Через точку L окружности проведены касательная и хорда LM , равная 5. Хорда MN параллельна касательной и равна 6. Найдите радиус окружности.

1641. В окружность вписаны две равнобедренные трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагональ одной из них равна диагонали другой трапеции.

1642. Отрезки AB и CD — диаметры одной окружности. Из точки M этой окружности опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и CD . Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M .

1643. Через вершины A и B треугольника ABC проходит окружность радиуса r , пересекающая сторону BC в точке D . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A , D и C , если $AB = c$ и $AC = b$.

1644. В прямоугольный треугольник ABC с углом A , равным 30° , вписана окружность радиуса R . Вторая окружность, лежащая вне треугольника, касается стороны BC и продолжений двух других сторон. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

1645°. Найдите радиус окружности, которая высекает на обеих сторонах угла, равного α , хорды длины a , если известно, что расстояние между ближайшими концами этих хорд равно b .

1646. В окружности проведены две хорды $AB = a$ и $AC = b$. Длина дуги AC вдвое больше длины дуги AB . Найдите радиус окружности.

1647. Правильный треугольник ABC со стороной, равной 3, вписан в окружность. Точка D лежит на окружности, причем хорда AD равна $\sqrt{3}$. Найдите хорды BD и CD .

1648. В равнобедренном треугольнике основание равно 24, а боковая сторона равна 15. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.

1649. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C . Угол CAB равен α . Биссектриса угла ABC пересекает катет AC в точке K . На стороне BC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке M . Найдите угол AMK .

1650. В окружности радиуса $R = 4$ проведены хорда AB и диаметр AK , образующий с хордой угол $\frac{\pi}{8}$. В точке B проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра AK в точке C . Найдите медиану AM треугольника ABC .

1651. В треугольник ABC со стороной $BC = 9$ вписана окружность, касающаяся стороны BC в точке D . Известно, что $AD = DC$ и косинус угла BCA равен $\frac{2}{3}$. Найдите сторону AC .

1652. В параллелограмме со сторонами 2 и 4 проведена диагональ длиной 3. В каждый из получившихся треугольников вписано по окружности. Найдите расстояние между центрами окружностей.

1653. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, делится точкой пересечения высот пополам. Найдите угла этого треугольника.

1654. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что отрезок AD равен 3, косинус угла BDC равен $\frac{13}{20}$, а сумма углов ABC и ADB равна 180° . Найдите периметр треугольника ABC , если $BC = 2$.

1655°. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса AP острого угла A делится центром O вписанной

окружности в отношении $AO : OP = (\sqrt{3} + 1) : (\sqrt{3} - 1)$. Найдите острые углы треугольника.

1656. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AC , равной 2, проведены медианы AM и CN . Около четырехугольника $ANMC$ можно описать окружность. Найдите радиус этой окружности.

1657. Правильный треугольник ABC со стороной a и два ромба $ACMN$ и $ABFE$ расположены так, что точки M и B лежат по разные стороны от прямой AC , а точки F и C — по разные стороны от прямой AB . Найдите расстояние между центрами ромбов, если $\angle EAB = \angle ACM = \alpha$ ($\alpha < 90^\circ$).

1658. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке M такой, что $DM : MC = 2 : 1$. Известно, что $\angle CAM = \alpha$. Найдите угол BAD .

1659. В параллелограмме $PQRS$ биссектриса угла QPS пересекает сторону QR в точке A такой, что $QA : AR = 3 : 1$. Известно, что $\angle QPS = \alpha$. Найдите угол между биссектрисой PA и диагональю PE .

1660. Диагонали выпуклого четырехугольника равны c и d и пересекаются под углом 45° . Найдите отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника.

1661. Центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, удален от вершин острых углов на расстояния a и b . Найдите гипотенузу.

1662. Точка M лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$ с углом 45° при вершине A , причем $\angle AMD = 90^\circ$ и $BM : MC = 2 : 3$. Найдите отношение соседних сторон параллелограмма.

1663. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 и 8, касается гипотену-

зы в точке M (рис. 66). Найдите расстояние от точки M до вершины прямого угла.

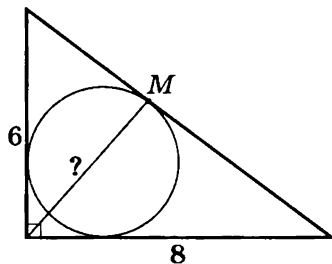


Рис. 66

1664. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна a , средняя линия равна b , а один углов при большем основании равен 30° . Найдите радиус окружности, описанной около этой трапеции.

1665. Медиана AM треугольника ABC равна m и образует со сторонами AB и AC углы, равные α и β соответственно. Найдите эти стороны.

1666. В треугольнике даны два угла β и γ и радиус R описанной окружности. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

1667. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются под углом 60° , а их длины относятся, как $1 : 3$. Чему равна меньшая диагональ четырехугольника $ABCD$, если большая равна $\sqrt{39}$?

1668. В треугольнике ABC известны высоты $h_a = \frac{1}{3}$, $h_b = \frac{1}{4}$, $h_c = \frac{1}{5}$. Найдите отношение биссектрисы CD к радиусу описанной окружности.

1669. Около треугольника ABC описана окружность. Продолжение биссектрисы CK треугольника ABC пересекает эту окружность в точке L , причем CL — диаметр данной окружности. Найдите отношение от-

резков BL и AC , если синус угла BAC равен $\frac{1}{4}$.

1670. В треугольнике ABC сторона $AB = 6$, $\angle BAC = 30^\circ$, радиус описанной окружности равен 5. Найдите сторону AC .

1671. Биссектриса AD равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) делит сторону BC на отрезки $BD = b$ и $DC = c$. Найдите биссектрису AD .

1672. Дан треугольник ABC . Известно, что $AB = 4$, $AC = 2$, $BC = 3$. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K . Прямая, проходящая через точку B параллельно AC , пересекает продолжение биссектрисы AK в точке M . Найдите KM .

1673°. В равнобедренной трапеции даны основания $a = 21$, $b = 9$ и высота $h = 8$. Найдите радиус описанного круга.

1674°. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции с основаниями 2 и 14 и боковой стороной 10.

1675. В треугольнике ABC стороны AB и AC равны соответственно $\sqrt{10}$ и $\sqrt{2}$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен $\sqrt{5}$. Найдите сторону BC и угол ACB , если известно, что угол ACB — острый.

1676. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB , BC , AC соответственно в точках M , D , N . Найдите отрезок MD , если известно, что $NA = 2$, $NC = 3$, $\angle BCA = 60^\circ$.

1677°. В треугольник KLM вписана окружность, которая касается стороны KL в точке A , а стороны KM — в точке B . Найдите угол LMK , если известно, что $BM = 5$, $AL = 10$, а $\cos \angle LKM = \frac{1}{26}$.

1678°. Две стороны треугольника равны a и b . Найдите третью сторону c

треугольника, если его угол, лежащий против третьей стороны, в два раза больше угла, лежащего против стороны, равной b .

1679°. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H . Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC , AHB , BHC и AHC , равны между собой.

1680. Известно, что расстояние от центра описанной окружности до стороны AB треугольника ABC равно половине радиуса этой окружности. Найдите высоту треугольника ABC , опущенную на сторону AB , если она меньше $\sqrt{\frac{3}{2}}$, а две другие стороны треугольника равны 2 и 3.

1681. В треугольнике ABC угол C равен 60° , а биссектриса угла C равна $5\sqrt{3}$. Длины сторон AC и BC относятся как 5 : 2 соответственно. Найдите тангенс угла A и сторону BC .

1682. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает сторону AB в точке D , а сторону BC — в точке E . Найдите угол BDC , если $BD : EC = 1 : 2$, $BE : AD = 2 : 7$, угол ABC равен 60° .

1683. Катеты прямоугольного треугольника равны 36 и 48. Найдите расстояние от центра вписанной в треугольник окружности до высоты, проведенной к гипотенузе.

1684. Гипотенуза и катет прямоугольного треугольника равны соответственно 60 и 36. Найдите расстояние от точки пересечения биссектрис треугольника до высоты, проведенной к гипотенузе.

1685. Прямая, проходящая через точку пересечения медиан треугольника ABC , пересекает стороны BA и BC в точках A' и C' соответственно. При этом $BA' < BA = 3$, $BC = 2$, $BA' \cdot BC' = 3$. Найдите BA' .

1686. В треугольнике ABC известно, что $AB = 3$, $AC = 3\sqrt{7}$, $\angle ABC = 60^\circ$.

Биссектриса угла ABC продолжена до пересечения в точке D с окружностью, описанной вокруг треугольника. Найдите BD .

1687. Во вписанном в окружность четырехугольнике $KLMN$ известно, что $KL = 2$, $LM = 3$, $\angle KLM = 120^\circ$, а диагональ LN является отрезком биссектрисы угла KLM (рис. 67). Найдите эту диагональ.

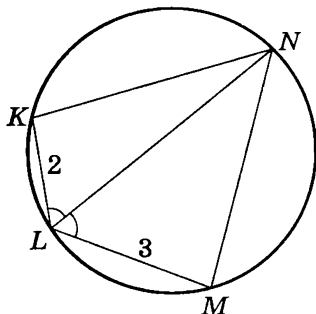


Рис. 67

1688. В угол с вершиной A , равный 60° , вписана окружность с центром в точке O . Через точку K этой окружности проведена к ней касательная, пересекающая сторону угла в точках B и C . Отрезок BC пересекается с отрезком AO в точке M . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , если $AM : MO = 2 : 3$ и $BC = 7$.

1689°. Сторона AC в треугольнике ABC в четыре раза больше радиуса вписанной в треугольник ABC окружности. Найдите, в каком отношении центр этой окружности делит биссектрису угла B , если $\angle ABC = 60^\circ$.

1690. Из произвольной точки P , не лежащей на описанной окружности, опущены перпендикуляры PA_1 , PB_1 , PC_1 на стороны треугольника ABC или их продолжения. Известно, что $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $PA = x$, $PB = y$, $PC = z$. Найдите стороны треугольника $A_1B_1C_1$, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен R .

1691°. Основания трапеции равны 4 и 16. Найдите радиусы окружностей,

вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.

1692. В трапеции $ABCE$ основание AE равно 16, $CE = 8\sqrt{3}$. Окружность, проходящая через точки A , B и C , вторично пересекает прямую AE в точке H , $\angle AHB = 60^\circ$. Найдите AC .

1693. В треугольнике ABC на средней линии DE , параллельной AB , как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N . Найдите MN , если $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

1694. Угол при основании равнобедренного треугольника равен φ . Найдите отношение радиуса вписанной в данный треугольник окружности к радиусу описанной окружности.

1695. В треугольнике ABC заданы: $AC = b$, $\angle ABC = \alpha$. Найдите радиус окружности, проходящей через центр вписанного в треугольник ABC круга и вершины A и C .

1696. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) сторона $AC = 10$. В угол ABC вписана окружность, диаметр которой равен 15, так, что она касается стороны AC в ее середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

1697. В прямоугольном треугольнике ABC из точки E , расположенной в середине катета BC , опущен перпендикуляр EL на гипотенузу AB . Найдите углы треугольника ABC , если $AE = \sqrt{10} EL$ и $BC > AC$.

1698. В ромбе $ABCD$ из вершины B на сторону AD опущен перпендикуляр BE . Найдите углы ромба, если $2\sqrt{3} CE = \sqrt{7} AC$.

1699. Стороны треугольника равны 1 и 2, а угол между ними равен 60° . Через центр вписанной окружности этого треугольника и концы третьей стороны проведена окружность. Найдите ее радиус.

1700. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC точка D де-

лит сторону BC в отношении $3 : 1$, считая от вершины B , а точка E — середина отрезка AD . Известно, что $BE = \sqrt{7}$, $CE = 3$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

1701. В треугольнике ABC сторона AC равна 7, угол BCA равен 60° . Точка E , лежащая на стороне BC , удалена от вершины B на расстояние, равное 6, F — точка пересечения AE с медианой BD . Найдите сторону AB , если $BF : FD = 3 : 2$.

1702. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) медиана AD и биссектриса CE перпендикулярны. Найдите угол ADB .

1703. Стороны треугольника равны 1 и 2, а угол между ними равен 120° . Окружность с центром на третьей стороне треугольника касается двух других сторон. Вторая окружность касается этих сторон и первой окружности. Найдите радиусы окружностей.

1704. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Известно, что $BC = a$, $AC = b$, $\angle AOB = 120^\circ$. Найдите сторону AB .

1705. Точка M лежит на стороне AC равностороннего треугольника ABC со стороной, равной $3a$, причем $AM : MC = 1 : 2$. Точки K и L на сторонах AB и BC являются вершинами другого равностороннего треугольника MKL . Найдите его стороны.

1706. Стороны треугольника равны 1 и 2, а угол между ними равен 60° . Через центр вписанной окружности этого треугольника и концы третьей стороны проведена окружность. Найдите ее радиус.

1707. В трапеции с основаниями 3 и 4 диагональ равна 6 и является биссектрисой одного из углов. Может ли эта трапеция быть равнобедренной?

1708. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CC_1 и AA_1 . Известно, что $AC = 1$ и $\angle C_1CA_1 = \alpha$. Найдите площадь круга, описанного около треугольника C_1BA_1 .

1709. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = 4$, $BC = 1$ и углы A и D при основании, равные соответственно $\arctg 2$ и $\arctg 3$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник CBE , где E — точка пересечения диагоналей трапеции.

1710. В трапеции $KLMN$ известны боковые стороны $KL = 36$, $MN = 34$, верхнее основание $LM = 10$ и $\cos \angle KLM = -\frac{1}{3}$. Найдите диагональ LN .

1711. В остроугольном треугольнике ABC из основания D высоты BD опущены перпендикуляры DM и DN на стороны AB и BC . Известно, что $MN = a$, $BD = b$. Найдите угол ABC .

1712. В треугольнике ABC известно, что $BC = 3$, $BA = 3\sqrt{7}$, $\angle ABC = 60^\circ$. Биссектриса угла ABC продолжена до пересечения в точке D с окружностью, описанной вокруг треугольника (рис. 68). Найдите BD .

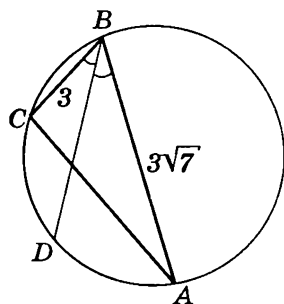


Рис. 68

1713. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает сторону AB в точке D , а сторону BC — в точке E . Найдите угол BDC , если $BC : EC = 1 : 2$, $BE : AD = 2 : 7$, $\angle ABC = 60^\circ$.

1714. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка L так, что $AL = 1$, $BL = 3$, а на стороне BC взята точка K , делящая эту сторону в отношении $BK : KC = 3 : 2$. Точка Q пересечения

прямых AK и CL отстоит от прямой BC на расстоянии 1,5. Вычислите синус угла ABC .

1715. Внутри угла в 60° расположена точка, отстоящая на расстояния $\sqrt{7}$ и $2\sqrt{7}$ от сторон угла. Найдите расстояние этой точки от вершины угла.

1716. В треугольнике ABC точка D делит сторону AB пополам, а точка E лежит на стороне BC , причем отрезок BE в 3 раза меньше стороны BC . Отрезки AE и CD пересекаются в точке O . Найдите сторону AB , если отрезок AE равен 5, отрезок OC равен 4, а угол AOC равен 120° .

1717. Из точки M на окружности проведены три хорды: $MN = 1$, $MP = 6$, $MQ = 2$. При этом углы NMP и PMQ равны. Найдите радиус окружности.

1718. В равнобедренном треугольнике ABC из точки C , являющейся вершиной прямого угла, опущена на гипотенузу высота CC_1 . Из точки C_1 проведены две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающие стороны BC и AC в точках A_1 и B_1 соответственно. Известно, что $\angle C_1A_1B = 60^\circ$,

а гипотенуза $AB = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$. Найдите длину отрезка A_1B_1 . Укажите ее приближенное значение с точностью до 0,01.

1719. В окружность с центром O вписана трапеция $KLMN$, в которой KL параллельна MN , $KL = 8$, $MN = 2$, $\angle NKL = 45^\circ$. Хорда MA окружности пересекает отрезок KL в точке B такой, что $KB = 3$. Найдите расстояние от точки O до прямой AK .

1720. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC , касается основания AC в точке D и боковой стороны AB в точке E . Точка F — середина стороны AB , а точка G — точка пересечения окружности и отрезка FD , отличная от D . Касательная к окружности, проходящая через точку G , пересекает сторону AB в точке H .

Найдите угол BCA , если известно, что $FH : HE = 2 : 3$.

1721. Пусть M — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором стороны AB , AD и BC равны между собой. Найдите угол CMD , если известно, что $DM = MC$, а $\angle CAB \neq \angle DBA$.

1722. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ сторона AD равна 4, сторона CD равна 7, косинус угла ADC равен $\frac{1}{2}$, синус угла BCA равен $\frac{1}{3}$. Найдите сторону BC , если известно, что окружность, описанная около треугольника ABC , проходит также и через точку D .

1723°. В треугольнике ABC проведена средняя линия MN , соединяющая стороны AB и BC . Окружность, проведенная через точки M , N и C , касается стороны AB , а ее радиус равен $\sqrt{2}$. Сторона AC равна 2. Найдите синус угла ACB .

1724°. В окружность радиуса 5 вписан треугольник ABC , у которого $AB = BC$, BD — высота. Найдите BD , если $BD + \frac{2}{3}AC = 10$.

1725. В треугольнике ABC известно, что $BC = 4$, $\angle ACB = 30^\circ$, радиус описанной окружности равен 6. Найдите среднюю линию, параллельную стороне AC , и расстояние между точками, в которых прямая, содержащая эту среднюю линию, пересекает описанную окружность.

1726. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена медиана CD . Около треугольника ACD вписана окружность, а в треугольник BCD вписана окружность. Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если $BC = 3$, а радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $\frac{5}{2}$.

1727. Сторона ромба $ABCD$ равна 6. Расстояние между центрами окруж-

ностей, описанных около треугольников ABC и BCD , равно 8. Найдите радиусы этих окружностей.

1728. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность с центром O . Касательная к окружности пересекает стороны BC и CA в точках M и N соответственно. Найдите радиус окружности, если $\angle MNC = 2\angle NMC$, $OM = \sqrt{10}$, $ON = \frac{15}{4}$.

1729. Около окружности с центром O описана трапеция $ABCD$, в которой $BC \parallel AD$, $BC < AD$. Продолжения боковых сторон трапеции пересекаются в точке M . Найдите радиус окружности, если $MB = BC$, $OB = \sqrt{5}$, $OC = \sqrt{2}$.

1730. В трапеции $ABCD$ сторона AB перпендикулярна основаниям AD и BC . Окружность касается стороны AB в точке K , лежащей между точками A и B , имеет с отрезком BC единственную общую точку C , проходит через точку D и пересекает отрезок AD в точке E , отличной от точки D . Найдите расстояние от точки K до прямой CD , если $AD = 48$, $BC = 12$.

1731. В параллелограмме $ABCD$ известно: $AB = a$, $BC = b$, $\angle ABC = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB .

1732. В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = BC$ и $\angle B = \beta$. Средняя линия треугольника продолжена до пересечения с окружностью в точках D и E ($DE \parallel AC$). Найдите отношение площадей треугольников ABC и DBE .

1733. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ заключены две равные окружности, касающиеся друг друга. Центр первой окружности находится на отрезке, соединяющем вершину D с серединой E стороны AB , а центр второй окружности — на отрезке CE . Первая окружность касается сторон AB , AD и CD , а вторая окружность ка-

сается сторон AB , BC и CD . Найдите синус угла между диагоналями четырехугольника $ABCD$.

1734. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение длины описанной окружности к длине вписанной окружности равно $2\sqrt{5}$. Найдите углы трапеции.

1735°. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность радиуса 3. Прямая l касается этой окружности и параллельна прямой AC . Расстояние от точки B до прямой l равно 3. Найдите расстояние между точками, в которых данная окружность касается сторон AB и BC .

1736. В треугольник ABC вписана окружность. Касательная к этой окружности, параллельная стороне BC , пересекает сторону AB в точке D и сторону AC в точке E (рис. 69). Периметры треугольников ABC и ADE равны соответственно 40 и 30, а угол ABC равен α . Найдите радиус окружности.

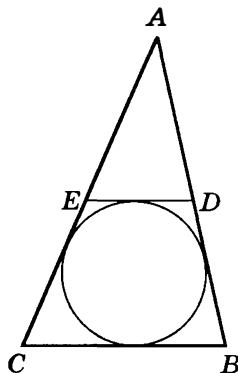


Рис. 69

1737. В трапецию $ABCD$ вписана окружность. Продолжения боковых сторон трапеции AD и BC за точки D и C пересекаются в точке E . Периметр треугольника DCE и длина основания трапеции AB равны соответственно 60 и 20, угол ADC равен β . Найдите радиус окружности.

1738°. Окружность с центром в точке O лежит на гипотенузе AC прямо-угольного треугольника ABC , касается его катетов AB и BC . Найдите AC , если известно, что $AM = \frac{20}{9}$, $AN : MN = 6 : 1$, где M — точка касания AB с окружностью, а N — точка пересечения окружности с AC , расположенная между точками A и O .

1739. На гипотенузе KM прямо-угольного треугольника KLM расположен центр O окружности, которая касается катетов KL и LM в точках A и B соответственно. Найдите AK , если известно, что $BM = \frac{23}{16}$, $AK : AC = 5 : 23$, где C — точка пересечения окружности с KM , лежащая между точками O и M .

1740. Найдите периметр треугольника, один из углов которого равен α , а радиусы вписанной и описанной окружностей равны r и R .

1741. На гипотенузе AB прямо-угольного треугольника ABC выбраны точки K и L так, что $AK = KL = LB$. Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $CK = \sqrt{2} CL$.

1742. Медиана AD остроугольного треугольника ABC равна 5. Ортогональные проекции этой медианы на стороны AB и AC равны 4 и $2\sqrt{5}$ соответственно. Найдите сторону BC .

1743. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC точка D делит сторону BC в отношении $2 : 1$, считая от вершины B , а точка E — середина стороны AB . Известно, что медиана

CQ треугольника CED равна $\frac{\sqrt{23}}{2}$ и $DE = \frac{\sqrt{23}}{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

1744. В ромбе $ABCD$ точка Q делит сторону BC в отношении $1 : 3$, считая

от вершины B , а точка E — середина стороны AB . Известно, что медиана CG треугольника CEQ равна $2\sqrt{2}$, а $EQ = \sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб $ABCD$.

1745. В треугольнике ABC со сторонами $BC = 7$, $AC = 5$, $AB = 3$ проведена биссектриса AD . Вокруг треугольника ABD описана окружность, а в треугольнике ACD вписана окружность. Найдите произведение их радиусов.

1746. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BL и AE углов ABC и BAC соответственно, которые пересекаются в точке O . Известно, что $AB = BL$, периметр треугольника равен 28, $BO = 2OL$. Найдите AB .

1747. В треугольнике ABC известно, что $BC = 4$, $\angle ABC = 30^\circ$, радиус описанной окружности равен 6. Найдите среднюю линию, параллельную стороне AC , и расстояние между точками, в которых прямая, содержащая эту среднюю линию, пересекает описанную окружность.

1748. В ромбе $ABCD$ угол BCD равен 135° , а стороны равны 8. Окружность касается прямой CD и пересекает сторону AB в двух точках, расположенных на расстоянии 1 от A и B . Найдите радиус этой окружности.

1749. Прямая, проходящая через точку M основания AB равнобедренного треугольника ABC , пересекает прямые AC и BC в точках A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что $AA_1 : A_1M = BB_1 : B_1M$.

1750. На сторонах острого угла с вершиной O взяты точки A и B . На луче OB взята точка M на расстоянии $3OA$ от прямой OA , а на луче OA — точка N на расстоянии $3OB$ от прямой OB . Радиус окружности, описанной около треугольника AOB , равен 3. Найдите MN .

1751. На сторонах тупого угла с вершиной T взяты точки P и Q . На про-

должении луча TP за точку T взята точка A на расстоянии $5PT$ от прямой QT , а на продолжении луча TQ за точку T — точка B на расстоянии $5QT$ от прямой PT . Радиус окружности, описанной около треугольника PQT , равен 2. Найдите AB .

1752. Углы треугольника ABC удовлетворяют равенству

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1.$$

Найдите площадь этого треугольника, если известны радиусы вписанной $r = \sqrt{3}$ и описанной $R = 3\sqrt{2}$ окружностей.

1753. Углы тупоугольного треугольника ABC удовлетворяют равенству

$$\sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B.$$

Найдите периметр этого треугольника, если известен радиус описанной окружности R , а один из углов равен $\frac{\pi}{8}$.

1754. На стороне BC треугольника ABC взята точка D такая, что $\angle CAD = 2\angle DAB$. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ADC и ABD , равны соответственно 8 и 4, а расстояние между точками касания этих окружностей с прямой BC равно $\sqrt{129}$. Найдите AD .

1755. В треугольнике ABC угол C равен $\pi - \arcsin \frac{12}{13}$. На стороне AB взята точка D так, что $AD = 18$, $BD = 6$. Найдите радиус окружности, проходящей через вершину C , касающейся стороны AB в точке D и касающейся окружности, описанной около треугольника ABC .

1756. В треугольнике ABC угол A равен $\pi - \arcsin \frac{8}{17}$, сторона BC равна 8.

На продолжении CB за точку B взята точка D так, что $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через вершину A , касающейся прямой BC в точ-

ке D и касающейся окружности, описанной около треугольника ABC .

1757. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C на стороны BC и AB опущены высоты AP и CQ . Найдите сторону AC , если известно, что периметр треугольника ABC равен 15, периметр треугольника BPQ равен 9, а радиус окружности, описанной около треугольника BPQ , равен $\frac{9}{5}$.

1758°. Докажите, что для любого треугольника проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного одной стороне треугольника, на прямую, содержащую вторую сторону, равна по длине третьей стороне.

1759. Окружность радиуса 1 вписана в треугольник ABC , в котором $\cos \angle B = 0,8$. Эта окружность касается средней линии треугольника ABC , параллельной стороне AC . Найдите сторону AC .

1760. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 2$ и $AD = 10$ такова, что в нее можно вписать окружность и около нее можно описать окружность. Определите, где находится центр описанной окружности, т. е. расположен он внутри, или вне ее, или же на одной из сторон трапеции $ABCD$. Найдите также отношение радиусов описанной и вписанной окружностей.

1761. Каждое из оснований высот треугольника проектируется на его стороны. Докажите, что длина отрезка, соединяющего эти проекции, не зависит от выбора высоты.

1762. В треугольнике KLM угол L — тупой, а сторона KM равна 6. Найдите радиус описанной около треугольника KLM окружности, если известно, что на этой окружности лежит центр окружности, проходящей через вершины K , M и точку пересечения высот треугольника KLM .

1763. Трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD вписана в окружность

(рис. 70). На дуге CD взята точка E и соединена со всеми вершинами трапеции. Известно, что $\angle CED = 120^\circ$, $\angle ABE - \angle BAE = \alpha$. Найдите отношение периметра треугольника ABE к радиусу вписанной в него окружности.

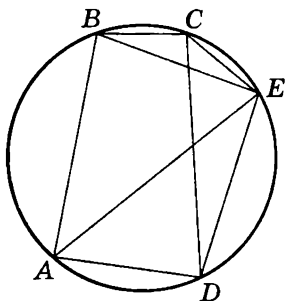


Рис. 70

1764. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность так, что хорда DE , параллельная AB , пересекает BC . Известно, что $\angle ACE = 60^\circ$ и $2\angle BDC + 3\angle CBD = \alpha$. Найдите отношение радиуса вписанной в треугольник BCD окружности к радиусу окружности, описанной около этого треугольника.

1765. Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника, в три раза больше длины окружности, вписанной в этот треугольник. Найдите углы треугольника.

1766. Сумма сторон AB и BC треугольника ABC равна 11, $\angle ABC = 60^\circ$. Радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , равен $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Известно

также, что сторона AB больше стороны BC . Найдите высоту треугольника ABC , опущенную из вершины A .

1767. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $80\sqrt{3}$. Расстояние от точки Q пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ до центра окружности, вписанной в треугольник AQB , равно 2. Величина угла AQB равна 60° , а угол BAD — тупой. Найдите диагональ AC .

1768. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE . Найдите AC , если $BC = a$, $AB = b$, $DE : AC = k$.

1769. В треугольнике ABC дано: $AC = 2\sqrt{3}$, $AB = \sqrt{7}$, $BC = 1$. Вне треугольника взята точка K так, что отрезок KC пересекает отрезок AB в точке, отличной от B , и треугольник с вершинами K , A и C подобен исходному. Найдите угол AKC , если известно, что угол KAC — тупой.

1770. Биссектрисы AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке O . Известно, что $AO = \sqrt{3}MO$, $NO = (\sqrt{3} - 1)BO$. Найдите углы треугольника ABC .

1771. В ромбе $ABCD$ угол $\angle ABC = 60^\circ$. Окружность касается прямой AD в точке A , центр окружности лежит внутри ромба. Касательные к окружности, проведенные из точки C , перпендикулярны. Найдите отношение периметра ромба к длине окружности.

1772. В ромбе $ABCD$ угол $\angle BCD = 120^\circ$. Окружность касается прямой BC в точке C , центр окружности лежит вне ромба. Касательные к окружности, проведенные из точки A , перпендикулярны. Найдите отношение радиуса окружности к стороне ромба.

1773. Сторона ромба $ABCD$ равна a , а острый угол равен α . На отрезках AD и BC построены как на сторонах вне ромба правильные треугольники. Найдите расстояние между центрами этих треугольников.

1774. (Теорема Стюарта.) Точка D расположена на стороне BC треугольника ABC . Докажите, что

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD.$$

1775. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

1776. В треугольнике ABC сторона AB равна 21, биссектриса BD равна $8\sqrt{7}$, а $DC = 8$. Найдите периметр треугольника ABC .

1777. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC , прямая AD пересекается с биссектрисой угла ACB в точке O . Известно, что точки C , D и O лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC , $AC : AB = 3 : 2$, а угол DAC в три раза больше угла DAB . Найдите косинус угла ACB .

1778. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC , а точка O — на отрезке AD . Известно, что точки C , D и O лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC , $4AC = 3\sqrt{2}AB$, угол DAC в два раза больше угла BAD , а угол OCA в два раза меньше угла OCB . Найдите косинус угла ABC .

1779. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 26. Угол ABC равен 120° . Радиус окружности, вписанной в треугольник BCD , равен $\sqrt{3}$. Найдите стороны параллелограмма, если известно, что сторона AD больше стороны AB .

1780. В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB втрое больше стороны BC . Внутри прямоугольника расположена точка N , причем $AN = \sqrt{2}$, $BN = 4\sqrt{2}$, $DN = 2$. Найдите косинус угла BAN и площадь прямоугольника $ABCD$.

1781. В трапеции средняя линия равна 7, высота равна $\frac{15\sqrt{3}}{7}$, а угол между диагоналями против основания равен 120° . Найдите диагонали трапеции.

1782. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$. Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках M и N , биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке K . Найдите расстояние от точки K до прямой AC .

1783. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC , причем прямая AD пересекается с биссектрисой угла ACB в точке O . Известно, что точки C , D и O лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC , $AC : AB = 3 : 2$, а угол DAC в три раза больше угла DAB . Найдите косинус угла ACB .

1784. Внутри треугольника ABC выбрана точка O так, что радиусы описанных около треугольников AOC и AOB окружностей равны соответственно 5 и 4. Известно, что расстояние между центрами этих окружностей равно 6, $AB = 6$, $AC = 7$. Найдите OC .

1785. Внутри треугольника ABC выбрана точка O так, что $\sin \angle BOC = \frac{1}{4}$, $\sin \angle AOC = \frac{1}{3}$. Известно, что $BO = 2$, $BC = 3$, $AC = 4$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOC и BOC .

1786. В равнобедренном треугольнике BCD ($BC = CD$) проведена биссектриса BE . Известно, что $CE = c$, $DE = d$. Найдите BE .

1787. В окружность радиуса 2 вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Из точки K , лежащей на продолжении стороны AF так, что $KA < KF$ и $KA = \sqrt{11} - 1$, проведена секущая KH , пересекающая окружность в точках N и H (рис. 71). Извест-

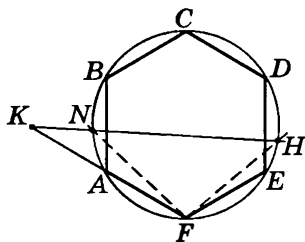


Рис. 71

но, что внешняя часть секущей KN равна 2 ($KN = 2$), а угол NFH — тупой. Найдите угол NKF .

1788. Известно, что в треугольнике ABC $\angle BAC = 75^\circ$, $AB = 1$, $AC = \sqrt{6}$. На стороне BC выбрана точка M так, что $\angle BAM = 30^\circ$. Прямая AM пересекает окружность, описанную около треугольника ABC в точке N , отличной от A . Найдите AN .

1789. Окружность, проходящая через вершины A , B и C параллелограмма $ABCD$, пересекает прямые AD и CD в точках M и N . Точка M удалена от вершин B , C и D на расстояния 4, 3 и 2 соответственно. Найдите MN .

1790. В треугольнике ABC сторона AB равна 4, $\angle CAB = 30^\circ$, а радиус описанной окружности равен 3. Докажите, что высота, опущенная из вершины C на сторону AB , меньше 3.

1791. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 48, а диагональ равна 10. На плоскости, в которой расположен прямоугольник, выбрана точка O так, что $OB = OD = 13$. Найдите расстояние от точки O до наиболее удаленной от нее вершины прямоугольника.

1792. О треугольнике ABC известно, что $\angle ABC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, $AC = b$. На стороне BC взята точка D так, что $BD = 3DC$. Через точки B и D проведена окружность, касающаяся стороны AC или ее продолжения за точку A . Найдите радиус этой окружности.

1793. На стороне угла с вершиной O взяты точки A и B (A между O и B) так, что $OA = 3AB$. Через точки A и B проведена окружность, касающаяся другой стороны угла в точке D . На луче OD взята точка E (D между O и E). Известно, что $OE = m$, $\angle BOE = \alpha$, $\angle BEO = \beta$. Найдите радиус окружности.

1794. О треугольнике ABC известно, что $\angle ABC = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, $BC = a$. На стороне AC взята точка D так, что $AD = 3DC$. Через точки A и D проведена окружность, касающаяся стороны

BC или ее продолжения за точку B . Найдите радиус этой окружности.

1795. В круге радиуса 12 хорда $AB = 6$, а хорда $BC = 4$. Найдите хорду, соединяющую концы дуги AC .

1796. В окружность вписана трапеция $ABCD$ (AD — большее основание). Из вершины C проведен перпендикуляр к AD , пересекающий окружность в точке E . Отношение длины дуги BC (не содержащей точки D) к длине дуги CDE равно $\frac{1}{2}$. Радиус окружности равен

высоте трапеции. Найдите отношение $AD : BC$.

1797. Найдите радиус наименьшего круга, в котором можно разместить треугольник со сторонами 7, 9 и 12.

1798. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC . Докажите, что треугольник с вершинами в центрах описанных окружностей треугольников BHC , AHC и AHB равен треугольнику ABC .

1799. В треугольнике ABC известно, что $AB = 2$, $AC = 5$, $BC = 6$. Найдите расстояние от вершины B до точки пересечения высот треугольника ABC .

1800. Две окружности пересекаются в точках A и B . Прямая, проходящая через точку A , вторично пересекает эти окружности в точках C и D , причем точка A лежит между C и D , а хорды AC и AD пропорциональны радиусам своих окружностей. Докажите, что биссектрисы углов ADB и ACB пересекаются на отрезке AB .

1801. Через точку C проведены две прямые, касающиеся заданной окружности в точках A и B . На большей из дуг AB взята точка D , для которой $CD = 2$ и $\sin \angle ACD \cdot \sin \angle BCD = \frac{1}{3}$.

Найдите расстояние от точки D до хорды AB .

1802. Из вершины L ромба $KLMN$ проведена прямая, пересекающая прямую KN в точке P . Диагональ KM делит в точке Q отрезок LP так, что $LQ : QP = 9 : 10$. Найдите синус угла

LKN , если треугольник KLP тупоугольный, а $\angle PLM = 60^\circ$.

1803. Найдите высоту трапеции, у которой основания равны a и b ($a < b$), угол между диагоналями равен 90° , а угол между продолжениями боковых сторон равен 45° .

1804. Диагональ AC квадрата $ABCD$ совпадает с гипотенузой прямоугольного треугольника ACK , причем точки B и K лежат по одну сторону от прямой AC . Докажите, что $BK = \frac{|AK - CK|}{\sqrt{2}}$ и $DK = \frac{AK + CK}{\sqrt{2}}$.

1805. В параллелограмме $ABCD$ угол BCD равен 150° , а основание AD равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся прямой CD и проходящей через вершину A , а также пересекающей основание AD на расстоянии 2 от точки D .

1806. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 2 и 6 от вершины A . Найдите радиус окружности, проходящей через M и N и касающейся прямой AB , если угол BAC равен 30° .

1807. В треугольнике ABC выполнено соотношение между сторонами $\frac{AC - AB}{BC + AB} = \frac{AB - BC}{AC + AB}$. Найдите радиус описанной окружности, если расстояние от ее центра до точки пересечения медиан равно d , а сторона AB равна c .

1808. В остроугольном треугольнике BCD проведена высота CE и из точки E опущены перпендикуляры EM и EN на стороны BC и CD . Известно, что $CE = b$, $MN = a$. Найдите угол BCD .

1809. В треугольнике ABC даны углы B и C . Биссектриса внутреннего угла BAC пересекает сторону BC в точке D , а окружность, описанную около треугольника ABC , — в точке E . Найдите отношение $AE : DE$.

1810. В равнобедренном треугольнике ABC $\angle B = 120^\circ$. Найдите общую хорду окружности, описанной около треугольника ABC , и окружности,

проходящей через центр вписанной окружности и основания биссектрис углов A и C , если $AC = 1$.

1811. В треугольнике ABC известно, что $AB = 20$, $AC = 24$. Известно также, что вершина C , центр вписанного в треугольник ABC круга и точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC лежат на окружности, центр которой лежит на стороне AC . Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности.

1812. В треугольнике ABC угол C — тупой; биссектриса BE угла B делит сторону AC на отрезки $AE = 3$, $EC = 2$. Известно, что точка K , лежащая на продолжении стороны BC за вершину C , является центром окружности, проходящей через точки C , E и точку пересечения биссектрисы угла B с биссектрисой угла ACK . Найдите расстояние от точки E до стороны AB .

1813. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle A = 90^\circ$) и два квадрата $BEFC$ и $AMNC$ расположены так, что точки E и A лежат по разные стороны от прямой BC , а точки M и B — по разные стороны от прямой AC . Найдите расстояние между центрами квадратов, если $AB = a$, $AC = b$.

1814. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle A = 90^\circ$) и два квадрата $BEFC$ и $AMNC$ расположены так, что точки E и A лежат по разные стороны от прямой BC , а точки M и B — по одну сторону от прямой AC (рис. 72). Най-

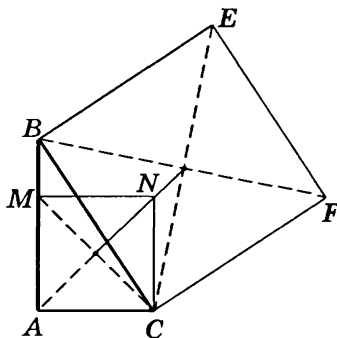


Рис. 72

дите расстояние между центрами квадратов, если $AB = a$.

1815. Через вершины A и C треугольника ABC проведена окружность K , центр которой лежит на окружности, описанной около треугольника ABC . Окружность K пересекает продолжение стороны BA (за точку A) в точке M . Найдите угол BCA , если $MA : AB = 2 : 5$, а $\angle ABC = \arcsin \frac{3}{5}$.

1816. В треугольнике ABC угол ABC равен α , угол BCA равен 2α . Окружность, проходящая через точки A , C и центр описанной около треугольника ABC окружности, пересекает сторону AB в точке M . Найдите отношение AM к AB .

1817. Равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC ($AD > BC$) описана около окружности, которая касается стороны CD в точке M . Отрезок AM пересекает окружность в точке N . Найдите отношение $AD : BC$, если $AN : NM = k$.

1818. Точка D — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность, проходящая через точки A , B и D , пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABD и MNC , равны.

1819. На стороне BC треугольника BCD взята точка A так, что $BA = AC$, $\angle CDB = \alpha$, $\angle BCD = \beta$, $BD = b$; CE — высота треугольника BCD . Окружность проходит через точку A и касается стороны BD в точке E . Найдите радиус этой окружности.

1820. На окружности, описанной около треугольника ABC , взята точка M . Прямая MA пересекается с прямой BC в точке L , а прямая CM — с прямой AB в точке K . Известно, что $AL = a$, $BK = b$, $CK = c$. Найдите BL .

1821. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали кото-

рого пересекаются в точке M . Известно, что $AB = a$, $CD = b$, $\angle ANB = \alpha$. Найдите радиус окружности.

1822. На одной из сторон угла, равного α ($\alpha < 90^\circ$), с вершиной в точке O взяты точки A и B , причем $OA = a$, $OB = b$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся другой стороны угла.

1823. Внутри треугольника ABC взята точка K . Известно, что $AK = 1$, $KC = \sqrt{3}$, а углы AKC , ABK и KBC равны 120° , 15° и 15° соответственно. Найдите BK .

1824. В остроугольном треугольнике ABC высота AD , медиана BE и биссектриса CF пересекаются в точке O . Найдите $\angle C$, если $OE = 2OC$.

1825. В треугольнике ABC сторона AB равна $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, сторона BC равна $\frac{5\sqrt{5}}{4}$.

Точка M лежит на стороне AB , точка O лежит на стороне BC , причем прямые MO и AC параллельны. Отрезок BM в 1,5 раза длиннее отрезка AM . Биссектриса угла BAC пересекает прямую MO в точке P , лежащей между точками M и O , причем радиус окружности, описанной около треугольника AMP , равен $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Найдите сторону AC .

1826. В треугольнике ABC отношение стороны BC к стороне AC равно 3, а $\angle ACB = \alpha$. Из вершины C проведены два луча, делящие угол ACB на три равные части. Найдите отношение отрезков этих лучей, заключенных внутри треугольника ABC .

1827. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D . Окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD , касаются стороны AC в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 3$, $MD = 2$, $DN = 2$, $NC = 4$. Найдите стороны треугольника ABC .

1828. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что окружности, вписанные в треугольники ABD и

BCD , касаются. Известно, что $AD = 2$, $CD = 4$, $BD = 5$. Найдите радиусы окружностей.

1829. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD . Известно, что $AD = 2$, $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$ и расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD , равно $\sqrt{2}$. Найдите BC .

1830. В треугольнике ABC угол BCA равен α , а угол ABC равен 2α . Окружность, проходящая через точки A , C и центр описанной около треугольника ABC окружности, пересекает продолжение стороны AB (за точку A) в точке M . Найдите отношение $AM : AB$.

1831. В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке M . Площадь треугольника ABM равна $\sqrt{6}$. Расстояния от центра окружности, описанной около треугольника ABC , до сторон AC и BC равны $\sqrt{2}$ и 1 соответственно. Найдите угол C .

1832. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите площадь треугольника.

1833. Равнобедренные треугольники ABC ($AB = BC$) и $A_1B_1C_1$ ($A_1B_1 = B_1C_1$) подобны и $AC : A_1C_1 = 5 : \sqrt{3}$. Вершины A_1 и B_1 расположены соответственно на сторонах AC и BC , а вершина C_1 — на продолжении стороны AB за точку B , причем A_1B_1 перпендикулярна BC (рис. 73). Найдите угол ABC .

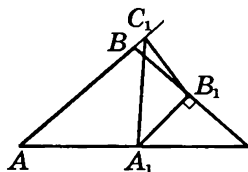


Рис. 73

1834. В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны AB , пересекает продолжение стороны BC в точке M так, что $MC : MB = 1 : 5$. Перпендикуляр, проходящий через середину стороны BC , пересекает сторону AC в точке N так, что $AN : NC = 1 : 2$. Найдите углы треугольника ABC .

1835. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ сторона AB равна $\frac{25}{64}$, сторона BC равна $12\frac{25}{64}$, сторона AD равна $6\frac{1}{4}$. Известно, что угол DAB — острый, угол ADC — тупой, причем синус угла DAB равен $\frac{3}{5}$, косинус угла ABC равен $-\frac{63}{65}$. Окружность с центром в точке O касается сторон BC , CD и AD . Найдите OC .

1836. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезок CM , соединяющий вершину C с точкой M , расположенной на стороне AD , пересекает диагональ BD в точке K . Известно, что $CK : KM = 2 : 1$, $CD : DK = 5 : 3$ и $\angle ABD + \angle ACD = 180^\circ$. Найдите отношение стороны AB к диагонали AC .

1837. Докажите, что длину биссектрисы треугольника, проведенной к стороне, равной a , можно вычислить по формуле

$$l = \frac{\sqrt{4p(p-a)bc}}{b+c},$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$.

1838. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD делит пополам отрезок OH , где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $AC = 2$, $AD = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности.

1839. Две окружности радиусов R и r пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках C и D . N — точка пересечения прямых AB и CD (в между A и N). Найдите:

1) радиус окружности, описанной около треугольника ACD ;

2) отношение высот треугольников NAC и NAD , опущенных из вершины N .

1840. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC . Окружность радиуса $\frac{2}{\sqrt{3}}$, вписанная в треугольник ABD ,

касается стороны AB в точке M , а окружность радиуса $\sqrt{3}$, вписанная в треугольник BCD , касается стороны BC в точке N . Известно, что $BM = 6$, $BN = 5$. Найдите стороны треугольника ABC .

1841. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC . Окружность S_1 , вписанная в треугольник ABD , касается отрезка BD в точке M ; окружность S_2 , вписанная в треугольник BCD , — в точке N . Отношение радиусов окружностей S_1 и S_2 равно $\frac{7}{4}$. Известно, что $BM = 3$, $MN = ND = 1$. Найдите стороны треугольника ABC .

1842. В остроугольном треугольнике ABC $\angle ABC = 75^\circ$, а высота, опущенная из вершины этого угла, равна 1. Найдите радиус описанной окружности, если известно, что периметр треугольника ABC равен $4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

1843. Докажите формулу Эйлера: $O_1O_2^2 = R^2 - 2rR$, где O_1, O_2 — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC ; r, R — радиусы этих окружностей.

1844. (Теорема Штейнера—Лемуса.) Докажите, что если две биссектрисы треугольника равны, то он равнобедренный.

1845. В треугольнике KLM проведена биссектриса MN . Через вершину

M проходят окружность, касающаяся стороны KL в точке M и пересекающая сторону KM в точке P , а сторону LM — в точке Q . Отрезки KP , QM и LQ соответственно равны k , m и q . Найдите MN .

1846. В выпуклом четырехугольнике $ABKC$ сторона $AB = \sqrt{3}$, диагональ BC равна 1, а углы ABC , BKA и BKC равны 120° , 30° и 60° соответственно. Найдите сторону BK .

1847. Два равнобедренных треугольника ABC ($AB = BC$) и MNP ($MP = NP$) подобны и расположены так, что точки M, N и P лежат соответственно на сторонах AB, BC и CA . Найдите отношение $MP : AB$, если $NC : BN = 2$, а угол BAC равен $\arctg 4$.

1848. Сторона BC треугольника ABC равна 4, сторона AB равна $2\sqrt{19}$. Известно, что центр окружности, проходящей через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C . Найдите AC .

1849. В окружности с центром O проведены параллельные хорды PQ и RS , диаметр SE и хорда DE . Хорда DE пересекает хорду PQ в точке F , из точки F опущен перпендикуляр FH на SE . Известно, что радиус окружности равен r , а $EH = \frac{3r}{8}$. Найдите расстояние от середины отрезка EO до середины хорды RQ .

1850. Около окружности описана равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC ($AD > BC$). Прямая, параллельная диагонали AC , пересекает стороны AD и CD в точках M и N соответственно и касается окружности в точке P . Найдите углы трапеции, если $\frac{MP}{PN} = k$ ($k < 1$).

1851. Около треугольника ABC описана окружность с центром в точке O . Касательная к окружности в точке C пересекается с прямой, делящей пополам угол B треугольника, в точке K ,

причем угол BKC равен половине разности утроенного угла A и угла C треугольника. Сумма сторон AC и AB равна $2 + \sqrt{3}$, а сумма расстояний от точки O до сторон AC и AB равна 2. Найдите радиус окружности.

10. ПЛОЩАДЬ. МЕТОД ПЛОЩАДЕЙ

1852. Докажите, что медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника.

1853. Докажите, что площадь треугольника равна его полупериметру, умноженному на радиус вписанной окружности.

1854. Докажите, что площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту.

1855. Точка M делит сторону AB треугольника ABC в отношении $2 : 5$. В каком отношении отрезок CM делит площадь треугольника ABC ?

1856. Докажите, что отношение площадей подобных треугольников равно квадрату их коэффициента подобия.

1857. В треугольнике основание на 4 меньше высоты, а площадь этого треугольника равна 96. Найдите основание и высоту треугольника.

1858. Какую часть площади, считая от вершины, отсекает средняя линия треугольника?

1859. Проекция диагонали равнобедренной трапеции на ее большее основание равна a , боковая сторона равна b . Найдите площадь трапеции, если угол при ее меньшем основании равен 150° .

1860. Разделите данный треугольник на три равновеликих треугольника прямыми, выходящими из одной вершины.

1861. Через точки M и N , делящие сторону AB треугольника ABC на три равные части, проведены прямые, па-

раллельные стороне AC (рис. 74). Найдите площадь части треугольника, заключенной между этими прямыми, если площадь треугольника ABC равна 1.

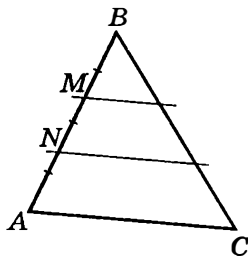


Рис. 74

1862. Через точку E , делящую сторону AB треугольника ABC в отношении $\frac{m}{n}$, считая от вершины A , провели прямую, параллельную BC . В каком отношении находятся площадь отсеченного треугольника и площадь получившейся трапеции?

1863. Три средних линии треугольника разбивают его на четыре части. Площадь одной из них равна S . Найдите площадь данного треугольника.

1864. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 10, а его площадь равна 12. Найдите радиус окружности, вписанной в этот четырехугольник.

1865. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 12, а радиус вписанной окружности равен 5. Найдите площадь четырехугольника.

1866. Каждая из трех окружностей радиуса r касается двух других. Найдите площадь треугольника, образованного общими внешними касательными к этим окружностям.

1867. Каждая из трех окружностей радиуса r касается двух других. Найдите площадь фигуры, расположенной вне окружностей и ограниченной их дугами, заключенными между точками касания.

1868. Дан треугольник со сторонами 12, 15, 18. Проведена окружность, касающаяся обеих меньших сторон и имеющая центр на большей стороне. Найдите отрезки, на которые центр окружности делит большую сторону треугольника.

1869. Катеты прямоугольного треугольника относятся, как 5 : 6, а гипотенуза равна 122. Найдите отрезки гипотенузы, отсекаемые высотой.

1870. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен α , а площадь равна S . Найдите основание.

1871. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна h и вдвое больше своей проекции на боковую сторону. Найдите площадь треугольника.

1872. Данный параллелограмм разделите на четыре равновеликих части прямыми, выходящими из одной вершины.

1873. На сторонах AB и AC треугольника ABC , площадь которого равна 36, взяты соответственно точки M и K так, что $AM : MB = 1 : 3$, а $AK : KC = 2 : 1$. Найдите площадь треугольника AMK .

1874. На стороне AB треугольника ABC взяты точки M и N так, что $AM : MN : NB = 2 : 2 : 1$, а на стороне AC — точка K так, что $AK : KC = 1 : 2$. Найдите площадь треугольника MNK , если площадь треугольника ABC равна 1.

1875. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно, причем $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 2 : 1$. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 1.

1876. Трапеция разбита диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики.

1877. Боковая сторона треугольника разделена в отношении 2 : 3 : 4,

считая от вершины, и из точек деления проведены прямые, параллельные основанию. В каком отношении разделилась площадь треугольника?

1878. Докажите, что если диагональ какого-нибудь четырехугольника делит другую диагональ пополам, то она делит пополам и площадь четырехугольника.

1879. Докажите, что прямая, проходящая через середины оснований трапеции, делит ее на две равновеликие части.

1880°. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$, $AB = c$. Найдите площадь треугольника ABC .

1881. Три окружности радиусов 6, 7 и 8 попарно касаются друг друга внешним образом. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах этих окружностей.

1882. Из точки A проведены две прямые, касающиеся окружности радиуса R в точках C и B так, что треугольник ABC — равносторонний. Найдите его площадь.

1883. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке K . Найдите площадь треугольника CKB , если катет AC равен b , а $\angle ABC = \beta$.

1884. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена высота CD . Угол BAC равен α . Радиус окружности, проходящей через точки A , C и D , равен R . Найдите площадь треугольника ABC .

1885. Из точки A , находящейся вне круга радиуса r , проведены касательные к окружности AB и AC (B и C — точки касания), причем $\angle BAC = \alpha$. Найдите площадь треугольника ABC .

1886. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины B прямого угла опущена высота BD на гипотенузу AC . Известно, что $AB = 13$, $BD = 12$. Найдите площадь треугольника ABC .

1887. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины B прямого угла опущена высота BK на гипотенузу AC . Известно, что $AK = 5$, $AB = 13$. Найдите площадь треугольника ABC .

1888. На одной стороне угла взяты точки A и B , на другой — точки C и D . Найдите геометрическое место точек M плоскости таких, что треугольники ABM и CDM равновелики.

1889. Диагональ прямоугольной трапеции и ее боковая сторона равны (рис. 75). Найдите среднюю линию трапеции, если высота трапеции равна 2, а боковая сторона равна 4.

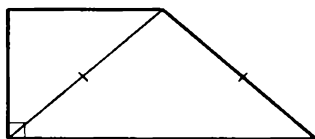


Рис. 75

1890. Зная большее основание равнобедренной трапеции a , ее высоту h и угол α при основании, найдите площадь трапеции.

1891. Средняя линия трапеции равна 10 и делит площадь трапеции в отношении 3 : 5. Найдите основания трапеции.

1892. Найдите площадь параллелограмма, если одна из его сторон равна 51, а диагонали равны 40 и 74.

1893. Из середины основания треугольника проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Докажите, что площадь полученного таким образом параллелограмма равна половине площади треугольника.

1894. Точка X расположена внутри параллелограмма $ABCD$. Докажите, что

$$S(ABX) + S(CDX) = S(BCX) + S(ADX).$$

1895. Докажите, что если в трапеции середину M одной боковой стороны AB соединить с концами другой бо-

ковой стороны CD , то площадь полученного треугольника CMD составит половину площади трапеции.

1896. Середина одной из диагоналей выпуклого четырехугольника соединена с концами другой диагонали. Докажите, что полученная ломаная делит четырехугольник на две равновеликие части.

1897. Площадь треугольника ABC равна S , $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$. Найдите BC .

1898. В треугольнике ABC высота AH равна h , $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$. Найдите площадь треугольника ABC .

1899. Около трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC описана окружность радиуса 6. Центр этой окружности лежит на основании AD . Основание BC равно 4. Найдите площадь трапеции.

1900. В равнобедренную трапецию вписан круг. Докажите, что отношение площади трапеции к площади круга равно отношению периметра трапеции к длине окружности.

1901. На окружности радиуса r выбраны три точки таким образом, что окружность оказалась разделенной на три дуги, которые относятся, как 3 : 4 : 5. В точках деления к окружности проведены касательные. Найдите площадь треугольника, образованного этими касательными.

1902. Хорды AB и AC равны. Образованный ими вписанный в окружность угол равен 30° . Найдите отношение площади той части круга, которая заключена в этом угле, к площади всего круга.

1903. На основании равнобедренного треугольника как на диаметре построена полуокружность, пересекающая треугольник на две части. Сторона треугольника равна a . Найдите площадь той части треугольника, которая лежит вне круга.

1904. Прямая, проходящая через точки A и B окружности, пересекает ее на две дуги. Длины этих дуг относятся

как $1 : 11$. В каком отношении хорда AB делит площадь круга, ограниченного данной окружностью?

1905. Найдите площадь правильного шестиугольника, описанного около окружности, если известно, что хорда длиной 4 этой окружности удалена от ее центра на 5.

1906. В равнобедренной трапеции $PQRS$ диагонали перпендикулярны и в точке пересечения O делятся в отношении $1 : \sqrt{3}$. Длина большего основания PS трапеции равна 1. Найдите площадь общей части кругов, описанных около треугольников PQO и POS .

1907. В равнобедренную трапецию с боковой стороной, равной 9, вписана окружность радиуса 4. Найдите площадь трапеции.

1908. В равнобедренную трапецию площадью 28 вписана окружность радиуса 2. Найдите боковую сторону трапеции.

1909. Точки M и N расположены на стороне BC треугольника ABC , а точка K — на стороне AC , причем $BM : MN : NC = 1 : 1 : 2$ и $CK : AK = 1 : 4$. Известно, что площадь треугольника ABC равна 1. Найдите площадь четырехугольника $AMNK$.

1910. Прямые, содержащие боковые стороны равнобедренной трапеции, пересекаются под прямым углом (рис. 76). Найдите стороны трапеции, если ее площадь равна 12, а высота равна 2.

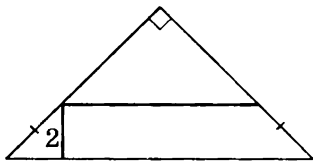


Рис. 76

1911. Основание равнобедренного треугольника равно b , а высота, опущенная на боковую сторону, равна h . Найдите площадь треугольника.

1912°. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен 60° , а сторона AB равна 3. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E . Найдите площадь треугольника ABE .

1913°. В выпуклом четырехугольнике $MNLQ$ углы при вершинах N и L — прямые, а угол при вершине M равен $\arctg 3$. Найдите площадь четырехугольника, если известно, что сторона NL вдвое больше стороны LQ и на 5 больше стороны NM .

1914°. Периметр ромба равен 48, а сумма длин диагоналей равна 26. Найдите площадь ромба.

1915. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) высота $AE = 12$, а основание $AC = 15$. Найдите площадь треугольника.

1916. В равнобедренном треугольнике ABC с тупым углом A , равным α , проведены высоты BN и CM . Найдите отношение площади четырехугольника $BMNC$ к площади треугольника ABC .

1917. Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$, площадь которого равна 28, пересекаются в точке O . Через середины отрезков BO и DO проведены прямые, параллельные диагонали AC . Найдите площадь части четырехугольника, заключенной между этими прямыми.

1918. Площадь данного выпуклого четырехугольника равна S . Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах сторон данного.

1919°. Основание треугольника равно 36. Прямая, параллельная основанию, делит площадь треугольника пополам. Найдите отрезок этой прямой, заключенный между сторонами треугольника.

1920. На сторонах AB , BC и AD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки K , M и L таким образом, что $AK : KB = 2 : 1$, $BM : MC = 1 : 1$, $AL : LD = 1 : 3$. Найдите отношение площадей треугольников KBL и BML .

1921°. Через каждую вершину выпуклого четырехугольника проведены прямые, параллельные диагонали, не проходящей через эту вершину. Докажите, что площадь полученного таким образом параллелограмма вдвое больше площади данного четырехугольника.

1922. В четырехугольнике $ABCD$ площади треугольников ABC и ACD равны. Докажите, что диагональ BD делится другой диагональю пополам.

1923. Около окружности описана равнобедренная трапеция с боковой стороной l . Одно из оснований трапеции равно a . Найдите площадь трапеции.

1924. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S . Найдите среднюю линию трапеции, если острый угол при ее основании равен α .

1925. В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса R . Верхнее основание трапеции в два раза меньше ее высоты. Найдите площадь трапеции.

1926. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S , а высота трапеции в два раза меньше ее боковой стороны. Найдите радиус круга.

1927. В равнобедренную трапецию, боковая сторона которой равна 5, а одно из оснований 2, можно вписать окружность. Найдите высоту трапеции.

1928°. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K . Найдите площадь треугольника BCK , если $BC = a$, $CA = b$.

1929. В окружность вписана трапеция $ABCD$, причем ее основания $AB = 1$ и $DC = 2$. Обозначим точку пересечения диагоналей этой трапеции через F . Найдите отношение суммы площадей треугольников ABF и CDF к сумме площадей треугольников AFD и BCF .

1930°. Найдите площадь трапеции, если ее диагонали равны 17 и 113, а высота равна 15.

1931°. Стороны треугольника равны 10, 17 и 21. Найдите высоту, проведенную к большей стороне.

1932. В трапеции большее основание равно 5, одна из боковых сторон равна 3. Известно, что одна из диагоналей перпендикулярна заданной боковой стороне, а другая делит угол между заданной боковой стороной и основанием пополам. Найдите площадь трапеции.

1933. Одно из оснований трапеции служит диаметром окружности радиуса R , а другое является хордой и отсекает от окружности дугу в α радиан ($0 < \alpha < \pi$). Найдите площадь трапеции.

1934. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равна 10, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12.

1935. В прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с прямым углом при вершине B вписан прямоугольник $MNKB$ так, что две его стороны MB и KB лежат на катетах, а вершина N — на гипотенузе AC . В каком отношении точка N должна делить гипотенузу, чтобы площадь параллелограмма составляла 18% площади треугольника?

1936. В треугольнике ABC даны три стороны: $AB = 26$, $BC = 30$ и $AC = 28$. Найдите часть площади этого треугольника, заключенную между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины B .

1937. Данный параллелограмм разделите на три равновеликие части прямыми, выходящими из одной вершины.

1938. Точки M и N принадлежат соответственно сторонам AB и AC треугольника ABC или их продолжени-

ям, причем $\frac{AM}{AB} = \frac{m}{n}$, $\frac{AN}{AC} = \frac{p}{q}$. Докажите, что площади треугольников AMN и ABC относятся как $\frac{m}{n} : \frac{p}{q}$.

1939°. Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.

1940. Пусть M , N , K и L — середины сторон CD , DA , AB и BC квадрата $ABCD$, площадь которого равна S (рис. 77). Найдите площадь четырехугольника, образованного прямыми AM , BN , CK и DL .

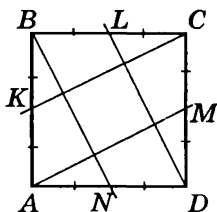


Рис. 77

1941. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на части, площади которых относятся как $2 : 1$, считая от вершины. В каком отношении она делит боковые стороны?

1942. Через точки R и E , принадлежащие сторонам AB и AD параллелограмма $ABCD$ и такие, что $AR = \frac{2}{3}AB$,

$AE = \frac{1}{3}AD$, проведена прямая. Найдите отношение площади параллелограмма к площади полученного треугольника.

1943. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D . Известно, что $BD = 4$, $DC = 6$. Найдите площадь треугольника ADC .

1944. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, разделил его на два четырехугольника, имеющих равные площади. Докажите, что эти стороны параллельны.

1945. Боковые стороны трапеции равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника, причем наименьшая из площадей этих треугольников в 7 раз меньше среднего значения площади. Найдите основания трапеции.

1946. Дан треугольник со сторонами 10, 24 и 26. Две меньшие стороны являются касательными к окружности, центр которой лежит на большей стороне. Найдите радиус окружности.

1947. В треугольник со сторонами a и b и углом между ними α вписан полуокруг, диаметр которого лежит на третьей стороне. Найдите его радиус.

1948. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность единичного радиуса.

Известно, что $AB = \sqrt{2}$, $\angle ABE = 45^\circ$, $\angle EBD = 30^\circ$ и $BC = CD$. Найдите площадь пятиугольника.

1949. В прямоугольный треугольник ABC вписан прямоугольник $DEKM$ вдвое меньшей площади. Вершины D и E лежат на гипотенузе BC , вершины K и M — на катетах. Найдите углы треугольника ABC , если сторона DE прямоугольника относится к стороне DM , как $5 : 2$.

1950. Дан равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = BC$, $\angle ABC = 120^\circ$. Расстояние от середины стороны AB до основания AC равно a . Найдите площадь круга, вписанного в треугольник ABC .

1951. Боковые стороны трапеции равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно $\frac{5}{11}$. Найдите основания трапеции.

1952. Центр O окружности радиуса 3 лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC . Катеты треугольника касаются окружности. Най-

дите площадь треугольника ABC , если известно, что $OC = 5$.

1953. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса прямого угла B пересекает гипотенузу AC в точке M . Найдите площадь треугольника ABC , если расстояние от точки M до катета BC равно 4, а $AM = 5$.

1954. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса прямого угла B пересекает гипотенузу AC в точке M . Найдите расстояние от точки M до катета BC , если катет AB равен 5, а катет BC равен 8.

1955. Прямая делит длину дуги окружности в отношении $1 : 3$. В каком отношении делит она площадь круга?

1956. Даны две концентрические окружности. Касательная к меньшей окружности делит длину дуги большей окружности в отношении $1 : 5$. Найдите отношение площадей кругов, ограниченных этими окружностями.

1957. Дан ромб с острым углом α . Какую часть площади ромба составляет площадь вписанного в него круга?

1958. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основание AD равно a , основание BC равно b , $AB = d$. Через вершину B проведена прямая, делящая пополам диагональ AC и пересекающая AD в точке K . Найдите площадь треугольника BDK .

1959. Площадь равнобедренной трапеции равна 32. Котангенс угла между диагональю и основанием равен 2. Найдите высоту трапеции.

1960. Внутри прямого угла дана точка M , расстояния которой от сторон угла равны 4 и 8. Прямая, проходящая через точку M , отсекает от прямого угла треугольник площадью 100. Найдите катеты треугольника.

1961. Диагональ равнобедренной трапеции делит ее тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3, периметр равен 42. Найдите площадь трапеции.

1962. Основания трапеции равны a и b , углы при большем основании равны 30° и 45° . Найдите площадь трапеции.

1963. В равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 78) боковая сторона AB и меньшее основание BC равны 2, а BD перпендикулярна AB . Найдите площадь трапеции.

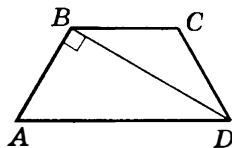


Рис. 78

1964. Найдите площадь равнобедренной трапеции, зная ее диагональ l и угол α между этой диагональю и большим основанием.

1965. Из точки A к окружности с центром в точке N проведены две касательные, которые касаются окружности в точках B и M . Хорда BM пересекает отрезок NA в точке K . Отрезок NK в $\frac{7}{4}$ раза меньше отрезка KA ; $AB = 4$.

Найдите площадь треугольника BAK .

1966. Найдите высоту равнобедренной трапеции, если ее диагонали взаимно перпендикулярны, а площадь трапеции равна S .

1967. В прямоугольном треугольнике ABC расположен прямоугольник $EKMP$ так, что сторона EK лежит на гипотенузе BC , а вершины M и P — на катетах AC и AB соответственно. Катет AC равен 3, а катет AB равен 4. Найдите стороны прямоугольника $EKMP$, если его площадь равна $\frac{3}{5}$, а периметр меньше 9.

1968. В равносторонний треугольник ABC вписан прямоугольник $PQRS$ так, что основание прямоугольника RS лежит на стороне BC , а вершины P и Q — на сторонах AB и AC со-

ответственно. В каком отношении точка Q должна делить сторону AC , чтобы площадь прямоугольника $PQRS$ составляла $\frac{45}{98}$ площади треугольника ABC ?

1969. В треугольнике ABC сторона BC равна 6, сторона AC равна 5, а угол при вершине B равен 30° . Найдите площадь треугольника, если расстояние от вершины A до прямой BC меньше чем $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

1970. Найдите площадь треугольника, если две стороны его соответственно равны 27 и 29, а медиана третьей стороны равна 26.

1971. Прямоугольные треугольники ABC и ABD имеют общую гипотенузу $AB = 5$. Точки C и D расположены по разные стороны от прямой, проходящей через точки A и B , $BC = BD = 3$. Точка E лежит на AC , $EC = 1$. Точка F лежит на AD , $FD = 2$. Найдите площадь пятиугольника $ECBDF$.

1972°. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее средняя линия равна 5.

1973. Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне. Найдите острый угол и большее основание трапеции, если меньшее основание равно 3 и высота трапеции равна 2.

1974. В треугольнике ABC точка D лежит на AC , причем $AD = 2DC$. Точка E лежит на BC . Площадь треугольника ABD равна 3, площадь треугольника AED равна 1. Отрезки AE и BD пересекаются в точке O . Найдите отношение площадей треугольников ABO и OED .

1975. В треугольнике ABC проведены высоты AE и CD . Найдите сторону AB , если $BD = 18$, $DC = 30$, $AE = 20$.

1976. В равнобедренном треугольнике ABC боковые стороны BC и AC в два раза больше основания AB . Бис-

сектрисы углов при основании пересекаются в точке M . Какую часть треугольника ABC составляет площадь треугольника AMB ?

1977. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

1978. В треугольнике ABC проведены биссектрисы CF и AD . Найдите отношение площадей треугольников AFD и ABC , если $AB : AC : BC = 21 : 28 : 20$.

1979. Найдите площадь трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), если ее основания относятся как 5 : 3, а площадь треугольника ADM равна 50, где M — точка пересечения прямых AB и CD .

1980. Основание треугольника равно 20; медианы, проведенные к боковым сторонам, равны 18 и 24. Найдите площадь треугольника.

1981. В треугольнике ABC проведены медианы BD и CE ; M — их точка пересечения. Докажите, что треугольник BMC равновелик четырехугольнику $ADME$.

1982. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC взята точка E , где расстояние AE составляет треть AC , а на стороне AD взята точка F , где расстояние AF составляет четверть AD . Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что площадь четырехугольника $ABGE$, где G — точка пересечения прямой FE со стороной BC , равна 8.

1983. В выпуклом четырехугольнике $ACBD$, площадь которого равна 25, проведены диагонали. Известно, что площадь треугольника ABC вдвое больше площади треугольника ACD , а площадь треугольника BCD втрое больше площади треугольника BDA . Найдите площади треугольников ABC , ACD , ADB и BCD .

1984. В ромбе $ABCD$, где $\angle BAD = 60^\circ$, перпендикуляр к стороне AD , восстановленный из середины AD , пере-

секает диагональ AC в точке N . Найдите отношение площади треугольника MND к площади ромба $ABCD$.

1985. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 79) сторона AB равна 6, а высота, проведенная к основанию AD , равна 3. Биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке M так, что $MC = 4$; N — точка пересечения биссектрисы AM и диагонали BD . Найдите площадь треугольника BNM .

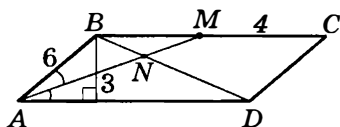


Рис. 79

1986. В параллелограмме $ABCD$ на стороне AB взята точка M так, что $AB = 3AM$; N — точка пересечения прямых AC и DM . Найдите отношение площади треугольника AMN к площади всего параллелограмма.

1987. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AB = 4$, $AD = 6$. Биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке M , при этом $AM = 4\sqrt{3}$. Найдите площадь четырехугольника $AMCD$.

1988. Точки E , F , M расположены соответственно на сторонах AB , BC , AC треугольника ABC . Отрезок AE составляет одну треть стороны AB , отрезок BF составляет одну шестую стороны BC , отрезок AM составляет две пятых стороны AC . Найдите отношение площади треугольника EFM к площади треугольника ABC .

1989. A , B , C , D — последовательные вершины параллелограмма. Точки E , F , P , H лежат соответственно на сторонах AB , BC , CD , AD . Отрезок AE составляет $\frac{1}{3}$ стороны AB , отрезок BF составляет $\frac{1}{3}$ стороны BC , а точки P и H делят пополам стороны, на которых

они лежат. Найдите отношение площади четырехугольника $EFPH$ к площади параллелограмма $ABCD$.

1990. В треугольнике ABC проведены биссектриса BD угла ABC и биссектриса AF угла BAC (точка D лежит на стороне AC , а точка F — на стороне BC). Найдите отношение площадей треугольников ABC и CDF , если известно, что $AB = 6$, $BC = 4$ и $AC = 3$.

1991. Через точку, взятую на диагонали AC параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные его сторонам. Данный параллелограмм делится, таким образом, на четыре параллелограмма, из которых два имеют своими диагоналями части диагонали AC . Докажите, что два других параллелограмма равновелики.

1992. На отрезке, соединяющем середины оснований трапеции, взята точка и соединена со всеми вершинами трапеции. Докажите, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам трапеции, равновелики.

1993. Медианы AN и BM треугольника ABC равны 6 и 9 соответственно и пересекаются в точке K , причем угол AKB равен 30° . Найдите площадь треугольника ABC .

1994. Из внешней точки A проведены к кругу касательная AB и секущая ACD . Найдите площадь треугольника CBD , если $AC : AB = 2 : 3$ и площадь треугольника ABC равна 20.

1995. AB и CD — две непересекающиеся хорды, причем $\angle A = 120^\circ$ и $\angle C = 90^\circ$; M — точка пересечения хорд AD и BC . Найдите площади треугольников AMB и CMD , если их сумма равна 100.

1996. Докажите, что сумма расстояний от любой точки основания равнобедренного треугольника до боковых сторон равна высоте этого треугольника, проведенной к боковой стороне.

1997. Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри равно-

стороннего треугольника до его сторон равна высоте этого треугольника.

1998. Точка D лежит на стороне CB прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$), причем $AB = 5$, $\angle ADC = = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$, $DB = \frac{4\sqrt{10}}{3}$. Найдите

площадь треугольника ABC .

1999. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равна 10, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12.

2000. В треугольнике ABC биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке K . Известно, что $BC = 2$, $KC = 1$,

$BK = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Найдите площадь треугольника ABC .

2001°. В трапеции $ABCD$, описанной около окружности, $BC \parallel AD$, $AB = CD$, $\angle BAD = 45^\circ$. Площадь трапеции равна 10. Найдите AB .

2002. Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) равна 48, а площадь треугольника AOB , где O — точка пересечения диагоналей трапеции, равна 9. Найдите отношение оснований трапеции $AD : BC$.

2003. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC , пересекает сторону BC в точке M , а сторону AC — в точке N . Площадь треугольника MCN в два раза больше площади трапеции $ABMN$. Найдите $CM : MB$.

2004. Около трапеции $KLMN$ описана окружность, причем основание KN является ее диаметром. Известно, что $KN = 3$, $LM = 2$. Хорда MT пересекает диаметр KN в точке S такой, что $KS : SN = 1 : 3$. Найдите площадь треугольника STN .

2005. В параллелограмме лежат две окружности, касающиеся друг друга и трех сторон параллелограмма каждая. Радиус одной из окружностей равен 1. Известно, что один из отрезков стороны параллелограмма от вер-

шины до точки касания равен $\sqrt{3}$. Найдите площадь параллелограмма.

2006. В выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписана окружность с центром в точке O , причем $AO = OC$, $BC = 5$, $CD = 12$, а угол DAB — прямой. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

2007. В окружность радиуса 13 вписан четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны. Одна из диагоналей равна 18, а расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей равно $4\sqrt{6}$. Найдите площадь четырехугольника.

2008. Даны две непересекающиеся окружности. К ним проведены общие касательные, которые пересекаются в точке A отрезка, соединяющего центры окружностей (рис. 80). Радиус меньшей окружности равен R . Расстояние от точки A до центра окружности большего радиуса равно $6R$. Точка A делит длину отрезка касательной, заключенного между точками касания, в отношении $1 : 3$. Найдите площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных и большими дугами окружностей, соединяющими точки касания.

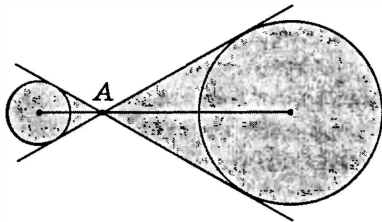


Рис. 80

2009. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle B$ — прямой), площадь которого равна $4 + 2\sqrt{2}$, вписан в окружность. Точка D лежит на этой окружности, причем хорда BD равна 2. Найдите хорды AD и CD .

2010. A, B, C, D — последовательные вершины прямоугольника. Окружность проходит через A и B и касается стороны CD в ее середине. Через D проведена прямая, которая касается той же окружности в точке E , а затем пересекает продолжение стороны AB в точке K . Найдите площадь трапеции $BCDK$, если известно, что $AB = 10$ и что $KE : KA = 3 : 2$.

2011. Вне прямого угла с вершиной C , на продолжении его биссектрисы взята точка O так, что $OC = \sqrt{2}$. С центром в точке O построена окружность радиуса 2. Найдите площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключенной между ними.

2012. Внутри угла в 120° с вершиной C , на его биссектрисе взята точка O так, что $OC = \sqrt{\frac{2}{3}}$. С центром в точке O построена окружность радиуса 1. Найдите площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключенной между ними.

2013. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Диагонали AC и BD пересекаются в точке O , а прямые AB и CD — в точке K . Прямая KO пересекает стороны BC и AD в точках M и N соответственно, $\angle BAD = 30^\circ$. Известно, что в трапеции $ABMN$ и $NMDC$ можно вписать окружности. Найдите отношение площадей треугольника BKC и трапеции $ABCD$.

2014. В треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны a , угол ABC равен 120° . В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке D . Вторая окружность имеет центром точку B и проходит через точку D . Найдите площадь той части вписанного круга, которая находится внутри второго круга.

2015. В треугольнике BCD косинус угла BCD равен $\frac{3}{4}$, $BC = 4$, $CD = 8$. Точ-

ка A лежит на стороне CD данного треугольника так, что $CA = 2$. Найдите отношение площади круга, описанного около треугольника BCD , к площади круга, вписанного в треугольник ABD .

2016. В правильном треугольнике ABC проведена окружность, проходящая через центр треугольника и касающаяся стороны BC в ее середине D . Из точки A проведена прямая, касающаяся окружности в точке E так, что $\angle BAE < 30^\circ$. Найдите площадь треугольника ABE , если площадь треугольника ABC равна $\frac{10}{4 - \sqrt{2}}$.

2017. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC выбраны соответственно точки B_1 и C_1 так, что $AB_1 : AB = 1 : 3$ и $AC_1 : AC = 1 : 2$. Через точки A, B_1 и C_1 проведена окружность. Через точку B_1 проведена прямая, пересекающая отрезок AC_1 в точке D , а окружность — в точке E . Найдите площадь треугольника B_1C_1E , если $AC_1 = 4$, $AD = 1$, $DE = 2$, а площадь треугольника ABC равна 12.

2018. В круге радиуса r проведена хорда длины a . Найдите площадь получившегося сегмента.

2019. В правильном треугольнике ABC , сторона которого равна a , проведена высота BK . В треугольнике ABK и BSK вписано по окружности и к ним проведена общая внешняя касательная, отличная от стороны AC . Найдите площадь треугольника, отсекаемого этой касательной от треугольника ABC .

2020. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{15}$, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 2.

2021. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 8 и 8, а медиана, заключенная между ними, равна 5.

2022. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD равны соответственно a и b . Точки E, F, G и H — середины сторон соответственно AB, BC, CD и DA . Площадь четырехугольника $EFGH$ равна S . Найдите диагонали EG и HF четырехугольника $EFGH$.

2023. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равны между собой. Найдите площадь четырехугольника, если его диагонали равны 8 и 12.

2024. В трапеции $ABCD$ основание AB равно a , основание CD равно b . Найдите площадь трапеции, если известно, что диагонали трапеции являются биссектрисами углов DAB и ABC .

2025. В равнобедренной трапеции отрезок, соединяющий середины оснований, равен 5, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

2026. В равнобедренной трапеции основания равны 40 и 24, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

2027. Расстояния от точки M , лежащей внутри треугольника ABC , до его сторон AC и BC соответственно равны 2 и 4. Найдите расстояние от точки M до прямой AB , если $AB = 10$, $BC = 17$, $AC = 21$.

2028. На стороне AD ромба $ABCD$ взята точка M , причем $MD = 0,3AD$ и $BM = MC = 11$. Найдите площадь треугольника BCM .

2029. В трапеции $ABCD$ $\angle BAD = 45^\circ$, $\angle ADC = 90^\circ$. Окружность, центр которой лежит на отрезке AD , касается прямых AB, BC и CD . Найдите площадь трапеции, если известно, что радиус окружности равен R .

2030. В полукруге расположен прямоугольник $ABCD$ так, что его сторона AB лежит на диаметре, ограничивающем полукруг, а вершины C и D — на ограничивающей полукруг дуге. Ра-

диус полукруга равен 5. Найдите стороны прямоугольника $ABCD$, если его площадь равна 24, а диагональ больше 8.

2031. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса CL и медиана CM . Найдите площадь треугольника ABC , если $LM = a$, $CM = b$.

2032. В правильный треугольник ABC вписан прямоугольный треугольник MNC так, что вершина прямого угла N лежит на AC , а вершина M лежит на стороне AB . В каком отношении точка N должна делить сторону AC , чтобы площадь треугольника MNC составляла $\frac{4}{9}$ от площади треугольника ABC ?

2033. В прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с прямым углом при вершине B вписан прямоугольный треугольник MNC так, что $\angle MNC = 90^\circ$, точка N лежит на AC , а точка M — на стороне AB . В каком отношении точка N должна делить гипотенузу AC , чтобы площадь треугольника MNC составляла $\frac{3}{8}$ от площади треугольника ABC ?

2034. Около трапеции $ABCD$ описана окружность, центр которой лежит на основании AD . Найдите площадь трапеции, если $AB = \frac{3}{4}$, $AC = 1$.

2035. Найдите площадь треугольника ABC , если $AC = 3$, $BC = 4$, а медианы AK и BL взаимно перпендикулярны.

2036. Дан параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $BC = 3$. Найдите площадь этого параллелограмма, если известно, что диагональ AC перпендикулярна отрезку BE , соединяющему вершину B с серединой E стороны AD .

2037. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке M , а перпендикуляр, опущенный из вершины

А на сторону BC , пересекает BC в точке N так, что $BN = NC$ и $AM = 2MD$ (рис. 81). Найдите стороны и площадь четырехугольника $ABCD$, если его периметр равен $5 + \sqrt{3}$, $\angle BAD = 90^\circ$ и $\angle ABC = 60^\circ$.

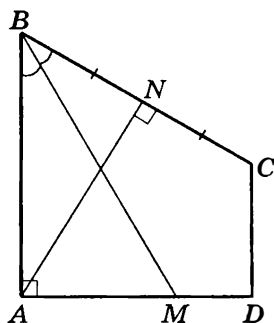


Рис. 81

2038. В трапеции $ABCD$ стороны BC и AD параллельны, $BC = a$, $AD = b$, $\angle CAD = \alpha$, $\angle BAC = \beta$. Найдите площадь трапеции.

2039. Высота трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна 4. Найдите площадь трапеции, если известно, что одна из ее диагоналей равна 5.

2040. Стороны треугольника равны 13, 14 и 15. Найдите радиус окружности, которая имеет центр на средней стороне и касается двух других сторон.

2041. Окружность, центр которой расположен на стороне треугольника, касается двух других его сторон, равных a и b . Найдите радиус этой окружности, если угол между данными сторонами треугольника равен α .

2042. В параллелограмме $ABCD$ большая сторона AD равна 5. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M . Найдите площадь параллелограмма, если $BM = 2$, а $\cos \angle BAM = 0,8$.

2043. В равнобедренной трапеции средняя линия равна a , а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

2044. Даны отрезки a , b и c . С помощью циркуля и линейки постройте такой отрезок x , что $x : a = b : c$.

2045. У треугольника известны две стороны $a = 2$, $b = 3$ и площадь $S = \frac{3\sqrt{15}}{4}$. Медиана, проведенная к его

третьей стороне, меньше ее половины. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

2046. На боковой стороне AB трапеции $ABCD$ взята такая точка M , что $AM : BM = 2 : 3$. На противоположной стороне CD взята такая точка N , что отрезок MN делит трапецию на части, одна из которых по площади втрое больше другой. Найдите отношение $CN : DN$, если $BC : AD = 1 : 2$.

2047. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) диагонали пересекаются в точке M , $BC = b$, $AD = a$. Найдите отношение площади треугольника ABM к площади трапеции $ABCD$.

2048. Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на 20° больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если ее диагональ равна 2.

2049. Пусть r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника. Докажите, что площадь треугольника равна $r(2R + r)$.

2050. Треугольник и вписанный в него ромб имеют общий угол. Стороны треугольника, заключающие этот угол, относятся как $m : n$. Найдите отношение площади ромба к площади треугольника.

2051. В треугольнике ABC проведена прямая DE , параллельная основанию AC . Площадь треугольника ABC равна 8, а площадь треугольника DEC равна 2. Найдите отношение отрезка DE к основанию треугольника ABC .

2052. В трапеции $ABCD$ отрезки AB и CD являются основаниями. Диаго-

нали трапеции пересекаются в точке E . Найдите площадь треугольника BCE , если $AB = 30$, $DC = 24$, $AD = 3$ и $\angle DAB = 60^\circ$.

2053. В трапеции $ABCD$ основание AB в три раза больше основания CD . На основании CD взята точка M так, что $MC = 2MD$. N — точка пересечения прямых BM и AC . Найдите отношение площади треугольника MNC к площади всей трапеции.

2054. Дан треугольник ABC . На сторонах AB и BC взяты точки M и N соответственно; $AB = 3AM$, $BC = 5BN$. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O . Найдите отношение площадей треугольников AOC и ABC .

2055. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC взята точка E так, что $AE : EC = 1 : 3$, а на стороне AD взята такая точка F , что $AF : FD = 1 : 2$. Найдите площадь четырехугольника $ABGE$, где G — точка пересечения прямой FE со стороной BC , если известно, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна 24.

2056. На стороне AB треугольника ABC взята точка E , а на стороне BC — точка D так, что отрезок AE равен 2, а отрезок CD равен 1. Прямые AD и CE пересекаются в точке O . Найдите площадь четырехугольника $BDOE$, если каждая из сторон AB и BC равна 8, а сторона AC равна 6.

2057. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$, площадь которого равна 1, взяты точки: K — на AB , L — на BC , M — на CD , N — на AD . При этом $AK : KB = 2 : 1$, $BL : LC = 1 : 3$, $CM : MD = 1 : 1$, $DN : NA = 1 : 5$. Найдите площадь шестиугольника $AKLCMN$.

2058. Диагональ трапеции делит ее площадь в отношении $3 : 7$. В каком отношении разделится площадь этой трапеции, если из конца меньшего основания провести прямую, параллельную боковой стороне?

2059. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE . Найдите отношение площадей треугольников ABC и AED , если $AB = 6$, $AC = 5$, $CB = 7$.

2060. Известно, что AB — диаметр окружности; BC и AC — хорды, причем $\angle C = 60^\circ$; D — точка пересечения продолжения диаметра AB и касательной CD (рис. 82). Найдите отношение площадей треугольников DCB и DCA .

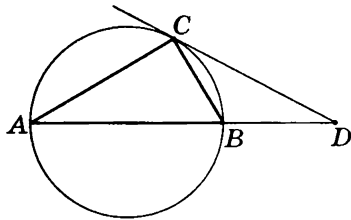


Рис. 82

2061. В треугольнике ABC известно, что $AB = 8$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60^\circ$. Найдите биссектрису AM .

2062. Точка D лежит на стороне BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = CB$), причем $CD = \frac{1}{4} CB$, $\angle ACB = \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $AD = \frac{3}{4}$. Найдите площадь треугольника ABC .

2063. В треугольнике ABC биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке M . Известно, что $AB = BC = 2AC$, $AM = 4$. Найдите площадь треугольника ABC .

2064. В трапецию, у которой меньшее основание равно 6, вписана окружность. Одна из боковых сторон делится точкой касания на отрезки с длинами 9 и 4. Найдите площадь трапеции.

2065. Наименьший из углов прямоугольного треугольника равен α . Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведена окружность, касающаяся гипотенузы. Найдите отношение площадей круга и треугольника.

2066. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, относится к радиусу вписанной в него окружности, как $5 : 2$. Найдите площадь треугольника, если один из его катетов равен a .

2067. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали BE и CE являются биссектрисами углов при вершинах B и C соответственно, $\angle A = 35^\circ$, $\angle D = 145^\circ$, а площадь треугольника BCE равна 11 . Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.

2068. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали AD и BD являются биссектрисами углов при вершинах A и B соответственно, $\angle C = 115^\circ$, $\angle E = 65^\circ$, а площадь треугольника ABD равна 13 . Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.

2069. В ромб, одна из диагоналей которого равна 10 , вписан круг радиуса 3 . Вычислите площадь части ромба, расположенной вне круга. Будет ли эта площадь больше 9 ? (Ответ обоснуйте.)

2070. В треугольнике FGH угол G — прямой, $FG = 8$, $GH = 2$. Точка D лежит на стороне FH , A и B — точки пересечения медиан треугольников FGD и DGH . Найдите площадь треугольника GAB .

2071. В трапеции $BCDE$ ($CD \parallel BE$) известно, что $DE = b$, а расстояние от середины отрезка BC до прямой DE равно d . Найдите площадь трапеции.

2072. В окружность радиуса $2\sqrt{7}$ вписана трапеция $ABCD$, причем ее основание AD является диаметром, а угол BAD равен 60° . Хорда CE пересекает диаметр AD в точке P такой, что $AP : PD = 1 : 3$. Найдите площадь треугольника BPE .

2073. Четырехугольник $ABCD$ вписан в круг с центром в точке O ; $\angle BOA = \angle COD = 60^\circ$. Перпендикуляр BK , опущенный из вершины B на сторону AD , равен 6 ; BC в три раза

меньше AD . Найдите площадь треугольника COD .

2074. На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N . Найдите площадь треугольника AMN , если площадь треугольника ABC равна S , а угол BAC равен α .

2075. Окружность радиуса R проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A . Найдите площадь треугольника ABC , зная, что $\angle ABC = \beta$, $\angle CAB = \alpha$.

2076. Центр окружности, касающейся стороны BC треугольника ABC в точке B и проходящей через точку A , лежит на отрезке AC . Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $BC = 6$ и $AC = 9$.

2077. В треугольнике ABC с периметром $2r$ сторона AC равна a , острый угол ABC равен α . Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается стороны BC в точке K . Найдите площадь треугольника BOK .

2078. Окружность, вписанная в треугольник, точкой касания делит одну из сторон на отрезки длиной 3 и 4 , а противолежащий этой стороне угол равен 120° . Найдите площадь треугольника.

2079. В параллелограмме $ABCD$ острый угол равен α . Окружность радиуса r проходит через вершины A , B , C и пересекает прямые AD и CD в точках M и N . Найдите площадь треугольника BMN .

2080. Из точки C , лежащей вне окружности с центром в точке O , проведены два луча, пересекающие окружность: первый — в точках M и A , второй — в точках N и D . При этом точка N лежит между точками B и C . Углы MOA и NOB равны 120° . Длина перпендикуляра NL , опущенного из точки N на прямую AB , равна 12 . Длина отрезка MN в 5 раз меньше длины

отрезка AB . Найдите площадь треугольника MNC .

2081. Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, причем $KN = 3$, а угол M равен 120° . Прямые LM и MN являются касательными к окружности, описанной около треугольника KLN . Найдите площадь треугольника KLN .

2082. В параллелограмме $ABCD$ длина диагонали BD равна 2, угол C равен 45° , причем прямая CD касается окружности, описанной около треугольника ABD . Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

2083. В треугольнике ABC биссектриса угла при вершине A пересекает сторону BC в точке M , а биссектриса угла при вершине B пересекает сторону AC в точке P . Биссектрисы AM и BP пересекаются в точке O . Известно, что треугольник BOM подобен треугольнику AOP , $BO = (1 + \sqrt{3})OP$, $BC = 1$. Найдите площадь треугольника ABC .

2084. В равносторонний треугольник ABC , сторона которого равна a , вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке D . Вторая окружность, расположенная внутри треугольника ABC , касается внешним образом первой (вписанной) окружности в точке K , касается стороны AB в точке M и стороны BC (рис. 83). Найдите площадь фигуры DKM , ограниченной меньшей из дуг DK , меньшей из дуг KM и отрезком MD .

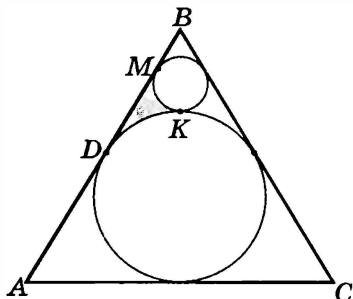


Рис. 83

2085. В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AC = 4$, $AB = BC = 6$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D . Через точку D проведена окружность, касающаяся стороны AC в ее середине и пересекающая отрезок AD в точке E . Найдите площадь треугольника DEC .

2086. Из точки A , находящейся на расстоянии 5 от центра окружности радиуса 3, проведены две секущие AKC и ALB , угол между которыми равен 30° (K, C, L, B — точки пересечения секущих с окружностью). Найдите площадь треугольника AKL , если площадь треугольника ABC равна 10.

2087. Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD . Диагональ AC равна a , а боковая сторона BC равна b . Найдите площадь трапеции.

2088. В параллелограмме со сторонами a и b и углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найдите площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами.

2089. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{13}$, а медиана, проведенная к третьей, равна 2.

2090. Докажите, что площадь прямоугольного треугольника с острым углом в 15° равна $\frac{1}{8}$ квадрата гипотенузы.

2091. В треугольник со сторонами 10, 17 и 21 вписан прямоугольник с периметром 24 так, что одна его сторона лежит на большей стороне треугольника. Найдите стороны прямоугольника.

2092. Найдите площадь трапеции с основаниями 18 и 13 и боковыми сторонами 3 и 4.

2093. В треугольнике ABC угол B равен 120° . На стороне AB взята точка M , а на стороне BC — точка N так, что

$AM = 2MB, CN = 2BN$. Около четырехугольника $AMNC$ описана окружность радиуса 1. Найдите площадь треугольника ABC .

2094. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведены высота CD и медиана CE . Площади треугольников ABC и CDE равны соответственно 10 и 3. Найдите AB .

2095. Периметр прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) равен 72, а разность между медианой CK и высотой CM равна 7. Найдите площадь треугольника ABC .

2096. В круговом секторе OAB , центральный угол которого равен 45° , расположен прямоугольник $KMPT$. Сторона KM прямоугольника лежит на радиусе OA , вершина P — на дуге AB , вершина T — на радиусе OB . Сторона KT на 3 больше стороны KM . Площадь прямоугольника $KMPT$ равна 18. Найдите радиус.

2097. В прямоугольном треугольнике ABC высота, опущенная на гипотенузу AB , равна a , а биссектриса прямого угла равна b . Найдите площадь треугольника ABC .

2098. Высоты равнобедренного остроугольного треугольника, в котором $AB = BC$, пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника ABC , если $AO = 5$, а высота AD равна 8.

2099. Вершины треугольника соединены с центром вписанного круга. Проведенными отрезками площадь этого треугольника разделилась на три части: 28, 60 и 80. Найдите стороны треугольника.

2100. Диагонали выпуклого четырехугольника равны 12 и 18 и пересекаются в точке O . Найдите стороны четырехугольника с вершинами в точках пересечения медиан треугольников AOB, BOC, COD и AOD .

2101. Две стороны треугольника равны 10 и 12, а медиана, проведенная к третьей, равна 5. Найдите площадь треугольника.

2102. В треугольник со сторонами $AB = 4, BC = 2, AC = 3$ вписана окружность. Найдите площадь треугольника AMN , где M, N — точки касания этой окружности со сторонами AB и AC соответственно.

2103. В треугольнике ABC медианы AM и CL перпендикулярны, $BC = a, AC = b$. Найдите площадь треугольника ABM .

2104. Медианы BK и CL треугольника ABC пересекаются в точке M под прямым углом, $AC = b, AB = c$. Найдите площадь четырехугольника $AKLM$.

2105. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) известно, что $AB = c$ и расстояние от середины отрезка CD до прямой AB равно d . Найдите площадь трапеции.

2106. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AD перпендикулярна основаниям и равна 9, $CD = 12$, а отрезок AO , где O — точка пересечения диагоналей трапеции, равен 6. Найдите площадь треугольника BOC .

2107. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O . Найдите площадь четырехугольника $OMCD$.

2108. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N так, что прямые MC и NC делят параллелограмм на три равновеликие части. Найдите MN , если $BD = d$.

2109. Диагонали выпуклого четырехугольника равны a и b , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны между собой. Найдите площадь четырехугольника.

2110. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB равна основанию BC , $\angle BAD = 60^\circ$. Диагональ BD равна 3. Площадь треугольника ACD относится к площади треугольника ABC , как 2 : 1. Найдите все стороны трапеции $ABCD$.

2111. В треугольнике ABC угол A равен 45° , а угол C — острый. Из сере-

дины стороны BC опущен перпендикуляр NM на сторону AC . Площади треугольников NMC и ABC относятся как $1 : 8$. Найдите углы треугольника ABC .

2112. В трапеции $MPQF$ основания $MF = 24$, $PQ = 4$. Высота трапеции равна 5. Точка N делит боковую сторону на отрезки MN и NP . Отрезок MN в три раза больше отрезка NP . Найдите площадь треугольника NQF .

2113. Высота трапеции $ABCD$ равна 7, основания AD и BC равны соответственно 8 и 6. Через точку E , лежащую на стороне CD , проведена прямая BE , которая делит диагональ AC в точке O в отношении $AO : OC = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника OEC .

2114. Площадь трапеции равна 3, основания 1 и 2. Найдите площади треугольников, на которые трапеция разделена диагоналями.

2115. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) биссектрисы BD и AF пересекаются в точке O . Отношение площади треугольника DOA к площади треугольника BOF равно $\frac{3}{8}$. Найдите отношение $\frac{AC}{AB}$.

2116. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка L — середина стороны BC , точка M — середина AD , точка N — середина стороны AB . Найдите отношение площади треугольника LMN к площади четырехугольника $ABCD$.

2117. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 84), где $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = 2$, $AD = 5$, биссектриса угла BAD пересе-

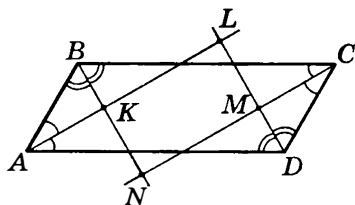


Рис. 84

кается с биссектрисой угла ABC в точке K , с биссектрисой угла CDA — в точке L , а биссектриса угла BCD пересекается с биссектрисой угла CDA в точке M , с биссектрисой угла ABC — в точке N . Найдите отношение площади четырехугольника $KLMN$ к площади параллелограмма $ABCD$.

2118. В треугольнике со сторонами a , b и c проведены биссектрисы, точки пересечения которых с противолежащими сторонами являются вершинами второго треугольника. Докажите, что отношение площадей этих треугольников равно $\frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}$.

2119. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = 8$ и $BC = 4$. На продолжении стороны BC выбрана такая точка M , что прямая AM отсекает от трапеции треугольник, площадь которого в четыре раза меньше площади трапеции. Найдите CM .

2120. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = 12$ и $BC = 8$. На продолжении стороны BC выбрана такая точка M , что $CM = 2,4$. В каком отношении прямая AM делит площадь трапеции $ABCD$?

2121. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Площади треугольников BOC , COD , AOD равны соответственно 20, 40, 60. Найдите угол BAO , если известно, что $AB = 15$, $AO = 8$, а угол BAO больше 31° .

2122. В треугольнике ABC , площадь которого равна 1, на медиане BK взята точка M так, что $MK = \frac{1}{4}BK$.

Прямая AM пересекает сторону BC в точке L . Найдите площадь треугольника ALC .

2123. На продолжениях медиан AK , BL и CM треугольника ABC взяты точки P , Q и R так, что $KP = \frac{1}{2}AK$,

$LQ = \frac{1}{2}BL$ и $MR = \frac{1}{2}CM$. Найдите пло-

щадь треугольника PQR , если площадь треугольника ABC равна 1.

2124. Дан треугольник ABC , площадь которого равна 1. На медианах AK , BL и CN взяты точки P , Q и R так, что $AP:PK = 1:1$, $BQ:QL = 1:2$, $CR:RN = 5:4$. Найдите площадь треугольника PQR .

2125. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки E и F так, что отрезок EF параллелен диагонали BD . Докажите, что площади треугольников BCE и CDF равны.

2126. Докажите, что если два выпуклых четырехугольника расположены так, что середины их сторон совпадают, то их площади равны.

2127. Докажите, что если a и b — две стороны треугольника, γ — угол между ними, l — биссектриса этого угла, то $l = \frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{a+b}$.

$$\text{ла, то } l = \frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{a+b}.$$

2128. Около трапеции описана окружность. Основание составляет с боковой стороной угол α , а с диагональю — угол β . Найдите отношение площади круга к площади трапеции.

2129. В прямоугольной трапеции $ABCD$ основание AB в 1,5 раза больше диагонали AC . Углы BAD и ADC — прямые. Угол DCA равен углу BCA . Боковая сторона AD равна 4. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

2130. Равнобедренная трапеция, у которой угол при основании равен 60° , описана около окружности. В каком отношении прямая, соединяющая точки касания окружности с боковыми сторонами, делит площадь трапеции?

2131. В треугольнике длины сторон относятся как $2:3:4$. В него вписан полукруг с диаметром, лежащим на большей стороне. Найдите отношение площади полукруга к площади треугольника.

2132. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A . Через точку B на их общей касательной AB проведены две прямые, одна из которых пересекает первую окружность в точках M и N , а другая — вторую окружность в точках P и Q . Известно, что $AB = 6$, $BM = 9$, $BP = 5$. Найдите отношение площадей треугольников MNO и PQO , где точка O — точка пересечения прямых NP и NQ .

2133. Окружность C_2 расположена внутри окружности C_1 и касается ее в точке P . Секущая MN окружности C_1 ($M, N \in C_1$) и секущая ST окружности C_2 ($S, T \in C_2$) пересекаются в точке Q , причем PQ является касательной к окружности C_1 . Отрезки NS и TM пересекаются в точке O . Площадь треугольника MON в 16 раз больше площади треугольника OTS . Найдите отрезок PQ , если $SQ = 9$, $MQ = 6$ и $TQ > SQ$, $NQ > MQ$.

2134. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям и равна 6. Основание AD равно 8, а отрезок DO , где O — точка пересечения диагоналей трапеции, равен 6. Найдите площадь треугольника COD .

2135. В треугольнике PQR сторона PQ не больше, чем 9, а сторона PR не больше, чем 12. Площадь треугольника не меньше, чем 54. Найдите длину его медианы, проведенной из вершины P .

2136. В треугольнике ABC точка D лежит на AC , причем $AD = 2DC$. Точка E лежит на BC . Площадь треугольника ABD равна 3, площадь треугольника AED равна 1. Отрезки AE и BD пересекаются в точке O . Найдите отношение площадей треугольников ABO и OED .

2137. Продолжения стороны LM за точку M и стороны KN за точку N выпуклого четырехугольника $KLMN$ пересекаются в точке P , $KN = NP$.

(рис. 85). Площади треугольников KLM и KMN равны соответственно 2 и 1. Отрезки KM и LN пересекаются в точке R . Найдите LR , если $RN = \frac{1}{2}$.

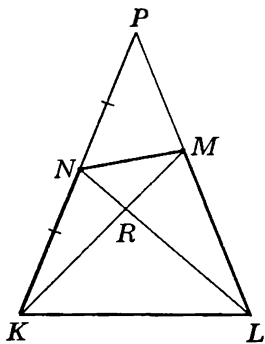


Рис. 85

2138. Дан ромб $ABCD$ с тупым углом при вершине A . На продолжении стороны AD за точку D взята точка K . Отрезки BK и CD пересекаются в точке L . Найдите площадь треугольника ABK , если $BL = 2$, $KL = 5$, а высота ромба равна 1.

2139. Медиана AD и высота CE равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $CP = 5$, $PE = 2$.

2140. Медиана AM и биссектриса CD прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника ABC , если $CO = 9$, $OD = 5$.

2141. Через вершины A , B и C трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) проведена окружность. Известно, что окружность касается прямой CD , а ее центр лежит на диагонали AC . Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $BC = 2$, $AD = 8$.

2142. Окружность с центром O проходит через вершину B ромба $ABCD$ и касается лучей CB и CD . Найдите площадь ромба, если $DO = \frac{3}{4}$, $OC = \frac{5}{4}$.

2143. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, причем AB явля-

ется диаметром окружности. Диагонали AC и BD пересекаются в точке M . Известно, что $BC = 3$, $CM = \frac{3}{4}$, а площадь треугольника ABC втрое больше площади треугольника ACD . Найдите AM .

2144. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 6$, $BC = 4$, $AC = 8$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D . Через точки A , D и C проведена окружность, пересекающая сторону BC в точке E . Найдите площадь треугольника ADE .

2145. Отрезок AB есть диаметр круга, а точка C лежит вне этого круга. Отрезки AC и BC пересекаются с окружностью в точках D и M соответственно. Найдите угол CBD , если площади треугольников DCM и ACB относятся как $1 : 4$.

2146. На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая отрезок AB в точке D . Найдите отношение площадей треугольников ABC и BCD , если известно, что $AC = 15$, $BC = 20$ и $\angle ABC = \angle ACD$.

2147. Окружность касается прямых AB и BC соответственно в точках D и E . Точка A лежит между точками B и D , а точка C — между точками B и E . Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = 13$, $AC = 1$, а точки A , D , E и C лежат на одной окружности.

2148. В трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD и боковыми сторонами AB и CD вписана окружность с центром O . Найдите площадь трапеции, если угол DAB — прямой, $OC = 2$, $OD = 4$.

2149. Две окружности разных радиусов касаются в точке A одной и той же прямой и расположены по разные стороны от нее. Отрезок AB — диаметр меньшей окружности. Из точки B проведены две прямые, касающиеся большей окружности в точках M и N . Прямая, проходящая через точки M и A , пересекает меньшую окружность в

точке K . Известно, что длина отрезка MK равна $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, а угол BMA равен 15° . Найдите площадь фигуры, ограниченной отрезками касательной BM , BN и той дугой MN большей окружности, которая не содержит точку A .

2150. Две окружности, радиусы которых равны R и r , расположены одна вне другой. Отрезки общих внутренних касательных AC и BD (A, B, C, D — точки касания) равны a . Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

2151. Площадь круга, описанного около равнобедренного треугольника, в 36 раз больше площади вписанного круга. Найдите углы треугольника.

2152. Около окружности радиуса R описан параллелограмм. Площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности и параллелограмма равна S . Найдите стороны параллелограмма.

2153. Около окружности радиуса R описана трапеция $ABCD$, меньшее основание BC которой равно a . Пусть E — точка касания окружности со стороной AB и отрезок BE равен b . Найдите площадь трапеции.

2154. Окружность касается сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ и пересекает сторону DC в единственной точке F и сторону BC в единственной точке E . Найдите площадь трапеции $AFCB$, если $AB = 32$, $AD = 40$ и $BE = 1$.

2155. Дан треугольник ABC . Из вершины A проведена медиана AM , а из вершины B — медиана BP . Известно, что угол APB равен углу BMA . Косинус угла ACB равен $0,8$ и $BP = 1$. Найдите площадь треугольника ABC .

2156. В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане BM , а угол ABC равен 120° . Найдите отношение площади треугольника ABC к площади описанного около этого треугольника круга.

2157. Прямоугольный треугольник с острым углом α расположен вну-

три окружности радиуса r так, что гипотенуза является хордой окружности, а вершина прямого угла лежит на диаметре, параллельном гипотенузе. Найдите площадь треугольника.

2158. Даны два одинаковых касающихся круга. Отношение расстояния между их центрами к радиусу равно $2m$. Третий круг касается внешним образом первых двух и их общей касательной. Найдите отношение площади общей части первых двух кругов к площади третьего круга.

2159. Точка O — центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). Прямая AO пересекает отрезок BC в точке M . Найдите углы и площадь треугольника ABC , если $AO = 3$, $OM = \frac{27}{11}$.

2160. В квадрате $ABCD$ площади 1 сторона AD продолжена за точку D и на продолжении взята точка O на расстоянии 3 от точки D (рис. 86). Из точки O проведены два луча. Первый луч пересекает отрезок CD в точке M и отрезок AB в точке N , причем отрезок ON равен a . Второй луч пересекает отрезок CD в точке L и отрезок BC в точке K , причем $\angle BKL = \alpha$. Найдите площадь многоугольника $BKLMN$.

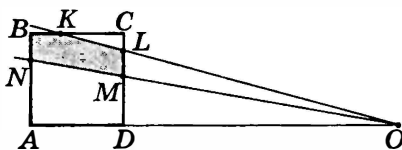


Рис. 86

2161. Найдите площадь трапеции с основаниями 11 и 4 и диагоналями 9 и 12.

2162. Вычислите площадь трапеции, параллельные стороны которой равны 16 и 44, а непараллельные — 17 и 25.

2163. Вычислите площадь трапеции по разности оснований, равной 14,

и двум непараллельным сторонам, равным 13 и 15, если известно, что в трапецию можно вписать окружность.

2164. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 7 и 8, а основания — 3 и 6.

2165. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 35 и 14, а биссектриса угла между ними равна 12.

2166. В трапеции $ABCD$ углы A и D при основании AD соответственно равны 60° и 30° . Точка N лежит на основании BC , причем $BN : NC = 2$. Точка M лежит на основании AD , прямая MN перпендикулярна основаниям трапеции и делит ее площадь пополам. Найдите отношение $AM : MD$.

2167. Радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 2. Точка касания этой окружности делит одну из сторон на отрезки длиной 4 и 6. Определите вид треугольника и вычислите его площадь.

2168. В трапеции основания равны 5 и 15, а диагонали — 12 и 16. Найдите площадь трапеции.

2169°. Дан треугольник ABC . Окружность радиуса R касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно и пересекает медиану BD в точке L так, что $BL = \frac{5}{9} BD$. Найдите площадь треугольника.

2170. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке M , а биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке N . Площадь четырехугольника, образованного пересечением биссектрис AM и CN с отрезками BN и DM , равна 1,2. Найдите углы параллелограмма $ABCD$, если $AB = 3$, $AD = 5$.

2171. В окружность диаметра 1 вписан четырехугольник $ABCD$, у которого угол D — прямой, $AB = BC$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если его периметр равен $\frac{9\sqrt{2}}{5}$.

2172. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 3 и 5, а средняя линия равна 2.

2173. В плоскости даны квадрат с последовательно расположенными вершинами A, B, C, D и точка O , лежащая вне квадрата. Известно, что $AO = OB = 5$ и $OD = \sqrt{13}$. Найдите площадь квадрата.

2174. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса прямого угла CL . Из вершины A ($\angle A > 45^\circ$) на CL опущен перпендикуляр AD . Найдите площадь треугольника ABC , если $AD = a$, $CL = b$.

2175. Внутри прямоугольного треугольника ABC (угол B — прямой) взята точка D так, что площади треугольников ABD и BCD соответственно в три и четыре раза меньше площади треугольника ABC . Отрезки AD и DC равны соответственно a и c . Найдите отрезок BD .

2176. В правильном треугольнике ABC со стороной a точки E и D — середины сторон BC и AC соответственно. Точка F лежит на отрезке DC , отрезки BF и DE пересекаются в точке M . Найдите ME , если известно, что площадь четырехугольника $ABMD$ составляет $\frac{5}{8}$ площади треугольника ABC .

2177. В ромбе $ABCD$ со стороной a угол при вершине A равен 60° , точки E и F — середины сторон AB и CD соответственно. Точка K лежит на стороне BC , отрезки AK и EF пересекаются в точке M . Найдите длину отрезка MK , если известно, что площадь четырехугольника $MKCF$ составляет $\frac{3}{8}$ площади ромба $ABCD$.

2178. В ромбе $ABCD$ со стороной a угол при вершине A равен 120° , точки E и F лежат на сторонах BC и AD соответственно. Отрезок EF и диагональ ромба AC пересекаются в точке M . Площади четырехугольников $BEFA$ и

$ECDF$ относятся, как $1 : 2$. Найдите EM .

2179. Докажите, что медиана AM треугольника ABC делит пополам любой отрезок с концами на AB и AC , параллельный стороне BC .

2180. В окружность радиуса R вписан четырехугольник $ABCD$, P — точка пересечения его диагоналей, $AB = CD = 5$, $AD > BC$. Высота, опущенная из точки B на сторону AD , равна 3 , а площадь треугольника ADP равна $\frac{25}{2}$.

Найдите стороны AD , BC и радиус окружности R .

2181. В прямоугольном треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на катетах BC и AC так, что $CD = CE = 1$. Точка O есть точка пересечения отрезков AD и BE . Площадь треугольника BOD больше площади треугольника AOE на $\frac{1}{2}$. Кроме того,

известно, что $AD = \sqrt{10}$. Найдите гипотенузу AB .

2182. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, точка R лежит на отрезке BC и $BR = RC$. Описанная около треугольника BRO окружность пересекает AB в точке T . Найдите площадь треугольника ABC , если $\angle BOR = 30^\circ$, $RT = 8$, $BT = 6$.

2183. Две прямые, параллельные основаниям трапеции, делят каждую из боковых сторон на три равные части. Вся трапеция разделена ими на три части. Найдите площадь средней части, если площади крайних S_1 и S_2 .

2184. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции и ее основаниями, равны S_1 и S_2 . Найдите площадь трапеции.

2185. Точки P и Q расположены на стороне BC треугольника ABC так, что $BP : PC = 1 : 2$ и $BQ : QC = 4 : 1$. Точка R расположена на продолжении стороны AC , а точка L является серединой той же стороны. При этом точка C при-

надлежит отрезку AR и $AC : CR = 2 : 1$ (рис. 87). Найдите отношение площади четырехугольника $PQST$ к площади треугольника ABC , если S и T являются точками пересечения прямой BR с прямыми LQ и AP соответственно.

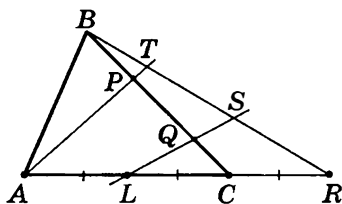


Рис. 87

2186. Площадь треугольника MNP равна 7 . Через точку Q на стороне MN проведена прямая, параллельная стороне MP и пересекающая сторону NP в точке R . На отрезке QR взяты точки A и B . Найдите площадь треугольника NAR , если известно, что $QR : MP = QA : QB = 1 : 5$ и прямая NB проходит через точку пересечения прямых MR и QP .

2187. Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника равны, то его площадь равна произведению длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

2188. В треугольнике ABC , площадь которого равна S , проведены биссектриса CE и медиана BD , пересекающиеся в точке O . Найдите площадь четырехугольника $ADOE$, зная, что $BC = a$, $AC = b$.

2189. В параллелограмме $ABCD$ точка E делит пополам сторону CD , биссектриса угла ABC пересекает в точке O отрезок AE . Найдите площадь четырехугольника $OBCE$, зная, что $AD = a$, $DE = b$, $\angle ABO = \alpha$.

2190. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E — пересечение диагоналей. Известно, что площади треугольников ABE и CDE равны между собой, диагональ AC является биссектрисой угла A , $AB = 4$. Найдите BC .

2191. В треугольнике ABC из вершины A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D , находящейся между точками B и C , причем $\frac{CD}{BC} = \alpha \left(\alpha < \frac{1}{2} \right)$. На стороне BC между точками B и D взята точка E и через нее проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке F . Найдите отношение площадей трапеции $ACEF$ и треугольника ADC , если известно, что $CD = DE$.

2192. В треугольнике ABC из точки E стороны BC проведена прямая, параллельная высоте BD и пересекающая сторону AC в точке F . Отрезок EF делит треугольник ABC на две равновеликие фигуры. Найдите EF , если $BD = 6$, $AD : DC = 2 : 7$.

2193. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведены биссектрисы AA_1 , BB_1 и CC_1 . Площадь треугольника ABC относится к площади треугольника $A_1B_1C_1$ как $9 : 2$. Найдите отношение периметра треугольника $A_1B_1C_1$ к периметру треугольника ABC .

2194. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M , а на стороне BC — точка N . Отрезки AN и BM пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника CMN , если площади треугольников OMA , OAB и OBN соответственно равны S_1 , S_2 и S_3 .

2195. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K так, что $AK : BK = 1 : 2$, а на стороне BC взята точка L так, что $CL : BL = 2 : 1$. Пусть Q — точка пересечения прямых AL и CK . Найдите площадь треугольника ABC , если дано, что площадь треугольника BQC равна 1.

2196. В треугольнике ABC , площадь которого равна 6, на стороне AC взята точка K , делящая эту сторону в отношении $AK : BK = 2 : 3$, а на стороне AC взята точка L , делящая AC в отношении $AL : LC = 5 : 3$. Точка Q пересечения прямых CK и BL отстоит от

прямой AB на расстоянии 1,5. Найдите сторону AB .

2197. Диагональ KM трапеции $KLMN$ в три раза больше отрезка KP этой диагонали. Основание KN трапеции в три раза больше основания LM . Найдите отношение площади трапеции $KLMN$ к площади треугольника KPR , где R — точка пересечения прямой PN и стороны KL .

2198. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3\sqrt{39}$ и $BC = \sqrt{39}$. Кроме того, дано, что угол BAD равен 30° , угол ADC равен 60° . Через точку D проходит прямая, делящая трапецию на две равновеликие фигуры. Найдите отрезок этой прямой, находящийся внутри трапеции.

2199. На стороне AB треугольника ABC между точками A и B взята точка D так, что $AD : AB = \alpha$ ($\alpha < 1$); на стороне BC между точками B и C взята точка E так, что $BE : BC = \beta$ ($\beta < 1$). Через точку E проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке F . Найдите отношение площадей треугольников BDE и BEF .

2200. Дана трапеция $ABCD$. Параллельно ее основаниям проведена прямая, пересекающая боковые стороны трапеции AB и CD соответственно в точках P и Q , а диагонали AC и BD — в точках L и R соответственно. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Известно, что $BC = a$, $AD = b$, а площади треугольников BOC и LOE равны. Найдите отрезок PQ , если точка L лежит между точками A и O .

2201. В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F . Известно, что площадь треугольника BEF равна 5. Найдите площадь треугольника ABC .

2202. В треугольнике ABC проведены две высоты BM и CN , причем $AM : CM = 2 : 3$. Найдите отношение площадей треугольников BMN и ABC , если острый угол BAC равен α .

2203. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K так, что $AK : BK = 1 : 2$, а на стороне BC взята точка L так, что $CL : BL = 2 : 1$. Точка Q — точка пересечения прямых AL и CK . Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BQC равна 1.

2204. На сторонах AB , BC , CD и AD квадрата $ABCD$ со стороной 1 (или на их продолжениях за точки A , B , C и D) расположены соответственно точки P , Q , R и S так, что $AP : PB = BQ : QC = RC : DR = DS : SA = 1 : 3$. Отрезки AQ , BR , SC и DP ограничивают четырехугольник $KLMN$. Найдите его площадь.

2205. Каждая сторона треугольника поделена на три равные части. Точки деления служат вершинами двух треугольников, пересечение которых — шестиугольник. Найдите площадь этого шестиугольника, если площадь данного треугольника равна S .

2206. В трапеции $ABCD$, в которой BC и AD — основания, диагональ AC является биссектрисой угла BAD , равного 120° . Радиус окружности, описанной около треугольника ABD , равен $\sqrt{3}$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Площади треугольников AOD и BOC относятся как $4 : 1$. Найдите все стороны трапеции $ABCD$.

2207. Точка M лежит внутри равностороннего треугольника ABC . Вычислите площадь этого треугольника, если известно, что $AM = BM = 2$, а $CM = 1$.

2208. Площадь треугольника ABC равна S . Углы CAB , ABC и ACB равны α , β и γ . Найдите высоты треугольника.

2209. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается стороны AB в точке D , а стороны AC — в точке E . Найдите площадь треугольника ADE , если известно, что отрезок AD равен 6, отрезок EC равен 2, а угол BCA равен 60° .

2210. В трапеции $ABCD$ основание AD равно 16, сумма диагоналей AC и BD равна 36, угол CAD равен 60° . Отношение площадей треугольников AOD и BOC , где O — точка пересечения диагоналей, равно 4. Найдите площадь трапеции.

2211. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C , углом B , равным 30° , и катетом $CA = 1$, проведена медиана CD . Кроме того, из точки D под углом 15° к гипотенузе проведена прямая, пересекающая отрезок BC в точке F . Найдите площадь треугольника CDF . Укажите ее приближенное значение в виде десятичной дроби с точностью до 0,01.

2212. В равносторонний треугольник ABC со стороной, равной 8, вписан прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ таким образом, что вершина прямого угла C_1 является серединой стороны AB , а один из катетов образует со стороной AB угол 15° (рис. 88). Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$. Укажите приближенное значение в виде десятичной дроби с точностью до 0,01.

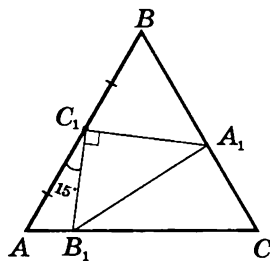


Рис. 88

2213. Найдите площадь трапеции, у которой основания равны 10 и 26, а диагонали перпендикулярны боковым сторонам.

2214. В окружность с центром O вписана трапеция $ABCD$, в которой AD параллельно BC , $AD = 7$, $BC = 3$, $\angle BCD = 120^\circ$. Хорда BM окружности пересекает отрезок AD в точке N такой,

что $ND = 2$. Найдите площадь треугольника BOM .

2215. Две окружности радиусов 3 и 4, расстояние между центрами которых равно 5, пересекаются в точках A и B . Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D так, что $CD = 8$ и точка B лежит между точками C и D . Найдите площадь треугольника ACD .

2216. Около прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 5$ и $BC = 12$ описана окружность. Точки E и G — середины меньших дуг AC и BC этой окружности, точка F — середина дуги AB , не содержащей точки C . Найдите площадь четырехугольника $AEGF$.

2217. Через точку M , расположенную на диаметре окружности радиуса 4, проведена хорда AB , образующая с диаметром угол 30° . Через точку B проведена хорда BC , перпендикулярная данному диаметру. Найдите площадь треугольника ABC , если $AM : MB = 2 : 3$.

2218. Диаметр AB и хорда CD окружности пересекаются в точке E , причем $CE = DE$. Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке K . Отрезки AK и CE пересекаются в точке M . Найдите площадь треугольника CKM , если $AB = 10$, $AE = 1$.

2219. На продолжении стороны BC параллелограмма $ABCD$ за точку C взята точка F . Отрезок AF пересекает диагональ BD в точке E , а сторону CD — в точке G , причем $GF = 2$, а AE на 1 больше EG . Какую часть площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь треугольника ADE ?

2220. В треугольнике ABC длина биссектрисы AL равна l ; в треугольник ABL вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке K , $BK = b$. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что прямая MN проходит через центр окружности, вписанной в треугольник ABC , причем $MB + BN = c$.

Найдите отношение площадей треугольников ABL и MBN .

2221. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Пусть K — точка пересечения его диагоналей. Известно, что $AB > BC > KC$, $BK = 4 + \sqrt{2}$, а периметр и площадь треугольника BKC равны соответственно 14 и 7. Найдите DC .

2222. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Пусть K — точка пересечения его диагоналей. Известно, что $BC > AB > KC$, $KC = 6 + \sqrt{14}$, а периметр и площадь треугольника BKC равны соответственно 22 и 11. Найдите DC .

2223. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A . Их общая касательная касается первой окружности в точке B , а второй — в точке C . Прямая, проходящая через точки A и B , пересекает вторую окружность в точке D . Известно, что $BC = 10$, $AB = 8$. Найдите площадь треугольника BCD .

2224. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Площадь треугольника CDE в 7 раз меньше площади четырехугольника $ABDE$. Найдите DE и радиус окружности, если $AB = 4$ и $\angle C = 45^\circ$.

2225. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, точка R лежит на отрезке BC и $BR = RC$. Описанная около треугольника BRO окружность пересекает AB в точке T . Найдите площадь треугольника ABC , если $\angle BOR = 30^\circ$, $RT = 8$, $BT = 6$.

2226. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) биссектрисы AM и BK пересекаются в точке O . Площади треугольников BOM и COM соответственно равны 25 и 30. Найдите площадь треугольника ABC и проекцию отрезка OM на прямую BC .

2227. Через середину гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC

проведена прямая, пересекающая катет BC в точке D , а продолжение катета AB за точку A — в точке E . Найдите площадь треугольника ABC , если $CD = 1, AE = 2, \angle CAB = \arccos \frac{3}{5}$.

2228. Через середину стороны AC равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке K , а продолжение стороны AB за точку A — в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $CK = 2, AP = 5, \angle ABC = \arccos \frac{1}{4}$.

2229. В треугольнике ABC на сторонах AC и BC расположены точки D и E соответственно так, что BD — биссектриса треугольника $ABC, DC = CE = \frac{4}{3}, BD = 2, \angle ABC = \angle ADB$. Найдите BC и площадь треугольника ABC .

2230. Четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность с центром O . Докажите, что ломаная AOC делит его на две равновеликие части.

2231. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 8, а площадь 2, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до ее меньшего основания.

2232. Около окружности радиуса 1 описана равнобедренная трапеция, площадь которой равна 5. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого служат точки касания окружности и трапеции.

2233. Около окружности радиуса R описана трапеция. Хорда, соединяющая точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции, равна a . Хорда параллельна основанию трапеции. Найдите площадь трапеции.

2234. В треугольнике ABC с периметром $2p$ острый угол BAC равен α . Окружность с центром в точке O касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC в точках K и L соответ-

ственно. Найдите площадь треугольника AOL .

2235. В равносторонний треугольник со стороной a вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что ее отрезок внутри треугольника равен b . Найдите площадь треугольника, отсеченного этой касательной.

2236. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность, которая касается боковой стороны AB в точке M . Через точку M проведен перпендикуляр NL к стороне AC треугольника ABC (точка L — основание этого перпендикуляра). Найдите угол BCA , если известно, что площадь треугольника ABC равна 1, а площадь четырехугольника $LMBC$ равна s .

2237. На стороне квадрата во внешнюю сторону встроены прямоугольный треугольник, гипотенуза которого совпадает со стороной квадрата. Докажите, что биссектриса прямого угла этого треугольника делит площадь квадрата пополам.

2238. В круг радиуса R вписан шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\angle A = \angle C = \angle E, AB = a, CD = b, EF = c$. Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$.

2239. В треугольнике ABC расположены три окружности равных радиусов так, что каждая из окружностей касается двух сторон треугольника (рис. 89). Одна из окружностей (с центром O_1) касается двух других (с центра-

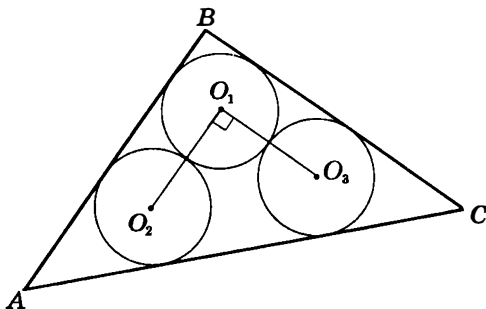


Рис. 89

ми O_2 и O_3 соответственно) и $\angle O_2O_1O_3 = 90^\circ$. Установите, что больше: площадь круга, ограниченного окружностью с центром O_1 , или пятая часть площади треугольника ABC .

2240. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , стороны AB — в точке E и стороны BC — в точке F . Известно, что $AD = R$, $DC = a$. Найдите площадь треугольника BEF .

2241. На стороне AC остроугольного треугольника ABC взята точка D так, что $AD = 1$, $DC = 2$ и BD является высотой треугольника ABC . Окружность радиуса, равного 2, проходящая через точки A и D , касается в точке D окружности, описанной около треугольника BDC . Найдите площадь треугольника ABC .

2242. Точки K, L, M делят стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ в отношении $AK : BK = CL : BL = CM : DM = 1 : 2$. Радиус описанной окружности треугольника KLM равен $\frac{5}{2}$, $KL = 4$, $LM = 3$. Какова площадь четырехугольника $ABCD$, если известно, что $KM < KL$?

2243. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 1$ и $AD = 3$ такова, что в нее можно вписать окружность и вокруг нее можно описать окружность. Определите, где находится центр описанной вокруг трапеции $ABCD$ окружности, т. е. расположен ли он внутри, или вне, или же на одной из сторон трапеции $ABCD$. Найдите также площадь описанного круга.

2244. В треугольнике ABC основание высоты CD лежит на стороне AB , медиана AE равна 5, высота CD равна 6. Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника ADC в три раза больше площади треугольника BCD .

2245. В трапеции $ABCD$ известны длины оснований $AD = 23$ и $BC = 8$ и

диагоналей $AC = 13$, $BD = 5\sqrt{17}$. Найдите площадь трапеции.

2246. В треугольник вписан круг радиуса 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на отрезки, равные 6 и 8. Найдите две другие стороны треугольника.

2247. Окружность с центром в точке пересечения диагоналей AC и BC равнобедренной трапеции $ABCD$ касается меньшего основания BC и боковой стороны AB . Найдите площадь трапеции $ABCD$, если известно, что ее высота равна 16, а радиус окружности равен 3.

2248. Квадрат $ABCD$ и окружность расположены так, что окружность касается прямой AC в точке C , а центр окружности лежит по ту же сторону от прямой AC , что и точка D . Касательные к окружности, проведенные из точки D , образуют угол 120° . Найдите отношение площади квадрата к площади круга, ограниченного данной окружностью.

2249. Основание AC равнобедренного треугольника ABC является хордой окружности, центр которой лежит внутри треугольника ABC . Прямые, проходящие через точку B , касаются окружности в точках D и E . Найдите площадь треугольника DBE , если $AB = BC = 2$, $\angle ABC = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$, а радиус окружности равен 1.

2250. Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, проходит через середину стороны BC и пересекает сторону AB в точке D так, что $AD = \frac{1}{3}AB$. Найдите площадь треугольника ABC , если $AC = 1$.

2251. В треугольнике ABC угол A равен $\arccos \frac{7}{8}$, $BC = a$, а высота, опущенная из вершины A , равна сумме двух других высот. Найдите площадь треугольника ABC .

2252. В круге радиуса 1 проведены хорды $AB = \sqrt{2}$ и $BC = \frac{10}{7}$. Найдите площадь части круга, лежащей внутри угла ABC , если угол BAC — острый.

2253°. Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках M и N . Периметр треугольника AMN равен $3\sqrt{2}$, сторона BC равна $\sqrt{2}$, а отрезок AO в три раза больше радиуса вписанной в треугольник ABC окружности. Найдите площадь треугольника ABC .

2254. В окружности проведены хорды AC и BD , пересекающиеся в точке E , причем касательная к окружности, проходящая через точку A , параллельна BD . Известно, что $CD : ED = 3 : 2$ и $S(ABE) = 8$. Найдите площадь треугольника ABC .

2255. В параллелограмме соединены середина каждой стороны с концом следующей стороны, отчего получился внутренний параллелограмм. Докажите, что его площадь составляет $\frac{1}{5}$ площади данного параллелограмма.

2256. Площадь трапеции $ABCD$ равна 30. Точка P — середина боковой стороны AB . Точка R на стороне CD выбрана так, что $2CD = 3RD$. Прямые AR и PD пересекаются в точке Q . Найдите площадь треугольника APQ , если $AD = 2BC$.

2257. Медианы треугольника равны 3, 4 и 5. Найдите площадь треугольника.

2258. Медианы треугольника равны 5, 6 и 5. Найдите площадь треугольника.

2259. Произвольный четырехугольник разделен диагоналями на четыре треугольника; площади трех из них равны 10, 20 и 30, и каждая меньше площади четвертого треугольника.

Найдите площадь данного четырехугольника.

2260. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AD . Площади треугольников ABD и ADC равны соответственно S_1 и S_2 . Найдите AC .

2261. В треугольнике ABC угол C равен 30° , а угол A — острый. Перпендикулярно стороне BC проведена прямая, отсекающая от треугольника ABC треугольник CNM (точка N лежит между вершинами B и C). Площади треугольников CNM и ABC относятся как 3 : 16. Отрезок MN равен половине высоты BH треугольника ABC . Найдите отношение $AN : NC$.

2262. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Найдите отношение площади треугольника $A_1B_1C_1$ к площади треугольника ABC , если $\frac{AB}{A_1B_1} = \sqrt{3}$.

2263. В окружность радиуса 7 вписан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Стороны AB и BC равны. Площадь треугольника ABD относится к площади треугольника BCD как 2 : 1. Угол ADC равен 120° . Найдите все стороны четырехугольника $ABCD$.

2264. Из точки A к окружности радиусом R проводится касательная AM (M — точка касания). Секущая, проходящая через точку A , пересекает окружность в точках K и L , причем L — середина отрезка AK , а угол AMK равен 60° (рис. 90). Найдите площадь треугольника AMK .

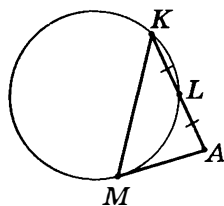


Рис. 90

2265. Докажите, что произведение отрезков, на которые гипотенуза прямоугольного треугольника делится точкой касания вписанной в него окружности, равно площади этого треугольника.

2266. На отрезке AB взята точка C , отрезки AB и CB служат диаметрами окружностей. Хорда AM касается меньшей окружности в точке D . Прямая BD пересекает большую окружность в точке N , $\angle DAB = \alpha$, $AB = 2R$. Найдите площадь четырехугольника $ABMN$.

2267. Четырехугольник $PQRS$ вписан в окружность. Диагонали PR и QS перпендикулярны и пересекаются в точке M . Известно, что $PS = 13$, $QM = 10$, $QR = 26$. Найдите площадь четырехугольника $PQRS$.

2268. Даны две концентрические окружности. В большей из них проведены две пересекающиеся хорды KL и MN , которые пересекают меньшую окружность в точках K_1 , L_1 и M_1 , N_1 соответственно (точки с индексом 1 расположены ближе к одноименным точкам без индекса). Хорды K_1N_1 и L_1M_1 меньшей окружности пересекаются в точке F . Найдите отношение площадей треугольников K_1FL_1 и M_1FN_1 , если $KL = 5NN_1$, а хорда M_1N_1 равна среднему геометрическому отрезков KL и MM_1 .

2269. В окружности проведены хорды AC и BD , пересекающиеся в точке E , причем касательная к окружности, проходящая через точку A , параллельна BD . Известно, что $CD : ED = 3 : 2$ и $S(ABE) = 8$. Найдите площадь треугольника ABC .

2270. Диагонали вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E , причем $\angle ADB = \frac{\pi}{8}$, $BD = 6$ и $AD \cdot CE = DC \cdot AE$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

2271. В треугольнике ABC сторона AB равна 3, $\angle ACB = \arcsin \frac{3}{5}$. Хорда

KN окружности, описанной около треугольника ABC , пересекает отрезки AC и BC в точках M и L соответственно. Известно, что $\angle ABC = \angle CML$, площадь четырехугольника $ABLM$ равна 2, а $LM = 1$. Найдите высоту треугольника KNC , опущенную из вершины C , и его площадь.

2272. Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках M и N . Периметр треугольника AMN равен $3\sqrt{2}$,

$BC = \sqrt{2}$, а отрезок AO в три раза больше радиуса вписанной в треугольник ABC окружности. Найдите площадь треугольника ABC .

2273. Около треугольника ABC описана окружность. Медиана AD продолжена до пересечения с этой окружностью в точке E . Известно, что $AB + AD = DE$, $\angle BAD = 60^\circ$, $AE = 6$. Найдите площадь треугольника ABC .

2274. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB . Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а $PQ = 2\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

2275. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) угол ADB в два раза меньше угла ACB , $BC = AC = 5$, $AD = 6$. Найдите площадь трапеции.

2276. Около окружности радиуса $\frac{2}{\sqrt{3}}$ описана равнобедренная трапеция. Угол между диагоналями трапеции, опирающийся на основание, равен $2 \arctg \frac{2}{\sqrt{3}}$. Найдите отрезок, соединяющий точки касания окружности с

большим основанием трапеции и одной из ее боковых сторон.

2277. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции относится к радиусу, как $3 : 5$. Найдите отношение периметра трапеции к длине вписанной окружности.

2278. Около окружности радиуса R описана равнобедренная трапеция. E и K — точки касания этой окружности с боковыми сторонами трапеции. Угол между основанием AB и боковой стороной AD трапеции равен 60° . Докажите, что EK параллельна AB , и найдите площадь трапеции $ABKE$.

2279. На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 12 , взяты точки A и B так, что $OA = 15$, $AB = 5$ и A лежит между O и B . Из точек A и B проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой OB . Найдите площадь треугольника ABC , где C — точка пересечения этих касательных.

2280. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AC и BC в точках M и N соответственно и пересекает биссектрису BD в точках P и Q . Найдите отношение площадей треугольников PQM и PQN , если $\angle A = \frac{\pi}{4}$, $\angle B = \frac{\pi}{3}$.

2281. В треугольник ABC вписана окружность с центром O . Прямая BO пересекает эту окружность в точках M и N , а отрезки AO и CO пересекают окружность соответственно в точках P и Q . Найдите отношение площадей треугольников MNP и MQN , если $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$.

2282. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB угол B равен $\arctg \frac{8}{15}$. Окружность радиуса 1 , вписанная в угол C , касается стороны

CB в точке M и отсекает от основания отрезок KE . Найдите площадь треугольника KMB , если известно, что точки A , K , E , B следуют на основании AB в указанном порядке.

2283. Около треугольника APK описана окружность радиуса 1 . Продолжение стороны AP за вершину P отсекает от касательной к окружности, проведенной через вершину K , отрезок BK , равный 7 . Найдите площадь треугольника APK , если известно, что угол ABK равен $\arctg \frac{2}{7}$.

2284. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Площадь описанного круга в 12 раз больше площади вписанного круга. Найдите углы трапеции.

2285. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 1 и равна диагонали BD . Диагонали относятся как $1 : \sqrt{3}$. Найдите площадь той части круга, описанного около треугольника BCD , которая не принадлежит кругу, описанному около треугольника ADC .

2286. Две окружности разных радиусов касаются в точке C одной и той же прямой и расположены по одну сторону от нее. Отрезок CD — диаметр большей окружности (рис. 91). Из точки D проведены две прямые, касающиеся меньшей окружности в точках

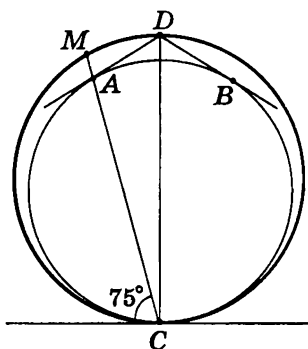


Рис. 91

А и В. Прямая, проходящая через точки С и А, образует с общей касательной к окружностям в точке С угол 75° и пересекает большую окружность в точке

М. Известно, что $AM = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Найдите площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных DA, DB и дугой ACB меньшей окружности.

2287. Через вершины А и В треугольника ABC проведена окружность радиуса $2\sqrt{5}$, отсекающая от прямой BC отрезок $4\sqrt{5}$ и касающаяся прямой AC в точке А. Из точки В проведен перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке F. Найдите площадь треугольника ABC, если $BF = 2$.

2288. На стороне BC треугольника BCD выбрана точка E, а на стороне BD — точка F так, что угол BEF равен углу BDC. Площадь круга, описанного около треугольника CFD, в 5 раз меньше площади круга, описанного около треугольника BEF. Отношение площади четырехугольника CEFD к площади треугольника BEF равно $\frac{9}{16}$. Угол FDE равен 45° . Найдите угол CED.

2289. В трапеции ABCD диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, $\angle BAC = \angle CDB$. Продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке K, образуя угол AKD, равный 30° . Найдите площадь треугольника AKD, если площадь трапеции равна P.

2290. В трапеции ABCD диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD, а диагональ DB перпендикулярна боковой стороне AB. Продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке K, образуя треугольник AKD с углом 45° при вершине K. Площадь трапеции ABCD равна P. Найдите площадь треугольника AKD.

2291. На продолжении основания равнобедренного треугольника взята

точка. Докажите, что разность расстояний от этой точки до прямых, содержащих боковые стороны треугольника, равна высоте, опущенной на боковую сторону.

2292. Остроугольный равнобедренный треугольник и трапеция вписаны в окружность. Одно основание трапеции является диаметром окружности, а боковые стороны параллельны боковым сторонам треугольника. Найдите отношение площадей трапеции и треугольника.

2293. В равнобедренном треугольнике ABC точки M и N находятся на боковых сторонах AB и BC соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $AM = 5$, $AN = 2\sqrt{37}$, $CM = 11$, $CN = 10$.

2294. Диагонали трапеции равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.

2295. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Одна из них равна 6. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен 4,5. Найдите площадь трапеции.

2296. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60° . Найдите площадь трапеции.

2297. Отношение оснований трапеции равно 3 : 2, а отношение боковых сторон равно 5 : 3. Точка пересечения биссектрис углов при большем основании трапеции лежит на меньшем основании. Найдите углы трапеции.

2298. В равнобедренной трапеции ABCD углы при основании AD равны 30° , диагональ AC является биссектрисой угла BAD. Биссектриса угла BCD пересекает основание AD в точке M, а отрезок BM пересекает диагональ AC в точке N. Найдите площадь треугольника ANM, если площадь трапеции ABCD равна $2 + \sqrt{3}$.

2299. В прямоугольной трапеции $ABCD$ (BC параллельно AD , AB перпендикулярно AD) меньшее основание AD равно 3, а боковая сторона CD равна 6. Точка E , середина стороны CD , соединена отрезком прямой с точкой B . Известно, что $\angle CBE = \alpha$. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

2300. В параллелограмме $ABCD$ угол C — острый, сторона AB равна 3, сторона BC равна 6. Из вершины C опущен перпендикуляр CE на продолжение стороны AB . Точка E , основание перпендикуляра CE , соединена отрезком прямой с точкой F , серединой стороны AD . Известно, что $\angle AEF = \alpha$. Найдите площадь четырехугольника $AECD$.

2301. Прямая, параллельная основаниям трапеции, делит ее на две трапеции, площади которых относятся, как 1 : 2. Найдите отрезок этой прямой, заключенный внутри трапеции, если основания равны a и b .

2302. Вершины ромба расположены на сторонах параллелограмма, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если отношение диагоналей параллелограмма равно k .

2303. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Площадь треугольника CDE в семь раз меньше площади четырехугольника $ABDE$. Найдите хорду DE и радиус окружности, если $AB = 4$ и $\angle C = 45^\circ$.

2304. На стороне AC треугольника ABC взята точка E . Через точку E проведены прямая DE параллельно стороне BC и прямая EF параллельно стороне AB (D и F — точки на сторонах треугольника). Докажите, что $S(BDEF) = 2\sqrt{S(ADE) \cdot S(EFC)}$.

2305. Трапеция ABC разделена прямой, параллельной ее основаниям

AD и BC , на две равновеликие трапеции. Найдите отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами, если основания трапеции равны a и b .

2306. Точки P и Q расположены на стороне BC треугольника ABC так, что $BP : PQ : QC = 1 : 2 : 3$. Точка R делит сторону AC этого треугольника так, что $AR : RC = 1 : 2$. Чему равно отношение площади четырехугольника $PQST$ к площади треугольника ABC , если S и T — точки пересечения прямой BR с прямыми AQ и AP соответственно?

2307. Площадь трапеции $ABCD$ равна 6. Пусть E — точка пересечения продолжений боковых сторон этой трапеции. Через точку E и точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, которая пересекает меньшее основание BC в точке P , а большее основание AD — в точке Q . Точка F лежит на отрезке EC , причем $EF : FC = EP : EQ = 1 : 3$. Найдите площадь треугольника EPF .

2308. Внутри треугольника ABC взята точка P так, что площади треугольников ABP , BCP и ACP равны. Докажите, что P — точка пересечения медиан треугольника.

2309. Дан выпуклый четырехугольник площади S . Внутри него выбирается точка и отображается симметрично относительно середин его сторон (рис. 92). Получаются четыре вершины нового четырехугольника. Найдите его площадь.

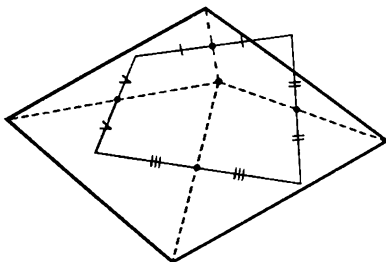


Рис. 92

2310. В треугольнике ABC биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O . Найдите отношение площади треугольника ABC к площади четырехугольника $ODCE$, зная, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

2311. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M , и угол между ними равен α . Пусть O_1, O_2, O_3 и O_4 — центры окружностей, описанных соответственно около треугольников AMB, BCM, CDM и DAM . Найдите отношение площадей четырехугольников $ABCD$ и $O_1O_2O_3O_4$.

2312. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен α . Пусть O — произвольная точка внутри параллелограмма, O_1, O_2, O_3, O_4 — точки, симметричные точке O относительно прямых AB, BC, CD и AD соответственно. Найдите отношение площади четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ к площади параллелограмма.

2313. Стороны параллелограмма равны 3 и 2, а угол между ними равен $\arccos \frac{5}{16}$. Две взаимно перпендикулярные прямые делят параллелограмм на четыре равновеликие части. Найдите длины отрезков, на которые эти прямые делят стороны параллелограмма.

2314. Пусть E, F, G — такие точки на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC , для которых $AE : EB = BF : FC = CG : GA = k$, где $0 < k < 1$. Найдите отношение площади треугольника, образованного прямыми AF, BG и CE , к площади треугольника ABC .

2315. Два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, площади которых равны S_1 и S_2 , расположены так, что лучи A_1B_1 и A_2B_2 , B_1C_1 и B_2C_2 , C_1A_1 и C_2A_2 параллельны, но противоположно направлены. Найдите площадь треугольника с вершинами в серединах отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 .

2316. Площадь треугольника ABC равна $15\sqrt{3}$. Угол BAC равен 120° . Угол ABC больше угла ACB . Расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , равно 2. Найдите медиану треугольника ABC , проведенную из вершины B .

2317. В трапеции $ABCD$ основание AD равно $\sqrt{7}$. Диагонали AC и DB пересекаются в точке K . Известно, что $AK = 1, KD = 2, \angle BAC = \angle DAC$. Найдите площадь треугольника ABC .

2318. В прямоугольнике $ABCD$ сторона AD вдвое больше стороны AB . Внутри прямоугольника расположена точка M , причем $AM = \sqrt{2}, BM = 2, CM = 6$. Найдите косинус угла AMB и площадь прямоугольника $ABCD$.

2319. В параллелограмме $ABCD$ угол A — тупой, $AD > AB, AD = 7$. Точка A_1 симметрична точке A относительно прямой BD , а точка A_2 симметрична точке A_1 относительно прямой AC и лежит на диагонали BD . Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $BA_2 = \frac{4}{5}BD$.

2320. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 60^\circ, \angle B = 45^\circ$. Продолжения высот треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках M, N, P . Найдите отношение площадей треугольников ABC и MNP .

2321. В круге проведены два перпендикулярных друг другу диаметра AE и BF . На дуге EF взята точка C . Хорды CA и CB пересекают диаметры BF и AE в точках P и Q соответственно. Докажите, что площадь четырехугольника $APQB$ равна квадрату радиуса круга.

2322. В равнобедренной трапеции лежат две окружности. Одна из них, радиуса 1, вписана в трапецию, а вторая касается двух сторон трапеции и первой окружности. Расстояние от верши-

ны угла, образованного двумя сторонами трапеции, касающимися второй окружности, до точки касания окружностей вдвое больше диаметра второй окружности. Найдите площадь трапеции.

2323. Дан угол, равный α . На его биссектрисе взята точка L ; P и M — проекции K на стороны угла. На отрезке PM взята точка A такая, что $KA = a$. Прямая, проходящая через A перпендикулярно KA , пересекает стороны угла в точках B и C . Найдите площадь треугольника BKC .

2324. Площадь ромба $ABCD$ равна 2. В треугольнике ABD , образованный сторонами AB , AD и диагональю BD данного ромба, вписана окружность, которая касается стороны AB в точке K . Через точку K проведена прямая KL , параллельная диагонали AC ромба (точка L лежит на стороне BC). Найдите угол BAD , если известно, что площадь треугольника KLB равна a .

2325. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна стороне AB . Некоторая окружность касается стороны BC параллелограмма $ABCD$ в точке P и касается прямой, проходящей через вершины A и B этого же параллелограмма, в точке A . Через точку P проведен перпендикуляр PQ к стороне AB (точка Q — основание этого перпендикуляра). Найдите угол ABC , если известно, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна $\frac{1}{2}$, а площадь пятиугольника $QPCDA$ равна S .

2326. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 1. Некоторая окружность касается диагонали AC прямоугольника $ABCD$ в точке E и касается прямой, проходящей через вершины C и D этого же прямоугольника, в точке D . Через точку E проведен перпендикуляр EF к стороне CD (точка F — основание этого перпендикуляра). Найдите величину угла BAC , если известно, что площадь трапеции $AEFD$ равна a .

2327. В треугольнике ABC сторона AC равна 3, $\angle BAC = 30^\circ$ и радиус опи-

санной окружности равен 2. Докажите, что площадь треугольника ABC меньше 3.

2328. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 5, $\angle CAB = 30^\circ$, радиус описанной окружности равен $2\sqrt{2}$. Докажите, что площадь треугольника ABC строго меньше $5\sqrt{2}$.

2329. В четырехугольнике $ABCD$ сторона AB равна стороне BC , диагональ AC равна стороне CD , а $\angle ACB = \angle ACD$. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACB и ACD , относятся как 3 : 4. Найдите отношение площадей этих треугольников.

2330. (Формула Брахмагупты.) Докажите, что если стороны вписанного четырехугольника равны a , b , c и d , то его площадь S может быть вычислена по формуле

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ — полупериметр четырехугольника.

2331. В круге проведены две взаимно перпендикулярные и пересекающиеся хорды AB и CD . Известно, что $AB = BC = CD$. Установите, что больше: площадь круга или площадь квадрата со стороной AB .

2332. Окружность радиуса R , проведенная через вершины A , B и C прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle A = \angle B = 90^\circ$), пересекает отрезки AD и CD соответственно в точках M и N так, что $AM : AD = CN : CD = 1 : 3$ (рис. 93). Найдите площадь трапеции.

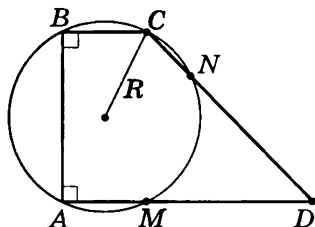


Рис. 93

2333. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и являются диаметрами двух равных касающихся окружностей радиуса r . Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $BC : AD = k$.

2334. Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность. Диаметр CD пересекает сторону AB в точке M . Отношение площади треугольника MBC к площади треугольника AMC равно k . Найдите $DM : DC$.

2335. В треугольнике ABC биссектриса $АН$ пересекает высоты BP и CT в точках K и M соответственно, причем эти точки лежат внутри треугольника. Известно, что $BK : KP = 2$ и $MT : KP = 3 : 2$. Найдите отношение площади треугольника PBC к площади описанного около этого треугольника круга.

2336. Через произвольную точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. При этом треугольник разбивается на три параллелограмма и три треугольника. Докажите, что произведение площадей параллелограммов в восемь раз больше произведения площадей треугольников.

2337. В ромб $ABCD$ вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AD в точке M и пересекающая отрезок MC в точке N такой, что $MN = 2NC$. Найдите углы и площадь ромба.

2338. В трапеции основания равны a и b , диагонали перпендикулярны, а угол между боковыми сторонами равен α . Найдите площадь трапеции.

2339. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 и 10, а основание BC равно 2. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB . Найдите площадь трапеции.

2340. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC является хордой окружности радиуса 10. Вершина

C лежит на диаметре окружности, который параллелен гипотенузе. Угол CAB равен 75° . Найдите площадь треугольника ABC .

2341. В трапеции $ABCD$ точки K и M являются соответственно серединами оснований $AB = 5$ и $CD = 3$. Найдите площадь трапеции, если треугольник AMB — прямоугольный, а DK есть высота трапеции.

2342. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) угол ABD в два раза меньше угла ACB ; $BC = AC = 5$, $AD = 6$. Найдите площадь трапеции.

2343. В трапеции $ABCD$ основание BC равно 13, а угол BAD острый и вдвое больше угла ADC . Окружность с центром на прямой BC касается прямых AC , AD и отрезка CD . Найдите площадь трапеции $ABCD$, если известно, что радиус окружности равен 5.

2344. В треугольнике ABC проведена биссектриса CQ . Около треугольника BCQ описана окружность радиуса $\frac{1}{3}$, центр которой лежит на отрезке AC . Найдите площадь треугольника ABC , если $AQ : AB = 2 : 3$.

2345. В трапеции $ABCD$ сторона AD является большим основанием. Известно, что $AD = CD = 4\frac{2}{3}$, $\angle BAD = 90^\circ$ и $\angle BCD = 150^\circ$. На основании AD построен треугольник AED так, что точки B и E лежат по одну сторону от прямой AD , причем $AE = DE$. Длина высоты этого треугольника, проведенная из вершины E , равна $1\frac{2}{5}$. Найдите площадь общей части трапеции $ABCD$ и треугольника AED .

2346. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найдите площадь треугольника.

2347. На сторонах AB , BC , CD и DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M , N , K и L , причем

$AM : MB = CK : KD = 1 : 2$, а $BN : NC = DL : LA = 1 : 3$. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого — точки пересечения отрезков AN , BK , CL и DM , если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1.

2348. Площадь треугольника ABC равна S . Найдите площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника ABC .

2349. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E — пересечение диагоналей. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 7, а площадь всего четырехугольника не превосходит 28; сторона AD равна $\sqrt{5}$. Найдите BC .

2350. Дана трапеция $MNPQ$ с основаниями MQ и NP . Прямая, параллельная основаниям, пересекает боковую сторону MN в точке A , а боковую сторону PQ — в точке B . Отношение площадей трапеций $ANPB$ и $MABQ$ равно $\frac{2}{7}$. Найдите AB , если $NP = 4$, $MQ = 6$.

2351. В четырехугольнике $ANCD$ острый угол между диагоналями равен α . Через каждую вершину проведена прямая, перпендикулярная диагонали, не содержащей эту вершину. Найдите отношение площади четырехугольника, ограниченного этими прямыми, к площади четырехугольника $ABCD$.

2352. На сторонах AB , AC и BC правильного треугольника ABC расположены соответственно точки C_1 , B_1 и A_1 так, что треугольник $A_1B_1C_1$ является правильным. Высота BD треугольника ABC пересекает сторону A_1C_1 в точке O . Найдите отношение $\frac{BO}{BD}$, если

$$\frac{A_1B_1}{AB} = n.$$

2353. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отношение диагоналей BD

и AC равно k . Найдите отношение площади этого четырехугольника к площади ромба, вершины которого лежат на сторонах четырехугольника, а стороны параллельны диагоналям четырехугольника.

2354. Точка внутри правильного $2n$ -угольника соединена с вершинами. Возникшие $2n$ -треугольники раскрашены попеременно в голубой и красный цвет. Докажите, что сумма площадей голубых треугольников равна сумме площадей красных: а) для $n = 4$, б) для $n = 3$, в) для произвольного n .

2355. В треугольнике ABC дано: $\angle ACB = 60^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$. На продолжении AC за вершину C берется точка K так, что $AC = CK$. На продолжении BC за вершину C берется точка M так, что треугольник с вершинами C , M и K подобен исходному. Найдите $BC : MK$, если известно, что $CM : MK < 1$.

2356. Прямоугольный треугольник ABC имеет периметр 54, причем катет AC больше, чем 10. Окружность радиуса 6, центр которой лежит на катете BC , касается прямых AB и AC . Найдите площадь треугольника ABC .

2357. Дана окружность, диаметр MN которой равен 16. На касательной к этой окружности в точке M отложен отрезок MP , длина которого больше, чем 15. Из точки P проведена вторая касательная к окружности, пересекающая прямую MN в точке Q . Найдите площадь треугольника MPQ , если его периметр равен 72.

2358. Точки K , L , M , N , P расположены последовательно на окружности радиуса $2\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника KLM , если $LM \parallel KN$, $KM \parallel NP$, $MN \parallel LP$, а угол LOM равен 45° , где O — точка пересечения хорд LN и MP .

2359. Трапеции $ABCD$ и $ACDE$ с равными большими основаниями (соответственно AD и AC) вписаны в ок-

ружность (рис. 94). Чему равен радиус этой окружности, если площадь треугольника ADE равна $1 + \sqrt{3}$, а угол COD равен 60° , где O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$.

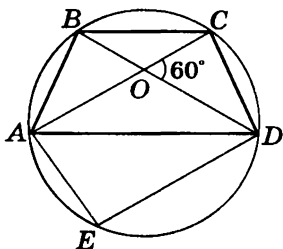


Рис. 94

2360. Вокруг треугольника MKN описана окружность радиуса r с центром в точке O . Длина стороны HM равна a . Для сторон треугольника выполнено соотношение $HK^2 - HM^2 = HM^2 - MK^2$. Найдите площадь треугольника OLK , где L — точка пересечения медиан треугольника MKN .

2361. Докажите, что площадь треугольника можно выразить по формуле $S = r_a(p - a)$, где r_a — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны, равной a , p — полупериметр треугольника.

2362. Площадь треугольника ABC равна $2\sqrt{3} - 3$, а угол BAC равен 60° . Радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжения сторон AB и AC , равен 1. Найдите углы ABC и ACB данного треугольника.

2363. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 4, причем $AC = BC$. На прямой AB взята точка D , удаленная от прямых AC и BC на расстояния 11 и 3 соответственно. Найдите косинус угла BDC .

2364. Хорда AB стягивает дугу окружности, равную 120° . Точка C лежит на этой дуге, а точка D лежит на хорде AB . При этом $AD = 2$, $BD = 1$,

$DC = \sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника ABC .

2365. Точки K, L, M делят стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ в отношении $AK : BK = CL : BL = CM : DM = 1 : 2$. Радиус окружности, описанной около треугольника KLM , равен $\frac{5}{2}$, $KL = 4$, $LM = 3$. Какова площадь четырехугольника $ABCD$, если известно, что $KM < KL$?

2366. Дан прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 10$. Окружность радиуса $4 - 2\sqrt{2}$ с центром в точке K касается сторон AB и AD . Окружность радиуса $4 + 2\sqrt{2}$ с центром в точке L , лежащей на стороне CD , касается стороны AD и первой окружности. Найдите площадь треугольника CLM , если M — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую, проходящую через точки K и L .

2367. В трапеции $ABCD$ точки K и M являются соответственно серединами оснований AB и CD . Известно, что AM перпендикулярно DK и CK перпендикулярно BM , а угол CKD равен 60° . Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 1.

2368. Дан ромб $ABCD$. Окружность радиуса R касается прямых AB и AD в точках B и D соответственно и пересекает сторону BC в точке L так, что $4BL = BC$. Найдите площадь ромба.

2369. Площадь треугольника ABC равна 1, $AC = 2BC$, точка K — середина стороны AC . Окружность с центром в точке K пересекает сторону AB в точках M и N , при этом $AM = MN = NB$. Найдите площадь части треугольника ABC , заключенной внутри круга.

2370. Прямая, параллельная гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC , пересекает катет AC в точке D , а катет BC — в точке E , причем $DE = 2$, а $BE = 1$. На гипотенузе взята

точка F так, что $BF = 1$. Известно также, что угол FCB равен α . Найдите площадь треугольника ABC .

2371. На биссектрисе острого угла AOC взята точка B . Через точку B проведена прямая, перпендикулярная к OB и пересекающая сторону AO в точке K , а сторону OC — в точке L . Через точку B проведена еще одна прямая, пересекающая сторону AO в точке M (M — между O и K), сторону OC — в точке N так, что $\angle MON = \angle MNO$. Известно, что $MK = a$, $LN = \frac{3a}{2}$. Найдите площадь треугольника MON .

2372. Две окружности с центрами A и B и радиусами соответственно 2 и 1 касаются друг друга. Точка C лежит на прямой, касающейся каждой из окружностей, и находится на расстоянии $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ от середины отрезка AB . Найдите площадь S треугольника ABC , если известно, что $S > 2$.

2373. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S_1, S_2, S_3 . Найдите площадь данного треугольника.

2374. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1 так, что $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 2 : 1$. Найдите площадь треугольника, вершины которого — попарные пересечения отрезков AA_1, BB_1, CC_1 , если площадь треугольника ABC равна 1.

2375. Из точки P , расположенной внутри остроугольного треугольника ABC , опущены перпендикуляры на его стороны. Длины сторон и опущенных на них перпендикуляров соответственно равны a и k, b и m, c и n . Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

2376. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая, проходящая через вершину C , пересекает прямые AB и AD в точках K и L . Площади треугольников KBC и CDL равны p и q . Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

2377. В параллелограмме $ABCD$ острый угол BAD равен α . Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей, описанных соответственно около треугольников DAB, DAC, DBC, ABC . Найдите отношение площади четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ к площади параллелограмма $ABCD$.

2378. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) медианы AD и EC пересекаются в точке O . Отношение радиуса окружности, вписанной в треугольник AOC , к радиусу окружности, вписанной в четырехугольник $ODBE$, равно $\frac{2}{3}$. Найдите отношение $\frac{AC}{BC}$.

2379. Продолжения сторон KN и LM выпуклого четырехугольника $KLMN$ пересекаются в точке P , а продолжения сторон KL и MN — в точке Q . Отрезок PQ перпендикулярен биссектрисе угла KQN . Найдите сторону MN , если $KQ = 6, NQ = 4$, а площади треугольника LQM и четырехугольника $KLMN$ равны.

2380. Пусть M и N — середины противоположных сторон BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$, отрезки AM и BN пересекаются в точке P , а отрезки DM и CN — в точке Q . Докажите, что сумма площадей треугольников APB и CQD равна площади четырехугольника $MPNQ$.

2381. Пусть C_1, A_1, B_1 — такие точки на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC , для которых $\frac{BA_1}{A_1C} = p$,

$\frac{CB_1}{B_1A} = q, \frac{AC_1}{C_1B} = r$. Найдите отношение площади треугольника, образованного прямыми AA_1, BB_1 и CC_1 , к площади треугольника ABC .

2382. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырехугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырехугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.

2383. Стороны остроугольного треугольника ABC соответственно равны a , b и c . Точка M находится внутри треугольника. Углы AMB , BMC и CMA равны между собой. Найдите сумму отрезков AM , BM и CM .

2384. В остроугольном треугольнике ABC точка D выбрана на стороне AB так, что $\angle DCA = 45^\circ$. Точка D_1 симметрична точке D относительно прямой BC , а точка D_2 симметрична точке D_1 относительно прямой AC и лежит на продолжении отрезка BC за точку C . Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = \sqrt{3} CD_2$, $AB = 4$.

2385. Две окружности пересекаются в точках A и K . Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK . Точки B и C лежат на разных окружностях (рис. 95).

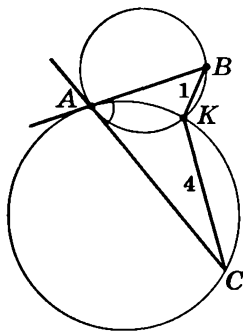


Рис. 95

Прямая, содержащая отрезок AB , касается одной окружности в точке A . Прямая, содержащая отрезок AC , касается другой окружности также в точке A . Отрезок BK равен 1, отрезок CK равен 4, а тангенс угла CAB равен $\frac{1}{\sqrt{15}}$. Найдите площадь треугольника ABC .

2386. Пусть P — середина стороны AB выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что если площадь треугольника PDC равна половине площади четырехугольника $ABCD$, то стороны BC и AD параллельны.

2387. На плоскости дан угол величины $\frac{\pi}{3}$. Окружность касается одной стороны этого угла, пересекает другую сторону в точках A и B и пересекает биссектрису угла в точках C и D . Хорда AB равна $\sqrt{6}$, хорда CD равна $\sqrt{6}$. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью.

2388. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN , O — центр описанной около ABC окружности. Известно, что $\angle ABC = \beta$, а площадь четырехугольника $NOMB$ равна S . Найдите AC .

2389. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC , угол A равен 30° , угол D равен 60° . На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках K и L . Найдите отношение площадей четырехугольников, на которые хорда KL разбивает трапецию $ABCD$.

2390. В остроугольном треугольнике ABC с углом C , равным 30° , высоты пересекаются в точке M . Найдите площадь треугольника AMB , если расстояния от центра окружности, описанной около треугольника ABC , до сторон BC и AC соответственно равны $\sqrt{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2391. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ равна 2, $\angle BAD = 45^\circ$. Точки E и F расположены на диагонали BD , причем $\angle AEB = \angle CFD = 90^\circ$, $BF = \frac{3}{2} BE$. Найдите площадь параллелограмма.

2392. Вершина C прямоугольника $ABCD$ лежит на стороне KM равнобедренной трапеции $ABKM$ ($BK \parallel AM$), P — точка пересечения отрезков AM и

CD. Найдите углы трапеции и отношение площадей прямоугольника и трапеции, если $AB = 2BC$, $AP = 3BK$.

2393. Вершина D квадрата $ABCD$ лежит на стороне EF равнобедренной трапеции $BCEF$ ($CE \parallel BF$). Найдите углы трапеции и отношение площадей трапеции и квадрата, если $4CE = BF$.

2394. На отрезке AB лежат точки C и D , причем точка C — между точками A и D . Точка M взята так, что прямые AM и MD перпендикулярны и прямые CM и MB тоже перпендикулярны. Найдите площадь треугольника AMB , если известно, что угол CMD равен α , а площади треугольников AMD и CMB равны S_1 и S_2 соответственно.

2395. Точки D и K расположены соответственно на стороне AB и высоте BE остроугольного треугольника ABC . Найдите площадь равностороннего треугольника DKC , если известно, что $AE = \frac{27}{8}$, $EC = 2$, $AD : DB = 1 : 8$.

2396. Равнобедренный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) и треугольник DEF расположены так, что точка D лежит на стороне AB , а точка E — на продолжении стороны AB за точку A . Отрезок KL является средней линией в обоих треугольниках, и площадь четырехугольника $DKLB$ составляет $\frac{5}{8}$ площади треугольника ABC . Найдите угол DEF .

2397. Параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle BAD = \arcsin \frac{1}{3}$, и ромб $BCEF$ с острым углом CBE расположены так, что точки E и F лежат на продолжении стороны AD за точку D . Площадь четырехугольника $BDCE$ составляет $\frac{3}{4}$ площади параллелограмма. Найдите углы ромба.

2398°. На окружности по разные стороны от диаметра AC расположены точки B и D . Известно, что $AB = \sqrt{6}$, $CD = 1$, а площадь треугольника ABC

втрое больше площади треугольника BCD . Найдите радиус окружности.

2399°. Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Найдите площадь параллелограмма, если $\angle A = 2 \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}$,

$OA = 2\sqrt{10}$, $OD = 5$. (Найдите все решения).

2400°. Стороны четырехугольника равны a , b , c и d . Известно, что в этот четырехугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Докажите, что его площадь равна $\sqrt{abcd}$.

2401°. На сторонах AB , AC и BC правильного треугольника ABC расположены соответственно точки C_1 , B_1 и A_1 так, что треугольник $A_1B_1C_1$ является правильным. Отрезок BB_1 пересекает сторону C_1A_1 в точке O , причем $\frac{BO}{OB_1} = k$. Найдите отношение площади

треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$.

2402°. Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M , а продолжения сторон AB и CD — в точке O . Отрезок MO перпендикулярен биссектрисе угла AOD . Найдите отношение площадей треугольника AOD и четырехугольника $ABCD$, если $OA = 12$, $OD = 8$, $CD = 2$.

2403°. Через середину каждой диагонали выпуклого четырехугольника проведена прямая, параллельная другой диагонали; точка пересечения этих прямых соединена с серединами сторон четырехугольника. Докажите, что четырехугольник разбивается таким образом на четыре равновеликие части.

2404°. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Площадь каждого из треугольников ABC , BCD , CDE , DEA , EAB равна S . Найдите площадь данного пятиугольника.

2405°. На сторонах AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбираются произвольные точки E и F соответственно. Докажите, что середины отрезков AF , BF , CE и DE являются вершинами выпуклого четырехугольника, причем его площадь не зависит от выбора точек E и F .

2406. В трапеции $ABCD$ точка K — середина основания AB , M — середина CD . Найдите площадь трапеции, если известно, что DK — биссектриса угла D , BM — биссектриса угла B , наибольший из углов при нижнем основании равен 60° , а периметр равен 30.

2407. Две окружности пересекаются в точках K и C . Их центры расположены по одну сторону от прямой, содержащей отрезок KC . Точки A и B лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AK , касается одной окружности в точке K . Прямая, содержащая отрезок BK , касается другой окружности также в точке K . Известно, что $AK = 2$, $BK = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} \angle AKB = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Найдите площадь треугольника ABC .

2408. Пусть a, b, c, d — последовательные стороны четырехугольника. Докажите, что если S — его площадь, то $S \leq \frac{ac+bd}{2}$, причем равенство имеет место только для вписанного четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны.

2409. В окружность с центром O вписан треугольник ABC ($\angle A > 90^\circ$). Продолжение биссектрисы AF угла A этого треугольника пересекает окружность в точке L , а радиус AO пересекает сторону BC в точке E . Пусть AH — высота треугольника ABC . Найдите отношение площади треугольника OAL к площади четырехугольника $OEFL$, если известно, что $AL = 4\sqrt{2}$, $AH = \sqrt{2\sqrt{3}}$ и $\angle AEH = 60^\circ$.

2410. Около треугольника ABC ($\angle A > 90^\circ$) описана окружность с центром O . Продолжение биссектрисы AL этого треугольника пересекает окружность в точке F . Обозначим через E точку пересечения радиуса AO со стороной BC . Пусть AH — высота треугольника ABC . Найдите отношение площади четырехугольника $FOEL$ к площади треугольника AEL , если известно, что $AH = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AF = 2\sqrt{3}$, $\angle AEH = 30^\circ$.

2411. Два одинаковых правильных треугольника ABC и CDE с стороной 1 расположены так, что имеют только одну общую точку C и угол BCD меньше, чем 60° (рис. 96). Точка K — середина AC , точка L — середина CE , точка M — середина BD . Площадь треугольника KLM равна $\frac{\sqrt{3}}{5}$. Найдите BD .

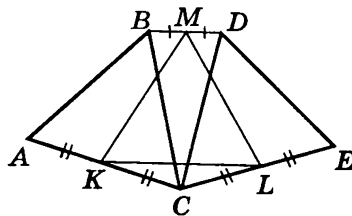


Рис. 96

2412. В круг радиуса R с центром в точке O вписана трапеция $ABCD$ ($BC < AD$ и точка O лежит внутри трапеции). Непараллельные стороны трапеции AB и CD равны R . Точка K — середина радиуса OA , точка L — середина радиуса OD , точка M — середина стороны BC . Отношение площади трапеции к площади треугольника KLM равно 4. Найдите MC .

2413. Углы треугольника ABC удовлетворяют равенству $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$. Найдите площадь этого треугольника, если радиусы вписанной и описанной окружностей равны $\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$ соответственно.

2414. Две прямые делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника на три равные части. Докажите, что между этими прямыми заключена треть площади четырехугольника.

2415. В трапеции $ABCD$ угол BAD равен 60° , а меньшее основание BC равно 5. Найдите боковую сторону CD , если площадь трапеции равна $\frac{1}{2}(AD \cdot BC + AB \cdot CD)$.

2416. Точка E стороны BC и точка F стороны AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ расположены так, что $BE = 2EC$, $AF = 2FD$. На отрезке AE находится центр окружности радиуса r , касающейся сторон AB , BC и CD . На отрезке BF находится центр окружности такого же радиуса r , касающейся сторон AB , AD и CD . Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, зная, что указанные окружности внешним образом касаются друг друга.

2417. В остроугольном треугольнике ABC ($AB > BC$) проведены высоты AM и CN . Точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности. Известно, что угол ABC равен β , а площадь четырехугольника $NOMB$ равна S . Найдите AC .

2418. Диагонали BD и AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны, пересекаются в точке O , $AO = 2$, $OC = 3$. Точка K лежит на стороне BC , причем $BK : KC = 1 : 2$. Треугольник AKD — равносторонний. Найдите его площадь.

2419. В треугольнике ABC известно, что $AB = AC$ и угол BAC — тупой. Пусть D — точка пересечения биссектрисы угла ABC со стороной AC , M — основание перпендикуляра, опущенного из A на сторону BC , E — основание перпендикуляра, опущенного из D на сторону BC . Через точку B проведен также перпендикуляр к BD до пересечения со стороной BC в точке F . Из-

вестно, что $ME = FC = a$. Найдите площадь треугольника ABC .

2420. Из точки P , расположенной внутри остроугольного треугольника ABC , опущены перпендикуляры на стороны AB , BC и CA . Длины перпендикуляров соответственно равны l , m , n . Вычислите площадь треугольника ABC , если величины углов BAC , ABC и ACB соответственно равны α , β и γ .

2421. Поделим каждую сторону выпуклого четырехугольника $ABCD$ на три равные части и соединим отрезками соответствующие точки на противоположных сторонах. Докажите, что площадь «среднего» четырехугольника в 9 раз меньше площади четырехугольника $ABCD$.

2422. Докажите, что прямая, делящая пополам периметр и площадь треугольника, проходит через центр его вписанной окружности.

2423. На дуге окружности, стягиваемой хордой KN , взяты точки L и M . Биссектрисы углов KLM и LMN пересекаются в точке P , лежащей на хорде KN . Известно, что $KL : KN = 2 : 5$. Найдите:

а) отношение расстояний от точки P до прямых KL и MN ;

б) отношение площадей треугольников KLP и MPN .

2424. В остроугольном треугольнике две высоты равны 3 и $2\sqrt{2}$, а их точка пересечения делит третью высоту в отношении 5 : 1, считая от вершины треугольника. Найдите площадь треугольника.

2425. Докажите, что прямая делит периметр и площадь описанного многоугольника в равных отношениях тогда и только тогда, когда она проходит через центр вписанной окружности.

2426. На отрезке AC взята точка B и на отрезках AB , BC , CA как на диаметрах построены полуокружности S_1 , S_2 , S_3 по одну сторону от AC . Най-

дите радиус окружности, касающейся всех трех полуокружностей, если известно, что ее центр удален от прямой AC на расстояние, равное a .

2427. Площадь трапеции $ABCD$ равна S , отношение оснований — $AD : BC = 2 : 1$. Отрезок MN расположен так, что он параллелен диагонали BD , пересекает диагональ AC , а отрезок AM параллелен отрезку CN . Найдите площадь четырехугольника $AMND$, если $CN : AM = 3 : 1$, $BD : MN = 6 : 1$. (Найдите все решения.)

11. КООРДИНАТЫ. ВЕКТОРЫ

2428. Точка $M(x_0; y_0)$ — середина отрезка с концами в точках $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Докажите, что

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ и } y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

2429. Пусть M — середина отрезка AB , O — произвольная точка. Докажите, что $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$.

2430. Даны точки $A(-1; 5)$ и $B(3; -7)$. Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка AB .

2431. Даны точки $A(3; 5)$, $B(-6; -2)$ и $C(0; -6)$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

2432. Даны точки $A(2; 4)$, $B(6; -4)$ и $C(-8; -1)$. Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.

2433. Даны точки $A(0; -2)$, $B(-2; 1)$, $C(0; 0)$ и $D(2; -9)$. Укажите те из них, которые лежат на прямой $2x - 3y + 7 = 0$.

2434. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3, 1)$ параллельно: а) оси x ; б) оси y .

2435. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3; 2)$ параллельно прямой $2x - 3y + 4 = 0$.

2436. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения

прямых $3x + 2y - 5 = 0$ и $x - 3y + 2 = 0$ параллельно оси ординат.

2437. Найдите радиус и координаты центра окружности, заданной уравнением:

а) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$;

б) $x^2 + y^2 - 2(x - 3y) - 15 = 0$;

в) $x^2 + y^2 = x + y + \frac{1}{2}$.

2438. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AF} = \vec{b}$. Найдите векторы $\vec{AD}$, $\vec{BD}$, $\vec{FD}$ и $\vec{BM}$, где M — середина стороны EF .

2439. На рис. 97 дана точка $M(-1, 3)$. Найдите координаты точки, симметричной точке M относительно: а) оси x ; б) оси y ; в) начала координат; г) точки $K(3; 1)$; д) биссектрисы I и III координатных углов; е) биссектрисы II и IV координатных углов.

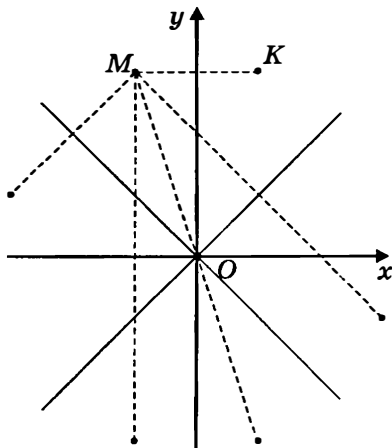


Рис. 97

2440. Найдите координаты вершин треугольника, стороны которого лежат на прямых $2x + y - 6 = 0$, $x - y + 4 = 0$ и $y + 1 = 0$.

2441. Даны точки $A(-2; 2)$, $B(-2; -2)$ и $C(6; 6)$. Составьте уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника ABC .

2442. Даны точки $A(4; 1)$, $B(-8; 0)$ и $C(0; -6)$. Составьте уравнение прямой, на которой лежит медиана AM треугольника ABC .

2443. Докажите, что точки $A(-1; -2)$, $B(2; -1)$ и $C(8; 1)$ лежат на одной прямой.

2444. Даны точки $A(-2; 0)$, $B(1; 6)$, $C(5; 4)$ и $B(2; -2)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

2445. Найдите расстояние между точкой $A(1; 7)$ и точкой пересечения прямых $x - y - 1 = 0$ и $x + 3y - 12 = 0$.

2446. Даны точки $A(0; 0)$, $B(-2; 1)$, $C(3; 3)$, $D(2; -1)$ и окружность $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$. Выясните, где расположены эти точки: на окружности, внутри или вне окружности.

2447. Точка M делит сторону BC треугольника ABC в отношении $\frac{BM}{MC} = \frac{2}{5}$. Известно, что $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.

Найдите вектор $\overrightarrow{AM}$.

2448. Даны точки $A(-2; 1)$, $B(2; 5)$ и $C(4; -1)$. Точка D лежит на продолжении медианы AM за точку M , причем четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм. Найдите координаты точки D .

2449. Окружность с центром в точке $M(3; 1)$ проходит через начало координат. Составьте уравнение окружности.

2450. Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 — медианы треугольника ABC . Докажите, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

2451. Пусть M — середина отрезка AB , M_1 — середина отрезка A_1B_1 . Докажите, что $\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1})$.

2452. Пусть M — точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$, O — произвольная точка. Докажите, что

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

2453. $M_1, M_2, \dots, M_6$ — середины сторон выпуклого шестиугольника $A_1A_2\dots A_6$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6 .

2454. Две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD окружности с центром O пересекаются в точке M . Докажите, что

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

2455. Даны точки $A(-6; -1)$, $B(1; 2)$ и $C(-3; -2)$. Найдите координаты вершины M параллелограмма $ABMC$.

2456. Докажите, что прямые, заданные уравнениями $y = k_1x + l_1$ и $y = k_2x + l_2$, перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1k_2 = -1$.

2457. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Докажите, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

2458. Пусть M — точка пересечения медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC . Докажите, что

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} = \vec{0}.$$

2459. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, у которых O и O_1 — точки пересечения диагоналей. Докажите равенство:

$$\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1}).$$

2460. Даны точки $A(0; 0)$, $B(4; 0)$ и $C(0; 6)$. Составьте уравнение окружности, описанной около треугольника ABC .

2461. На продолжениях сторон треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что $\overrightarrow{AB_1} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC_1} = 2\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA_1} = 2\overrightarrow{CA}$. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если известно, что площадь треугольника ABC равна S .

2462. Пусть точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC и AB треугольника ABC (рис. 98, а, б). Докажите, что для любой точки O выполняется равенство

$$\vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1 = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

2463. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC , O — произвольная точка. Докажите, что

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}).$$

2464. Найдите длину хорды, которую на прямой $y = 3x$ отсекает окружность $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

2465. Докажите, что прямая $3x - 4y + 25 = 0$ касается окружности $x^2 + y^2 = 25$, и найдите координаты точки касания.

2466. Составьте уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $A(2; 1)$.

2467. Найдите координаты точек пересечения окружностей $(x - 2)^2 + (y - 10)^2 = 50$ и $x^2 + y^2 + 2(x - y) - 18 = 0$.

2468. Даны точки $A(-6; 1)$ и $B(4; 6)$. Найдите координаты точки C , делящей отрезок AB в отношении $2 : 3$, считая от точки A .

2469. Даны точки $A(5; 5)$, $B(8; -3)$ и $C(-4; 1)$. Найдите координаты точки

пересечения медиан треугольника ABC .

2470. Даны точки $A(-1; 3)$, $B(1; -2)$, $C(6; 0)$ и $D(4; 5)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — квадрат.

2471. Известно, что прямая с угловым коэффициентом k проходит через точку $M(x_0; y_0)$. Докажите, что ее уравнение имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$.

2472. Известно, что прямая проходит через точки $M(x_1; y_1)$ и $N(x_2; y_2)$, причем $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Докажите, что

$$\text{ее уравнение имеет вид } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

2473. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $A(-1; 1)$, $B(9; 3)$ и $C(1; 7)$.

2474. Даны точки $A(-2; 3)$, $B(2; 6)$, $C(6; -1)$ и $D(-3; -4)$. Докажите, что диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны.

2475. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1; 4)$ перпендикулярно прямой $x - 2y + 4 = 0$.

2476. Даны точки $A(6; 1)$, $B(-5; -4)$, $C(-2; 5)$. Составьте уравнение прямой, на которой лежит высота треугольника ABC , проведенная из вершины A .

2477. С помощью метода координат докажите, что суммы квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до противоположных вершин прямоугольника равны между собой.

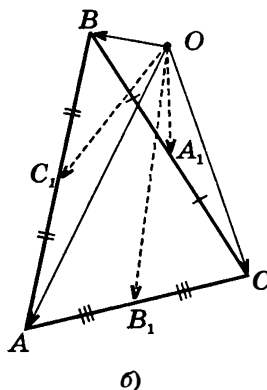
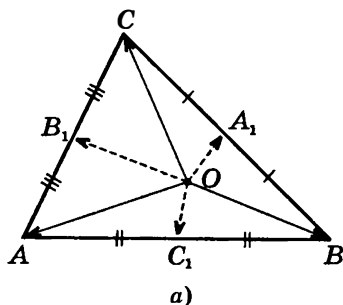


Рис. 98

2478. Пусть M и N — точки пересечения медиан треугольников ABC и PQR соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR})$.

2479. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника.

2480. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(0; 7)$ и касающейся окружности

$$(x - 15)^2 + (y - 2) = 25.$$

2481. Даны точки $A(5; -1)$, $B(4; -8)$, $C(-4; -4)$. Найдите координаты точки пересечения высот треугольника ABC .

2482. С помощью метода координат найдите геометрическое место точек плоскости, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна.

2483. Докажите, что расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, равно $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

2484. Составьте уравнение окружности с центром в точке $M(3; 2)$, касающейся прямой $y = 2x + 6$.

2485. Точка M лежит на прямой $3x - 4y + 34 = 0$, а точка N — на окружности $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$. Найдите наименьшее расстояние между точками M и N .

2486. Найдите расстояние между параллельными прямыми $y = -3x + 5$ и $y = -3x - 4$.

2487. Даны две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ и неотрицательное число λ . Найдите координаты точки M луча AB , для которой $AM : AB = \lambda$.

2488. Даны треугольник ABC и точка M . Известно, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Докажите, что M — точка

пересечения медиан треугольника ABC .

2489. Даны точки A и B . Найдите геометрическое место точек M , для которых $AM = 2BM$.

2490. Даны точки A , B и положительное число d . Найдите геометрическое место точек M , для которых $AM^2 + BM^2 = d$.

2491. На диагоналях AC и CE правильного шестиугольника $ABCDEF$ взяты точки M и N соответственно такие, что $AM : AC = CN : CE = \lambda$. Известно, что точки B , M и N лежат на одной прямой. Найдите λ .

2492. Докажите, что при произвольном выборе точки O равенство $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + (1 - k)\overrightarrow{OB}$ является необходимым и достаточным условием принадлежности различных точек A , B , C одной прямой.

2493. Стороны параллелограмма разделены по обходу в равных отношениях. Докажите, что точки деления служат вершинами параллелограмма, а центры этих параллелограммов совпадают.

2494. В четырехугольнике $ABCD$ точка E — середина AB , K — середина CD . Докажите, что середины отрезков AK , CE , BK и DE являются вершинами параллелограмма.

2495. На сторонах треугольника заданы точки, которые делят стороны в одном и том же отношении (в каком-либо одном направлении обхода). Докажите, что точки пересечения медиан данного треугольника и треугольника, имеющего вершинами точки деления, совпадают.

2496. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ с единичными сторонами середины P , Q сторон AB , CD и середины S , T сторон BC , DE соединены отрезками PQ и ST . Пусть M и N — середины отрезков PQ и ST . Найдите отрезок MN .

2497. Проведены четыре радиуса OA , OB , OC и OD окружности с центром O . Докажите, что если

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0},$$

то $ABCD$ — прямоугольник.

2498. Дан квадрат $ABCD$, сторона которого равна $4\sqrt{2}$. Точка O выбрана в плоскости квадрата так, что $OB = 10$, $OD = 6$. Найдите угол между вектором OB и вектором, направленным из точки O в наиболее удаленную от нее вершину квадрата.

2499. Дан квадрат $ABCD$, сторона которого равна 8. Точка O выбрана в плоскости квадрата так, что $OB = 10\sqrt{2}$, $OD = 6\sqrt{2}$. Найдите угол между вектором OB и вектором, направленным из точки O в ближайшую к ней вершину квадрата.

2500. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC , O — центр описанной окружности. Докажите, что

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

2501. Точки M , K , N и L — середины сторон AB , BC , CD и DE пятиугольника $ABCDE$, P и Q — середины отрезков MN и KL (рис. 99). Докажите, что

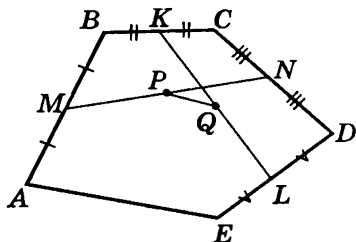


Рис. 99

отрезок PQ в четыре раза меньше стороны AE и параллелен ей.

2502. Из медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC составлен треугольник KMN , а из медиан KK_1 , MM_1 и NN_1

треугольника KMN — треугольник PQR . Докажите, что третий треугольник подобен первому, и найдите коэффициент подобия.

2503. Из произвольной точки M внутри равностороннего треугольника опущены перпендикуляры MK_1 , MK_2 , MK_3 на его стороны. Докажите, что $\vec{MK}_1 + \vec{MK}_2 + \vec{MK}_3 = \frac{3}{2} \vec{MO}$, где

O — центр треугольника.

2504. Докажите, что сумма квадратов расстояний от какой-нибудь точки окружности до вершин правильного вписанного треугольника есть величина постоянная, не зависящая от положения точки на окружности.

2505. Даны точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и прямая $ax + by + c = 0$. Известно, что $ax_1 + by_1 + c > 0$, а $ax_2 + by_2 + c < 0$. Докажите, что точки A и B расположены по разные стороны от этой прямой.

2506. Две окружности касаются внешним образом в точке A . Прямая, проходящая через точку A , вторично пересекает окружности в точках B и C . Найдите геометрическое место середин отрезков BC .

2507. O — центр правильного многоугольника $A_1A_2A_3\dots A_n$, X — произвольная точка плоскости.

а) Докажите, что

$$\vec{OA}_1 + \dots + \vec{OA}_n = \vec{0}.$$

б) Докажите, что

$$\vec{XA}_1 + \dots + \vec{XA}_n = n \cdot \vec{XO}.$$

2508. Найдите наименьшее значение выражения

$$|a + b| + \sqrt{(a - 1)^2 + (b - 3)^2}.$$

2509. Точки K , N , L , M расположены соответственно на сторонах AB , BC , CD и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$, причем $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC} = \alpha$,

$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = \beta$. Докажите, что точка пересечения P отрезков KL и MN делит их в тех же отношениях, т. е. $\frac{MP}{PN} = \alpha$, $\frac{KP}{PL} = \beta$.

2510. Какую линию описывает середина отрезка между двумя пешеходами, равномерно идущими по прямым дорогам?

2511. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены подобные между собой треугольники ADB , BEC и CFE ($\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA} = k$;

$\angle ABD = \angle BEC = \angle CFA = \alpha$). Докажите, что:

1) середины отрезков AC , DC , BC и EF — вершины параллелограмма;

2) у этого параллелограмма два угла равны α , а отношение сторон равно k .

2512. На координатной плоскости нарисовали график функции $y = x^2$, а затем стерли оси координат. Восстановите их с помощью циркуля и линейки.

2513. Назовем точку плоскости рациональной, если ее обе координаты — рациональные числа. Докажите, что если на окружности $x^2 + y^2 = R$ (R — целое) есть хотя бы одна рациональная точка, то на этой окружности бесконечно много рациональных точек.

12. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

2514. Докажите, что при центральной симметрии окружность переходит в окружность.

2515. Докажите, что при центральной симметрии каждый луч переходит в противоположно направленный луч.

2516. Пусть две прямые пересекаются под углом α . Докажите, что при

повороте на угол α (в одном из направлений) относительно произвольной точки одна из этих прямых перейдет в прямую, параллельную другой.

2517. Докажите, что при повороте окружность переходит в окружность.

2518. Докажите, что при параллельном переносе окружность переходит в окружность.

2519. Докажите, что при гомотетии окружность переходит в окружность.

2520. Верно ли следующее утверждение: «Если четырехугольник имеет ось симметрии, то это либо равнобедренная трапеция, либо прямоугольник, либо ромб»?

2521. Равнобедренный треугольник ABC с основанием BC повернули вокруг точки C так, что его вершина A оказалась в точке A_1 на прямой BC . При этом вершина B перешла в некоторую точку B_1 , лежащую с точкой A по одну сторону от прямой BC . Докажите, что прямые AB и B_1C параллельны.

2522. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC построены вне его равные треугольники AMB и ANC ($AM = AN$). Докажите, что точки M и N симметричны относительно биссектрисы угла BAC .

2523. Существует ли фигура, не имеющая осей симметрии, но переходящая в себя при некотором повороте?

2524. Докажите, что треугольник ABC является правильным тогда и только тогда, когда при повороте на 60° (либо по часовой стрелке, либо — против) относительно точки A вершина B переходит в C .

2525. Равнобедренный треугольник ABC с основанием BC повернули вокруг точки C так, что его вершина A оказалась в точке A_1 на прямой BC . При этом вершина B перешла в некоторую точку B_1 , лежащую с точкой A по одну сторону от прямой BC . Полученный таким образом равнобедренный треугольник A_1B_1C повернули вокруг

точки A_1 так, что вершина B_1 перешла в точку B_2 на прямой BC (рис. 100). При этом вершина C перешла в некоторую точку C_2 , также лежащую с точкой A по одну сторону от прямой BC . Докажите, что C_2B_2 параллельна AC .

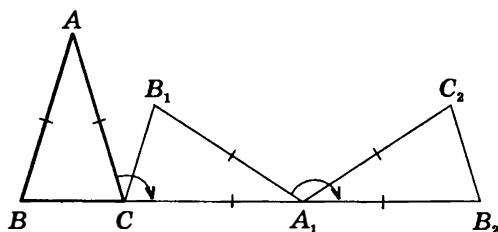


Рис. 100

2526. Докажите, что ось симметрии а) треугольника; б) $(2k + 1)$ -угольника проходит через его вершину.

2527. Докажите, что если ось симметрии а) четырехугольника; б) $2m$ -угольника проходит через какую-нибудь его вершину, то она проходит и через другую вершину.

2528. Докажите, что для любого натурального n существует выпуклый многоугольник, имеющий ровно n осей симметрии.

2529. Даны угол ABC и прямая l . Параллельно прямой l проведите прямую, на которой стороны угла ABC пересекают отрезок, равный данному.

2530. Докажите, что четырехугольник, имеющий центр симметрии, является параллелограммом.

2531. В данный треугольник впишите ромб так, чтобы один из его углов совпал с углом треугольника.

2532. Докажите, что две касающиеся окружности гомотетичны относительно их точки касания.

2533. Две окружности касаются в точке K . Прямая, проходящая через точку K , пересекает эти окружности в точках A и B . Докажите, что касательные к окружностям, проведенные через точки A и B , параллельны.

2534. Докажите, что точки, симметричные произвольной точке относительно середин сторон квадрата, являются вершинами некоторого квадрата.

2535. На каждом из оснований AD и BC трапеции $ABCD$ построены вне трапеции равносторонние треугольники. Докажите, что прямая, соединяющая третьи вершины этих треугольников, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

2536. На плоскости даны точки A и B и прямая l . По какой траектории движется точка пересечения медиан треугольников ABC , если точка C движется по прямой l ?

2537. Вершины K и N треугольника KMN перемещаются соответственно по сторонам AB и AC угла BAC , а стороны треугольника KMN соответственно параллельны трем данным прямым. Найдите геометрическое место вершин M .

2538. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой l . Постройте на этой прямой точку M так, чтобы прямая l делила AMB пополам.

2539. Существует ли фигура, не имеющая ни осей симметрии, ни центров симметрии, но переходящая в себя при некотором повороте?

2540. На плоскости дан угол α с вершиной в точке O . Докажите, что композиция симметрий относительно сторон угла является поворотом вокруг точки O на угол 2α .

2541. Через точку внутри данного круга проведите хорду, отсекающую от окружности дугу заданной угловой величины.

2542. Постройте отрезок, равный и параллельный данному так, чтобы его концы лежали на данной прямой и на данной окружности.

2543. Проведите через общую точку A окружностей S_1 и S_2 прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней равные хорды.

2544. На каждом основании трапеции $ABCD$ построены вне трапеции квадраты. Докажите, что эти квадраты гомотетичны относительно точки пересечения диагоналей трапеции.

2545. Четырехугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что точки пересечения медиан этих треугольников образуют параллелограмм.

2546. Четырехугольник имеет ось симметрии. Докажите, что он либо является равнобедренной трапецией, либо прямоугольником, либо симметричен относительно диагонали.

2547. На плоскости даны точки O , M и прямая l , проходящая через точку O . Прямую l повернули вокруг точки O против часовой стрелки на угол α , получив прямую l_1 . Докажите, что точка, симметричная точке M относительно прямой l_1 , получается из точки, симметричной точке M относительно прямой l , поворотом вокруг точки O против часовой стрелки на угол 2α .

2548. Две окружности радиуса R касаются в точке K . На одной из них взята точка A , а на другой — точка B , причем $\angle AKB = 90^\circ$. Докажите, что $AB = 2R$.

2549. Даны параллелограмм $ABCD$ и точка M . Через точки A , B , C и D проведены прямые, параллельные прямым MC , MD , MA и MB соответственно. Докажите, что они пересекаются в одной точке.

2550. Через центр квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что их точки пересечения со сторонами квадрата образуют квадрат.

2551. Постройте на сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ точки M и N так, чтобы угол при вершине A равнобедренного треугольника MAN имел данную величину α .

2552. Две окружности касаются в точке K . Через точку K проведены две прямые, пересекающие первую ок-

ружность в точках A и B , вторую — в точках C и D . Докажите, что $AB \parallel CD$.

2553. На окружности фиксированы точки A и B , а точка C движется по этой окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABC .

2554. Дан ромб $ABCD$ с острым углом A в 60° . Прямая MN отсекает от сторон AB и BC отрезки MB и NB , сумма которых равна стороне ромба. Докажите, что треугольник MDN — равнобедренный.

2555. Прямые, касающиеся окружности в точках A и B , пересекаются в точке M , а прямые, касающиеся той же окружности в точках C и D , пересекаются в точке N , причем $NC \perp MA$ и $ND \perp MB$. Докажите, что $AB \perp CD$ или $AB \parallel CD$.

2556. Лист бумаги согнут пополам. Докажите, что линия сгиба — прямая.

2557. Четырехугольник имеет две перпендикулярные оси симметрии. Верно ли, что это — квадрат?

2558. Фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии. Верно ли, что она имеет центр симметрии?

2559. Серединный перпендикуляр к стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точке K , причем точка K делит ломаную ACB на две части равной длины. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

2560. Постройте хорду данной окружности, равную и параллельную данному отрезку.

2561. Постройте четырехугольник $ABCD$ по четырем углам и сторонам $AB = a$ и $CD = b$.

2562. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно равны и параллельны. Докажите, что он имеет центр симметрии.

2563. Докажите, что противоположные стороны шестиугольника, образованного сторонами треугольника и касательными к его вписанной окружности, параллельными сторонам, равны между собой.

2564. Шестиугольник $ABCDEF$ — правильный, K и M — середины отрезков BD и EF (рис. 101). Докажите, что треугольник AMK — правильный.

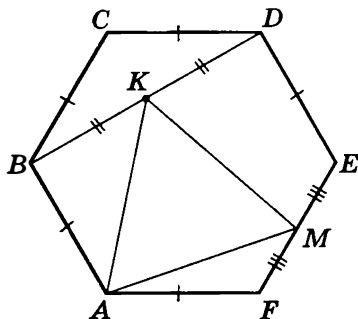


Рис. 101

2565. Рассмотрим все окружности, касающиеся данной прямой и данной окружности (внешним образом). В каждом случае проведем прямую через точки касания. Докажите, что все эти прямые проходят через одну и ту же точку. (Это же верно и для случая внутреннего касания окружностей.)

2566. Точки M и N расположены по одну сторону от прямой l . Как из точки M направить луч света, чтобы он, отразившись от прямой l , попал в точку N ?

2567. Даны прямая l и точки A и B по одну сторону от нее. Найдите на прямой l точку M такую, чтобы луч MA был биссектрисой угла между лучом MB и одним из лучей с вершиной M , принадлежащих данной прямой l .

2568. Постройте треугольник по данным серединам двух его сторон и прямой, на которой лежит биссектриса, проведенная к третьей стороне.

2569. Постройте треугольник по данным серединам двух его сторон и прямой, на которой лежит биссектриса, проведенная к одной из этих сторон.

2570. Докажите, что всякий четырехугольник с осью симметрии либо вписанный, либо описанный.

2571. Постройте треугольник по двум сторонам и разности углов, прилежащих к третьей.

2572. Постройте треугольник ABC по углам A и B и разности сторон AC и BC .

2573. Прямые l и m пересекаются в точке O , прямые l_1 и m_1 получены из прямых l и m поворотом на некоторый угол относительно точки O . Докажите, что композиция симметрий относительно l и m и композиция симметрий относительно l_1 и m_1 — одно и то же преобразование.

2574. На сторонах параллелограмма построены квадраты по ту же сторону от его сторон, по которую расположен сам параллелограмм (рис. 102). Докажите, что центры этих квадратов сами образуют квадрат.

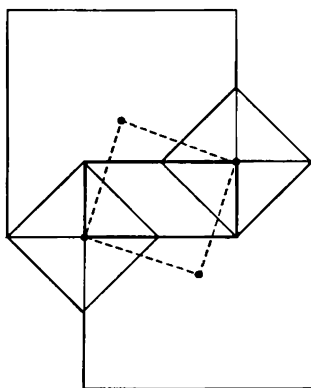


Рис. 102

2575. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ углы ABC и CDE равны по 90° , стороны BC , CD и AE равны по 1 и сумма сторон AB и DE равна 1. Докажите, что площадь пятиугольника равна 1.

2576. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M ; P — произвольная точка. Прямая l_a проходит через точку A параллельно

прямой PA_1 , прямые l_b и l_c определяются аналогично. Докажите, что:

а) прямые l_a , l_b и l_c пересекаются в одной точке Q ;

б) точка M лежит на отрезке PQ , причем $PM : MQ = 1 : 2$.

2577. Впишите в треугольник две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и другой окружности.

2578. В данный треугольник впишите другой треугольник, стороны которого соответственно параллельны трем данным прямым.

2579. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC , взята произвольная точка P . Докажите, что $AP = BP + CP$.

2580. Внутри острого угла даны точки M и N . Как из точки M направить луч света, чтобы он, отразившись последовательно от сторон угла, попал в точку N ?

2581. На сторонах AB , BC и CA остроугольного треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 . Известно, что луч света, пущенный из точки A_1 в точку B_1 , отразившись от стороны AC , попадает в точку C_1 , затем, отразившись от стороны AB , — в точку A_1 , оттуда — снова в точку B_1 и т. д. Докажите, что A_1 , B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC .

2582. ABC — разносторонний остроугольный треугольник. Сколько на плоскости существует точек D таких, что множество $\{A, B, C, D\}$ имеет ось симметрии?

2583. Постройте треугольник ABC , если известно, что $AN = c$, $BC - AC = a$, $\angle C = \gamma$.

2584. Докажите, что композиция двух симметрий относительно параллельных прямых есть параллельный перенос в направлении, перпендикулярном этим прямым, на величину, равную удвоенному расстоянию между ними.

2585. На плоскости даны прямая l и точка M . Пусть M_1 — точка, симметричная точке M относительно прямой l . При параллельном переносе прямой l в перпендикулярном ей направлении на расстояние h прямая l перешла в прямую l_1 . Докажите, что образ M_2 точки M при симметрии относительно прямой l_1 получается из точки M_1 параллельным переносом в том же направлении на расстояние $2h$.

2586. На плоскости даны две параллельные прямые l и m . Их параллельно перенесли на некоторое расстояние h , получив прямые l_1 и m_1 . Докажите, что композиция симметрий относительно прямых l и m и композиция симметрий относительно прямых l_1 и m_1 — одно и то же преобразование.

2587. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M . Докажите, что существует выпуклый четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, равными AB и BC , стороны которого равны AM , BM , CM , DM .

2588. Докажите, что выпуклый n -угольник является правильным тогда и только тогда, когда он переходит в себя при повороте на угол $\frac{360^\circ}{n}$ относительно некоторой точки.

2589. Докажите, что середины сторон правильного многоугольника образуют правильный многоугольник.

2590. Пусть M и N — середины сторон CD и DE правильного шестиугольника $ABCDEF$. Найдите угол между прямыми AM и BN .

2591. В ромбе $ABCD$ угол ABC равен 120° . На сторонах AB и BC взяты точки P и Q так, что $AP = BQ$. Найдите углы треугольника PQD .

2592. Постройте хорду данной окружности, которую два данных радиуса разделили бы на три равные части.

2593. На каждой из сторон треугольника ABC построено по прямо-

угольнику так, что они попарно касаются вершинами (рис. 103). Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника ABC с соответствующими вершинами треугольника $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке.

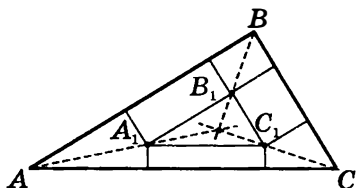


Рис. 103

2594. На стороне BC равностороннего треугольника ABC как на диаметре внешним образом построена полуокружность, на которой взяты точки K и L , делящие полуокружность на три равные дуги. Докажите, что прямые AK и AL делят отрезок BC на равные части.

2595. Окружности радиусов r и R касаются друг друга внутренним образом. Найдите сторону правильного треугольника, у которого одна вершина находится в точке касания данных окружностей, а две другие лежат на разных данных окружностях.

2696. На листе прозрачной бумаги нарисован четырехугольник. Какое наименьшее число раз нужно согнуть лист, чтобы убедиться в том, что это квадрат?

2597. Докажите, что композиция параллельного переноса в направлении, перпендикулярном некоторой прямой, и симметрии относительно этой прямой есть осевая симметрия.

2598. Две окружности радиуса R пересекаются в точках M и N . Пусть A и B — точки пересечения серединного перпендикуляра к отрезку MN с этими окружностями, лежащие по одну сторону от прямой MN . Докажите, что $MN^2 + AB^2 = 4R^2$.

2599. Постройте отрезок, равный и параллельный данному, так, чтобы его концы лежали на двух данных окружностях.

2600. Постройте равносторонний треугольник ABC так, чтобы его вершины лежали на трех данных параллельных прямых.

2601. Постройте равносторонний треугольник, одна вершина которого лежала бы на данной окружности, другая — на данной прямой, а третья — в данной точке.

2602°. Постройте равносторонний треугольник, у которого одна из вершин была в данной точке, а две другие — на двух данных окружностях.

2603°. Постройте равносторонний треугольник, вершины которого лежат соответственно на трех данных концентрических окружностях.

2604°. Впишите в данный параллелограмм прямоугольник с заданным углом между диагоналями.

2605. Впишите квадрат в данный параллелограмм.

2606. Постройте квадрат, три вершины которого лежали бы на трех параллельных прямых.

2607. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник, гипотенуза которого опиралась бы на две данные окружности, а вершина прямого угла лежала бы в данной точке.

2608°. Дан остроугольный треугольник ABC . Постройте точки X и Y на сторонах AB и BC так, что $BX = XY = YC$.

2609. Даны две концентрические окружности S_1 и S_2 . Проведите прямую, на которой эти окружности высекают три равных отрезка.

2610. Даны две концентрические окружности. Проведите прямую, пересекающую эти окружности так, чтобы меньшая хорда была равна половине большей.

2611. Постройте треугольник, если даны одна его вершина и три прямых, на которых лежат его биссектрисы.

2612. Фигура имеет ровно две оси симметрии. Докажите, что они перпендикулярны.

2613. Выпуклый многоугольник имеет центр симметрии. Докажите, что сумма градусных мер его углов делится на 360° .

2614. Точка M лежит на диаметре AB окружности. Хорда CD окружности проходит через точку M и пересекает прямую AB под углом в 45° . Докажите, что величина $CM^2 + DM^2$ не зависит от выбора точки M .

2615. Равные окружности S_1 и S_2 касаются внутренним образом окружности S в точках A_1 и A_2 (рис. 104); C — некоторая точка окружности S , прямые A_1C и A_2C пересекают окружности S_1 и S_2 в точках B_1 и B_2 соответственно. Докажите, что $B_1B_2 \parallel A_1A_2$.

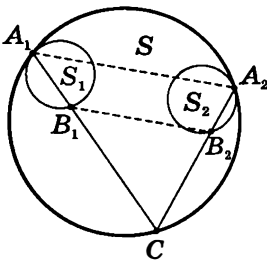


Рис. 104

2616. Постройте четырехугольник $ABCD$ по четырем сторонам, если известно, что его диагональ AC является биссектрисой угла A .

2617. Может ли фигура иметь центр симметрии и ровно одну ось симметрии?

2618. Из точки O на плоскости выходят $2n$ прямых. Могут ли они служить серединными перпендикулярами к сторонам некоторого $2n$ -угольника?

2619. Докажите, что композиция трех симметрий относительно прямых

l_1 , l_2 и l_3 , пересекающихся в точке O , есть осевая симметрия.

2620. Докажите, что композиция трех симметрий относительно прямых l_1 , l_2 и l_3 есть осевая симметрия.

2621. Докажите, что композиция n осевых симметрий относительно прямых l_1 , l_2 , ..., l_n , проходящих через точку O , есть: а) поворот, если n четно; б) осевая симметрия, если n нечетно.

2622. Существует ли а) ограниченная, б) неограниченная фигура на плоскости, имеющая среди своих осей симметрии две параллельные несовпадающие прямые?

2623. Параллельно данной прямой проведите прямую, на которой две данные окружности высекали бы хорды равной длины.

2624. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причем $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

2625. Постройте треугольник по основаниям двух его биссектрис и прямой, на которой лежит третья биссектриса.

2626. Пусть S — окружность, описанная около треугольника ABC . Докажите, что три окружности, симметричные S относительно сторон треугольника, пересекаются в одной точке.

2627°. Какое максимальное число осей симметрии может иметь объединение трех отрезков на плоскости?

2628. Какое максимальное число осей симметрии может иметь объединение трех отрезков на плоскости?

2629. Дан треугольник ABC ; O — центр описанной окружности; O_1 , O_2 и O_3 — точки, симметричные точке O относительно прямых AB , BC и AC . Докажите, что середины сторон треугольника $O_1O_2O_3$ лежат на окружности девяти точек треугольника ABC .

2630. Даны прямая l и точка O на ней. Докажите, что композиция поворота вокруг точки O на угол α и сим-

метрии относительно прямой l есть осевая симметрия относительно прямой, проходящей через точку O и составляющей с прямой l угол $\frac{\alpha}{2}$.

2631. Докажите, что композиция симметрий относительно n параллельных прямых $l_1, l_2, \dots, l_n$ есть: а) параллельный перенос, если n четно; б) осевая симметрия, если n нечетно.

2632. В каком месте следует построить мост MN через реку, разделяющую две данные деревни A и B , чтобы путь $AMNB$ из деревни A в деревню B был кратчайшим (берега реки считаются параллельными прямыми, мост предполагается перпендикулярным реке)?

2633. Параллельно данной прямой проведите прямую, на которой две данные окружности высекали бы хорды, сумма (или разность) длин которых имела бы заданную величину a .

2634. Существуют фигуры, имеющие бесконечное множество центров симметрии (например, полоса между двумя параллельными прямыми). Может ли фигура иметь более одного, но конечное число центров симметрии?

2635°. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята точка P . Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на A_2P , из A_2 — на A_3P , из A_3 — на A_4P , из A_4 — на A_1P . Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

2636°. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE ; M и P — середины отрезков AD и BE . Докажите, что треугольник CPM — равносторонний.

2637. Даны точки A и B и окружность S . Постройте на окружности S такие точки C и D , что $AC \parallel BD$ и дуга CD имеет данную величину α .

2638. Даны две точки и окружность. Проведите через данные точки

две секущие, хорды которых внутри данной окружности были бы равны и пересекались бы под данным углом α .

2639. Дан треугольник ABC . На его сторонах AB и BC построены внешним образом квадраты $ABMN$ и $BSPQ$ (рис. 105). Докажите, что центры этих квадратов и середины отрезков MQ и AC образуют квадрат.

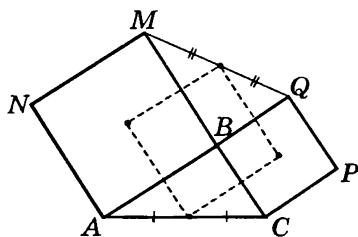


Рис. 105

2640. Из вершины A квадрата $ABCD$ внутрь квадрата проведены два луча, на которые опущены перпендикуляры BK, BL, DM, DN из вершин B и D . Докажите, что отрезки KL и MN равны и перпендикулярны друг другу.

2641. Точка P расположена внутри квадрата $ABCD$ так, что $AP : BP : CP = 1 : 2 : 3$. Найдите угол APB .

2642. Дан остроугольный треугольник ABC . Постройте точки X и Y на сторонах AB и BC так, что $AX = XY = YC$.

2643. Дан прямоугольный бильярд со сторонами 1 и $\sqrt{2}$. Из его угла под углом 45° к стороне выпущен шар. Попадет ли он когда-нибудь в лузу? (Лузы находятся в углах бильярда.)

2644. Постройте четырехугольник $ABCD$ по двум сторонам AB и AD и двум углам B и D , если известно, что в него можно вписать окружность.

2645. Постройте треугольник ABC по стороне $AB = c$, высоте $CC_1 = h$ и разности углов $\varphi = \angle A - \angle B$.

2646. Даны прямые l_1, l_2 и l_3 , пересекающиеся в одной точке. Постройте

треугольник ABC , для которого данные прямые были бы серединными перпендикулярами к его сторонам.

2647. Два квадрата $BCDA$ и $BKMN$ имеют общую вершину B . Докажите, что медиана BE треугольника ABK и высота BF треугольника CBN лежат на одной прямой. (Вершины обоих квадратов перечислены по часовой стрелке.)

2648. (Точка Торричелли.) На сторонах треугольника ABC построены вне треугольника равносторонние треугольники BCA_1 , CAB_1 , ABC_1 и проведены отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 . Докажите, что:

- а) эти отрезки равны между собой;
- б) эти отрезки пересекаются в одной точке;

в) если эта точка находится внутри треугольника ABC , то сумма ее расстояний до трех вершин треугольника равна длине каждого из отрезков AA_1 , BB_1 , CC_1 .

2649. Постройте треугольник, если дана прямая, на которой лежит его сторона, и две точки — основания биссектрис, проведенных к двум другим сторонам.

2650. (Прямая Эйлера.) Докажите, что в любом треугольнике точка H пересечения высот (ортоцентр), центр O описанной окружности и точка M пересечения медиан (центр тяжести) лежат на одной прямой, причем точка M расположена между точками O и H и $MH = 2MO$.

2651. Постройте треугольник по точке H пересечения его высот, центру O описанной окружности и прямой l , на которой лежит одна из его сторон.

2652. Дан угол между двумя полупрямыми. В угле, отражаясь от его сторон, путешествует луч света. Может ли он отразиться бесконечное число раз?

2653. Стороны выпуклого n -угольника занумерованы числами от 1 до n .

Луч света, выйдя из точки A внутри многоугольника, отразившись последовательно от первой, второй, ..., n -й стороны, попал в точку B . Как, зная только положение точек A и B внутри многоугольника, построить траекторию луча?

2654. На плоскости даны треугольник ABC и точка M (рис. 106). Известно, что точки, симметричные точке M относительно двух сторон треугольника ABC , попадают на окружность, описанную около треугольника ABC . Докажите, что точка, симметричная точке M относительно третьей стороны, также попадает на эту окружность.

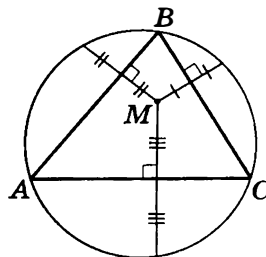


Рис. 106

2655. Существует ли фигура, имеющая ровно две оси симметрии, но не имеющая центра симметрии?

2656. Четырехугольник имеет ровно две оси симметрии. Верно ли, что он — либо прямоугольник, либо ромб?

2657. Может ли пятиугольник иметь ровно две оси симметрии?

2658. Постройте треугольник ABC , если даны его вершины A и B , прямая l , на которой лежит вершина C , и разность углов $\angle A - \angle B = \varphi$.

2659. Постройте треугольник по центру его описанной окружности и двум прямым, на которых лежат высоты треугольника.

2660. На плоскости даны прямые $l_1, l_2, \dots, l_{2n}$, пересекающиеся в одной точке. Блоха сидит в некоторой точке M плоскости и прыгает через прямую l_1 , попадая в точку M_1 , так, что M и M_1

симметричны относительно прямой l_1 , далее — через прямую l_2 и т. д. Докажите, что если через $2n$ прыжков блоха оказалась в точке M , то, начиная движение из любой точки плоскости, через $2n$ прыжков блоха окажется на прежнем месте.

2661. (Теорема Монжа.) Докажите, что прямые, проведенные через середины сторон вписанного четырехугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.

2662. Пусть M и N — середины сторон CD и DE правильного шестиугольника $ABCDEF$, P — точка пересечения отрезков AM и BN . Докажите, что $S(ABP) = S(MDNP)$.

2663°. Вокруг квадрата описан параллелограмм (вершины квадрата лежат на разных сторонах параллелограмма). Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин параллелограмма на стороны квадрата, образуют новый квадрат.

2664. На двух сторонах AB и BC правильного $2n$ -угольника взято по точке K и N так, что угол KEN , где E — вершина, противоположная B , равен $\frac{180^\circ}{2n}$. Докажите, что NE — биссектриса угла KNC .

2665. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D ; DM — ее диаметр. Прямая BM пересекает сторону AC в точке K . Докажите, что $AK = DC$.

2666. Постройте треугольник по двум сторонам и биссектрисе угла между ними.

2667. Постройте треугольник ABC по углу A и отрезкам $AB + BC$ и $AC + BC$.

2668. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны, причем лучи AB и DC пересекаются в точке O . Докажите, что прямая, соединяющая середины диагоналей, перпендикулярна биссектрисе угла AOD .

2669. Дан вписанный $2n$ -угольник с углами $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2n}$. Докажите, что $\beta_1 + \beta_3 + \dots + \beta_{2n-1} = \beta_2 + \beta_4 + \dots + \beta_{2n}$. Верно ли обратное?

2670. Даны непересекающиеся хорды AB и CD некоторой окружности. Постройте на этой окружности такую точку X , чтобы хорды AX и BX высекали на хорде CD отрезок EF , равный данному.

2671. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники ABC_1 , AB_1C и A_1BC . Пусть P и Q — середины отрезков A_1B_1 и A_1C_1 . Докажите, что треугольник APQ — правильный.

2672. Докажите, что композиция двух поворотов на углы, в сумме не кратные 360° , является поворотом. В какой точке находится его центр и чему равен угол поворота? Исследуйте также случай, когда сумма углов поворотов кратна 360° .

2673. Постройте многоугольник с нечетным числом сторон, зная середины его сторон.

2674. Из центра O окружности проведено n прямых (n нечетно). Постройте вписанный в окружность n -угольник, для которого данные прямые являются серединными перпендикулярами.

2675. На сторонах произвольного выпуклого четырехугольника внешним образом построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны и перпендикулярны.

2676. Круг поделили хордой AB на два круговых сегмента и один из них повернули на некоторый угол. Пусть при этом повороте точка B перешла в точку D . Докажите, что отрезки, соединяющие середины дуг сегментов с серединой отрезка BD , перпендикулярны друг другу.

2677. На плоскости расположены три окружности S_1, S_2, S_3 радиусов $r_1,$

r_2, r_3 — каждая вне двух других, причем $r_1 > r_2$ и $r_1 > r_3$. Из точки пересечения внешних касательных к окружностям S_1 и S_2 проведены касательные к окружности S_3 , а из точки пересечения внешних касательных к окружностям S_1 и S_3 проведены касательные к окружности S_2 . Докажите, что последние две пары касательных образуют четырехугольник, в который можно вписать окружность, и найдите ее радиус.

2678. На отрезках AB, BC и CA треугольника ABC построены во внешнюю сторону прямоугольники ABB_1A_2, BCC_1B_2 и CAA_1C_2 (рис. 107). Докажите, что перпендикуляры к отрезкам A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 , восстановленные в их серединах, пересекаются в одной точке.

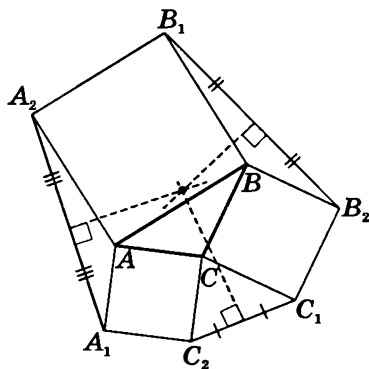


Рис. 107

2679. В данный сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Для каждой пары окружностей через точку касания проводится касающаяся их прямая. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

2680. Даны прямая l и точки A и B по одну сторону от нее. Постройте путь луча из A в B , который отражается от прямой l по следующему закону: угол падения на φ меньше угла отражения.

2681. Докажите, что три прямые, симметричные относительно сторон

треугольника прямой, проходящей через точку пересечения высот треугольника, пересекаются в одной точке.

2682. На плоскости дано n прямых (n нечетно), пересекающихся в одной точке. Постройте n -угольник, для которого эти прямые являются биссектрисами внешних или внутренних углов.

2683. На плоскости даны $2n - 1$ прямая, окружность и точка K внутри окружности. Впишите в окружность $2n$ -угольник, у которого одна сторона проходит через точку K , а остальные параллельны данным прямым.

2684. ABC — данный разносторонний треугольник, A_1, B_1, C_1 — точки касания его вписанной окружности со сторонами BC, AC, AB соответственно; A_2, B_2, C_2 — точки, симметричные точкам A_1, B_1, C_1 относительно биссектрис соответствующих углов треугольника ABC . Докажите, что $A_2C_2 \parallel AC$.

2685. Проведите через данную точку прямую, на которой две данные окружности высекали бы равные хорды.

2686. Даны окружность, две точки P и Q этой окружности и прямая. Найдите на окружности такую точку M , чтобы прямые MP и MQ отсекали на данной прямой отрезок AB , равный данному.

2687. Впишите в данную окружность n -угольник, стороны которого соответственно параллельны n данным прямым.

2588. В интервале $(0, \pi)$ дано n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, при этом $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \pi(n - 2)$. Впишите в данную окружность n -угольник, внутренние углы которого равны соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Когда построение возможно?

2689. На плоскости даны $2n$ прямых, окружность и точка K внутри нее. Впишите в окружность $(2n + 1)$ -угольник, одна сторона которого проходит через точку K , а остальные стороны параллельны данным прямым.

2690. Через центр O окружности проведено n прямых. Постройте описанный около этой окружности n -угольник, вершины которого лежат на этих прямых.

2691. (Задача Ферма.) Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

2692. (Треугольник Наполеона.) На сторонах произвольного треугольника внешним образом построены правильные треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник.

2693. На сторонах произвольного треугольника внутренним образом построены правильные треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник.

2694. Пусть P , Q и R — центры равносторонних треугольников, построенных внешним образом на сторонах AB , BC и AC треугольника ABC , а M , N и K — центры равносторонних треугольников, построенных на сторонах треугольника ABC внутренним образом. Докажите, что разность площадей треугольников PQR и MNK равна площади треугольника ABC .

2695. (Задача Тибо.) Пусть A_1 , B_1 и C_1 — основания высот AA_1 , BB_1 и CC_1 непрямоугольного треугольника ABC . Докажите, что прямые Эйлера треугольников AB_1C_1 , BA_1C_1 и CA_1B_1 пересекаются на окружности девяти точек треугольника ABC .

13. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК И ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

2696. Постройте треугольник по трем данным сторонам.

2697. Постройте угол, равный данному углу.

2698. Постройте треугольник по двум сторонам и углу между ними.

2699. Постройте треугольник по стороне и двум прилежащим углам.

2700. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

2701. Дан угол в 30° . Постройте окружность радиуса 2,5, касающуюся одной стороны этого угла и имеющую центр на другой его стороне. Найдите расстояние от центра окружности до вершины угла.

2702. Найдите геометрическое место центров окружностей, имеющих данный радиус и проходящих через данную точку.

2703. Постройте окружность, проходящую через две данные точки A и B так, чтобы угол между радиусом круга, проведенным в точку A , и хордой AB был равен 30° .

2704. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой в данной точке.

2705. Около данного круга опишите равнобедренный прямоугольный треугольник.

2706. Постройте на данной окружности точку, которая находилась бы на данном расстоянии от данной прямой.

2707. Постройте на данной прямой точку, равноудаленную от двух данных точек.

2708. Постройте параллелограмм $ABCD$ по AB , AC и AD .

2709. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от двух параллельных прямых.

2710. Какую фигуру образует множество всех вершин равнобедренных треугольников, имеющих общее основание?

2711. Постройте окружность, касающуюся сторон данного угла, причем одной из них — в данной точке.

2712. В окружности, радиус которой 1,4, определите расстояние от

центра до хорды, если она отсекает дугу в 120° .

2713. Дан отрезок AB . Найдите геометрическое место точек M , для которых $\angle MAB = 70^\circ$.

2714. Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.

2715. Постройте треугольник, если даны три точки, в которых вписанная окружность касается его сторон.

2716. Постройте параллелограмм по одной стороне и обоим диагоналям.

2717. На листе прозрачной бумаги нарисован угол, вершина которого недоступна (находится вне чертежа). Как без всяких инструментов построить биссектрису этого угла?

2718. На прозрачной бумаге нарисован треугольник. Без всяких инструментов постройте центр его описанной окружности.

2719. В данную окружность впишите треугольник с двумя данными углами.

2720. Около данного круга опишите треугольник с двумя данными углами.

2721. Постройте треугольник, если известны отрезки, на которые вписанная окружность делит его сторону, и радиус вписанной окружности.

2722. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся данной прямой в данной точке.

2723. Постройте треугольник по высоте, основанию и медиане, проведенной к этому основанию.

2724. Впишите в данный треугольник равнобедренный треугольник данной высоты так, чтобы основание его было параллельно одной из сторон данного треугольника.

2725. Постройте окружность, проходящую через данную точку A и касающуюся данной прямой в данной точке B .

2726. Постройте окружность с центром в данной точке на стороне данного

угла, которая на другой стороне угла отсекала бы хорду данной длины.

2727. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и касающуюся данной прямой.

2728°. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и проекции одного из катетов на гипотенузу.

2729°. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу описанной окружности.

2730°. Постройте касательную к данной окружности, параллельную данной прямой.

2731°. Постройте треугольник по углу, высоте и биссектрисе, проведенным из вершины этого угла.

2732. Найдите геометрическое место середин отрезков с концами на двух данных параллельных прямых.

2733. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к одной из них.

2734. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на третью.

2735. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и отношению катетов.

2736. Постройте прямоугольный треугольник по данному отношению одного катета к гипотенузе и второму катету.

2737. Между двумя параллельными прямыми дана точка. Постройте окружность, проходящую через эту точку и касающуюся данных прямых.

2738. Даны параллельные прямые и секущая. Постройте окружность, касающуюся всех трех прямых.

2739. Найдите геометрическое место середин всех хорд данной окружности.

2740. Дан отрезок, равный 1. Постройте отрезки, равны $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.

2741. Постройте прямоугольный треугольник по отношению его катетов и высоте, опущенной на гипотенузу.

2742. Постройте ромб по данному отношению диагоналей и данной стороне.

2743. Постройте параллелограмм по отношению диагоналей, углу между диагоналями и стороне.

2744. На прозрачной бумаге нарисован треугольник. Без всяких инструментов постройте центр его вписанной окружности.

2745. На прозрачной бумаге дана дуга некоторой окружности. Постройте без всяких инструментов центр этой окружности.

2746. Найдите геометрическое место центров окружностей данного радиуса, касающихся данной прямой.

2747. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности в данной на ней точке.

2748. Постройте окружность данного радиуса, высекающую на сторонах данного угла равные отрезки данной длины.

2749. В данную окружность впишите прямоугольник с данным углом между диагоналями.

2750. Найдите геометрическое место точек, из которых проведены касательные к данной окружности, имеющие заданную длину.

2751. Постройте точку, равноудаленную от трех данных точек.

2752. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и касающуюся данной окружности.

2753. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся двух данных прямых.

2754. Постройте такую касательную к данной окружности, от которой данная прямая отсекала бы данный отрезок.

2755. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых.

2756. Постройте треугольник по углу и высотам, проведенным из вершин двух других углов.

2757. Постройте треугольник по стороне и высотам, проведенным к двум другим сторонам.

2758. Через точку внутри угла проведите прямую, отсекающую от сторон этого угла отрезки, отношение которых равно данному.

2759. На плоскости даны две прямые и точка M . Найдите на одной из прямых точку X такую, что отрезок MX делится другой прямой пополам.

2760. Найдите геометрическое место центров окружностей данного радиуса, касающихся данной окружности.

2761. Постройте окружность, которая касалась бы двух данных параллельных прямых и круга, находящегося между ними.

2762. Постройте окружность данного радиуса, которая касалась бы данной прямой и данной окружности.

2763. Постройте точку, равноудаленную от трех данных прямых.

2764. Постройте точку, из которой данные отрезки видны под данными углами.

2765. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и радиусу вписанного круга.

2766. Постройте треугольник по двум высотам и углу, из вершины которого проведена одна из них.

2767. Постройте треугольник по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и медиане, проведенной к одной из двух других сторон.

2768. Найдите геометрическое место середин всех хорд данной окружности, имеющих данную длину, меньшую диаметра.

2769. Даны две точки A и B . Найдите геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые, проходящие через точку B .

2770. Дана линейка с делениями через 1 см. Постройте биссектрису данного угла.

2771. Постройте треугольник по основанию, углу при вершине и медиане, проведенной к основанию.

2772. На плоскости даны два отрезка величиной a и b . Постройте точку, из которой отрезок a был бы виден под данным углом α , а отрезок b — под данным углом β .

2773. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и высекающую на данной прямой отрезок, равный данному.

2774. Даны точки A и B . С центром в точке B проводятся окружности радиусом, не превосходящим AB , а через точку A — касательные к ним (рис. 108). Найдите геометрическое место точек касания.

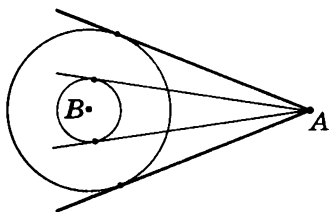


Рис. 108

2775. Постройте вписанный четырехугольник по углу, прилежащей стороне и обоим диагоналям.

2776. Постройте треугольник по углу, биссектрисе, проведенной из вершины этого угла, и радиусу вписанной окружности.

2777. Проведите через данную точку прямую, пересекающую две стороны данного треугольника так, чтобы точки пересечения и концы третьей стороны находились на одной окружности.

2778. Постройте треугольник по стороне, высоте и медиане, проведенным из конца этой стороны.

2779. Постройте окружность, касательную к двум данным концентриче-

ским окружностям и к данной прямой.

2780. Постройте прямую, равноудаленную от трех данных точек (точки и прямая принадлежат одной плоскости).

2781. Найдите геометрическое место середин всех хорд, проходящих через данную точку окружности.

2782. На плоскости даны точки A и B . Найдите геометрическое место проекций точки A на прямые, проходящие через точку B .

2783. Даны прямая и окружность, не имеющие общих точек. Постройте окружность данного радиуса r , касающуюся их.

2784. Постройте треугольник по высоте, опущенной на одну из сторон, и медианам, проведенным к двум другим сторонам.

2785. Через точку пересечения двух окружностей проведите секущую, часть которой внутри окружностей была бы равна данному отрезку (рис. 109). (Центры окружностей расположены по разные стороны от общей хорды.)

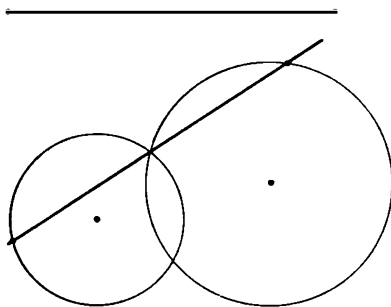


Рис. 109

2786. Через данную точку внутри круга проведите хорду, равную данному отрезку.

2787. Постройте на сторонах AB и AC треугольника ABC такие точки X и Y , что $XY \parallel BC$ и $XY = XB + YC$.

2788. Пользуясь только циркулем, удвойте данный отрезок, т. е. построй-

те для данных точек A и B такую точку C , чтобы точки A , B , C лежали на одной прямой (B между A и C) и $AC = 2AB$.

2789. С помощью циркуля и линейки постройте биссектрису данного угла, вершина которого лежит вне чертежа.

2790. Постройте окружность, которая проходила бы через данную точку и касалась бы данной окружности в данной точке.

2791. Постройте параллелограмм по его углу и диагоналям.

2792. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся двух данных окружностей.

2793. Постройте точку так, чтобы касательные, проведенные из нее к двум данным окружностям, были равны данным отрезкам.

2794. Постройте точку, из которой две данные окружности были бы видны под данными углами.

2795. Постройте треугольник по радиусу описанной окружности, стороне и высоте, проведенной к другой стороне.

2796. Постройте треугольник по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и высоте, проведенной к другой стороне.

2797. Постройте точку, из которой данный круг и данный отрезок видны под данными углами.

2798. На плоскости даны точки A и B . Найдите геометрическое место точек M , для которых разность квадратов длин отрезков AM и BM постоянна.

2799. Постройте четырехугольник $ABCD$ по четырем сторонам и углу между AB и CD .

2800. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон.

2801. Впишите квадрат в данный треугольник так, чтобы одна из сторон квадрата лежала на основании треугольника.

2802. Найдите геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от каждой из которых до двух данных точек равна данному числу.

2803. Даны угол и точка внутри него. Проведите через эту точку прямую, отрезок которой, заключенный внутри данного угла, делился бы данной точкой в заданном отношении.

2804. В данный треугольник впишите прямоугольник с данным отношением сторон так, чтобы две вершины прямоугольника лежали на боковых сторонах треугольника, а две другие — на его основании.

2805. В данную окружность впишите прямоугольный треугольник, если известны один из его острых углов и точка на одном из катетов.

2806. Точка O лежит на отрезке AC . Найдите геометрическое место точек M , для которых $\angle MOC = 2\angle MAC$.

2807. Дана линейка с параллельными краями и без делений. Постройте биссектрису угла, вершина которого недоступна (лежит вне чертежа).

2808. Впишите в данный круг три равных круга, которые касались бы попарно между собой и данного круга.

2809. Даны окружность с центром O и точка A внутри нее. Постройте окружность, проходящую через точки A и O и касающуюся данной окружности.

2810. Около данной окружности опишите ромб с данной стороной.

2811. Постройте треугольник по радиусу описанной окружности и высоте и медиане, проведенным из одной вершины.

2812. Постройте параллелограмм по углу и диагоналям.

2813. Найдите геометрическое место середин хорд данной окружности, проходящих через данную точку.

2814. Постройте окружность с данным центром, касающуюся данной окружности.

2815. Постройте треугольник по двум углам A , B и периметру P .

2816. Внутри угла даны две точки A и B . Постройте окружность, проходящую через эти точки и высекающую на сторонах угла равные отрезки.

2817. Постройте треугольник по высоте и медиане, проведенным из одной вершины, и высоте, проведенной из другой вершины.

2818. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и разность двух других сторон.

2819. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и сумме двух других сторон.

2820. Постройте треугольник по углу, противолежащей стороне и разности двух других сторон.

2821. Даны две точки A и B (рис. 110). Найдите геометрическое место точек, каждая из которых симметрична точке A относительно некоторой прямой, проходящей через точку B .

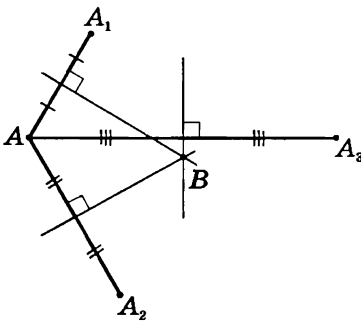


Рис. 110

2822. Даны окружность и точка A . Найдите геометрическое место середин хорд, высекаемых данной окружностью на всевозможных прямых, проходящих через точку A .

2823. Дан угол, равный 19° . Пользуясь только циркулем, разделите его на 19 равных частей (т. е. найдите точки так, чтобы лучи, проходящие через вершину данного угла и эти точки, разделили его 19 равных частей).

2824. Дан угол, равный 54° . Пользуясь только циркулем, разделите его

на три равные части (т. е. найдите точки так, чтобы лучи, проходящие через вершину данного угла и эти точки, разделили его три равные части).

2825. Даны два отрезка, равные 1 и a . Постройте отрезок:

а) $\frac{a^2 - 9}{a^2 + a - 2}$;

б) $\sqrt{a^3 - 4a^2 + 3a}$.

2826. Дан треугольник ABC . Найдите все такие точки P , что площади треугольников ABP , BCP и ACP равны.

2827. Дана линейка с параллельными краями и без делений. Постройте центр окружности, некоторая дуга которой дана на чертеже.

2828. Постройте треугольник по медиане и двум углам.

2829. Постройте окружность, на которой стороны данного треугольника высекают три хорды, равные заданному отрезку.

2830. Даны угол и две точки внутри него. Постройте окружность, проходящую через эти точки и высекающую на сторонах угла равные отрезки.

2831. Постройте треугольник по стороне и проведенной к ней высоте, если известно, что эта сторона видна из центра вписанной в треугольник окружности под углом 135° .

2832. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден: а) под острым углом; б) под тупым углом.

2833. Постройте квадрат по его центру и двум точкам, лежащим на противоположных сторонах.

2834. Постройте параллелограмм по вершине и серединам сторон, не содержащих эту вершину.

2835. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и радиусу вписанной окружности.

2836. Постройте параллелограмм по основанию, высоте и углу между диагоналями.

2837. Найдите геометрическое место середины отрезков, соединяющих данную точку, лежащую вне данной окружности, с точками этой окружности.

2838. Даны окружность S , точка A на ней и прямая l . Постройте окружность, касающуюся данной окружности в точке A и данной прямой.

2839. Впишите в угол окружность, проходящую через данную точку.

2840. Дан треугольник ABC . Найдите на стороне AC такую точку D , чтобы периметр треугольника ABD был равен стороне BC .

2841. По данному отрезку a постройте отрезок b , где:

а) $a = \sqrt{5}$, $b = 1$;

б) $a = 7$, $b = \sqrt{7}$.

2842. По данным отрезкам a , h и m постройте треугольник ABC со стороной $BC = a$, высотой $BH = h$ и медианой: а) $BM = m$; б) $AM = m$.

2843. Дана линейка постоянной ширины (т. е. с параллельными краями) и без делений. Постройте биссектрису данного угла.

2844°. Разделите данный отрезок пополам с помощью линейки с параллельными краями и без делений.

2845. На одной из сторон данного острого угла лежит точка A . Постройте на этой же стороне угла точку, равноудаленную от второй стороны угла и от точки A .

2846. Даны точки A и B . Найдите геометрическое место точек, расстояние от каждой из которых до точки A больше, чем расстояние до точки B .

2847. Точка A лежит на окружности. Найдите геометрическое место таких точек M , что отрезок AM делится этой окружностью пополам.

2848. Одним прямолинейным разрезом отрежьте от треугольника трапецию, у которой меньшее основание было бы равно сумме боковых сторон.

2849. На окружности фиксированы точки A и B , а точка C перемещает-

ся по этой окружности. Найдите множество точек пересечения биссектрис треугольников ABC .

2850. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и медиане, проведенной из вершины одного из прилежащих углов.

2851. Постройте треугольник ABC , зная положение трех точек A_1 , B_1 , C_1 , являющихся центрами вневписанных окружностей треугольника ABC .

2852. Постройте равнобедренный треугольник, если заданы основания его биссектрис.

2853. Проведите к данной окружности касательную, часть которой между продолжениями двух данных радиусов была бы равна данному отрезку.

2854. Две равные окружности касаются друг друга. Постройте трапецию такую, чтобы каждая из окружностей касалась трех ее сторон, а центры окружностей лежали на диагоналях трапеции.

2855. Даны окружность, ее диаметр AB и точка C на этом диаметре (рис. 111). Постройте на окружности две точки X и Y , симметричные относительно диаметра AB , для которых прямая YC перпендикулярна прямой XA .

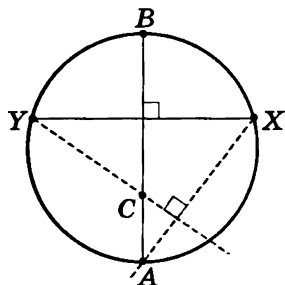


Рис. 111

2856. Даны прямая и точка A вне ее. Опустите из точки A перпендикуляр на прямую, проведя не более трех линий циркулем и линейкой (третьей линией должен быть искомый перпендикуляр).

2857. Постройте точку M внутри данного треугольника так, что $S(ABM) : S(BCM) : S(ACM) = 1 : 2 : 3$.

2858. На одной из сторон угла взяты две точки A и B . Найдите на другой стороне угла точку C такую, чтобы угол ACB был наибольшим. Постройте точку C с помощью циркуля и линейки.

2859. Постройте треугольник по двум сторонам так, чтобы медиана, проведенная к третьей стороне, делила угол треугольника в отношении $1 : 2$.

2860. Даны отрезки a и b . Постройте такой отрезок x , что

$$\sqrt{x} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

2861. На плоскости даны точки A и B . Найдите геометрическое место точек C , для которых $\angle C > \angle B$ и треугольник ABC :

- а) остроугольный;
- б) тупоугольный.

2862. Вершины A и B треугольника ABC с прямым углом C скользят по сторонам прямого угла с вершиной P . Докажите, что точка C перемещается при этом по отрезку.

2863. Точка C лежит внутри прямого угла AOB . Докажите, что периметр треугольника ABC больше $2OC$.

2864. Постройте треугольник по углу и радиусам вписанной и описанной окружностей.

2865. Два колеса радиусов r и R катятся по прямой m . Найдите геометрическое место точек пересечения M их общих внутренних касательных.

2866. Постройте треугольник ABC , зная три точки A_1 , B_1 и C_1 , в которых продолжения его высот пересекают описанную окружность.

2867. Постройте точки X и Y на сторонах AB и BC треугольника ABC так, что $AX = BY$ и $XY \parallel AC$.

2868. Постройте треугольник ABC по двум высотам, проведенным из вершин B и C , и медиане, проведенной из вершины A .

2869. Постройте треугольник по углу, медиане и высоте, проведенным из вершины этого угла.

2870. Даны середины трех равных сторон выпуклого четырехугольника. Постройте этот четырехугольник.

2871. Постройте окружность, касающуюся двух данных окружностей, причем одной из них — в данной точке.

2872. В данный параллелограмм впишите ромб так, чтобы стороны ромба были параллельны диагоналям параллелограмма, а вершины ромба лежали на сторонах параллелограмма.

2873. Постройте трапецию, если даны отношение ее оснований, два угла при одном из этих оснований и высота.

2874. Через вершину треугольника проведите прямую, делящую периметр треугольника пополам.

2875. На плоскости заданы две пересекающиеся прямые (рис. 112), и на них отмечено по одной точке (D и F). Постройте треугольник ABC , у которого биссектрисы CD и AF лежат на данных прямых, а их основания — данные точки D и F .

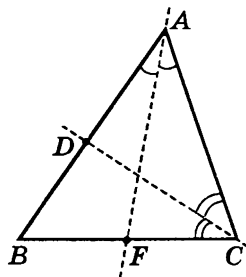


Рис. 112

2876. Дана полуокружность с диаметром AB . Постройте хорду MN , параллельную AB , так, чтобы трапеция $AMNB$ была описанной.

2877. Даны угол в 45° с вершиной O и треугольник ABC , в котором $AB = 6$, $AC = 3$. Вершины A и B треугольника

скользят по сторонам угла так, что точки O и C находятся относительно прямой AB :

а) по разные стороны, причем $\angle ACB = 135^\circ$;

б) по одну сторону, причем $\angle ACB = 45^\circ$.

Какое множество точек пробегает при этом вершина C ?

2878. Найдите геометрическое место точек X , лежащих внутри трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) или на ее сторонах, если известно, что $S(XAB) = S(XCD)$.

2879. Постройте прямую, на которой две данные окружности высекают хорды, равные заданным отрезкам.

2880. Даны две параллельные прямые l и l_1 . С помощью одной линейки разделите пополам данный отрезок AB прямой l .

2881. Точки D и E — середины сторон соответственно AB и BC треугольника ABC . Точка M лежит на стороне AC , причем $ME > EC$. Докажите, что $MD < AD$.

2882. Постройте треугольник ABC , зная три точки A_1, B_1, C_1 , в которых биссектрисы его углов пересекают описанную окружность.

2883. Даны окружность S , прямая l и точка A на ней. Постройте окружность, касающуюся данной прямой в точке A и данной окружности.

2884. Постройте треугольник по двум сторонам и биссектрисе, проведенным из одной вершины.

2885. Постройте четырехугольник по трем сторонам и углам, прилежащим к четвертой.

2886. Постройте треугольник ABC , зная три точки A_1, B_1 и C_1 , симметричные центру O описанной окружности этого треугольника относительно сторон BC, CA и AB .

2887. Точка X движется по окружности с центром O . На каждом радиусе OX откладывается отрезок OM , длина

которого равна расстоянию от точки X до заданного диаметра окружности. Найдите геометрическое место точек M .

2888. (Теорема Мансиона.) Докажите, что отрезок, соединяющий центры вписанной и невписанной окружностей треугольника, делится описанной окружностью пополам.

2889. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и точке, в которой ее касается вписанная окружность.

2890. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 20° . Докажите, что боковая сторона больше удвоенного основания, но меньше утроенного.

2891. На окружности фиксированы точки A и B , а точка C перемещается по этой окружности. Найдите множество точек пересечения высот треугольника ABC .

2892. Даны отрезок AB и на нем точка C . Найдите геометрическое место точек пересечения двух равных окружностей, одна из которых проходит через точки A и C , другая — через точки C и B .

2893. Точки A, B и C лежат на одной прямой (точка B расположена между точками A и C). Через точки A и B проводятся окружности, а через точку C — касательные к ним. Найдите геометрическое место точек касания.

2894. Даны прямая и на ней точки A и B . Найдите геометрическое место точек касания окружностей, одна из которых касается данной прямой в точке A , другая — в точке B .

2895. Постройте треугольник по биссектрисе, медиане и высоте, проведенным из одной вершины.

2896. Постройте остроугольный треугольник ABC по основаниям A_1, B_1, C_1 его высот.

2897. Постройте треугольник по трем высотам.

2898. Постройте ромб, две стороны которого лежат на двух данных параллельных прямых, а две другие проходят через две данные точки.

2899. Постройте четырехугольник по диагоналям, углу между ними и двум каким-нибудь сторонам.

2900. Постройте выпуклый четырехугольник по четырем сторонам и отрезку, соединяющему середины двух противоположных сторон.

2901. Даны три точки A , B и C . Постройте три окружности, попарно касающиеся в этих точках.

2902. Через точку пересечения двух окружностей проведена прямая, вторично пересекающая окружности в двух точках A и B . Найдите геометрическое место середин отрезков AB .

2903. Около данного треугольника опишите треугольник, равный другому данному треугольнику.

2904. В данный треугольник впишите треугольник, равный другому данному треугольнику.

2905. На стороне треугольника постройте точку, сумма расстояний от которой до двух других сторон равна данному отрезку.

2906. Постройте треугольник ABC , зная три точки A_1 , B_1 и C_1 , симметричные точке пересечения высот (ортоцентру) треугольника относительно сторон BC , CA , AB (оба треугольника — остроугольные).

2907. Даны отрезки a и b . Постройте отрезок x , равный $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

2908. Через точку K , данную на стороне AB треугольника ABC , проведите прямую так, чтобы она разделила площадь треугольника пополам.

2909. Постройте остроугольный треугольник по основаниям двух его высот и прямой, содержащей третью высоту.

2910. Даны окружность S , точка A на ней и точка H внутри нее. Постройте на окружности точки B и C так, что-

бы точка H была точкой пересечения высот треугольника ABC .

2911. Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

2912. На окружности заданы две точки A и B . Проводятся всевозможные пары окружностей, касающихся внешним образом друг друга и касающихся внешним образом данной окружности в точках A и B . Какое множество образуют точки взаимного касания этих пар окружностей?

2913. Восстановите треугольник, если на плоскости отмечены три точки: O — центр описанной окружности, P — точка пересечения медиан, H — основание одной из высот этого треугольника.

2914. Постройте треугольник ABC , если заданы его наименьший угол A и отрезки длины $d = AB - BC$ и $e = AC - BC$.

2915. Дана линейка с делениями через 1 см. Проведите какую-нибудь прямую, перпендикулярную данной прямой.

2916. Найдите геометрическое место точек, расположенных внутри данного угла, сумма расстояний от которых до сторон этого угла имеет данную величину.

2917. Найдите геометрическое место точек, расположенных внутри данного угла, разность расстояний от которых до сторон этого угла имеет данную величину.

2918. Найдите геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных прямых имеет данную величину.

2919. Постройте квадрат по четырем точкам, лежащим на четырех его сторонах.

2920. Даны две параллельные прямые l и l_1 . С помощью одной линейки проведите через данную точку M прямую, параллельную прямым l и l_1 .

14. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА И ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

2939. Докажите, что:

а) против большего угла треугольника лежит большая сторона;

б) против большей стороны треугольника лежит больший угол.

2940. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $AB = A_1B_1$, $AC = AC_1$, а $\angle A > \angle A_1$. Докажите, что $BC > B_1C_1$. Верно ли обратное?

2941. Стороны равнобедренного треугольника равны 1 и 3. Какая из сторон является боковой?

2942. Может ли в треугольнике сторона быть вдвое больше другой стороны и вдвое меньше третьей?

2943. У равнобедренного треугольника стороны равны 3 и 7. Какая из сторон является основанием?

2944. Докажите, что любая хорда окружности не больше диаметра и равна ему только тогда, когда сама является диаметром.

2945. Докажите, что площадь треугольника ABC не превосходит $\frac{1}{2}AB \cdot AC$.

2946. В равнобедренном треугольнике ABC на продолжении основания BC за точку C взята точка D (рис. 114). Докажите, что угол ABC больше угла ADC .

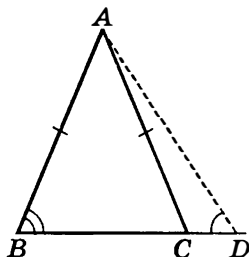


Рис. 114

2947. Докажите, что любая диагональ четырехугольника меньше половины его периметра.

2948. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Докажите, что

$$AB + CD < AC + BD.$$

2949. Пусть c — наибольшая сторона треугольника со сторонами a , b , c . Докажите, что если $a^2 + b^2 > c^2$, то треугольник — остроугольный, а если $a^2 + b^2 < c^2$, то тупоугольный.

2950. В треугольнике ABC известно, что $AB < BC < AC$, а один из углов вдвое меньше другого и втрое меньше третьего. Найдите угол при вершине A .

2951. Докажите, что сумма высот треугольника меньше его периметра.

2952. В треугольнике две стороны равны 3,14 и 0,67. Найдите третью сторону, если известно, что она равна целому числу.

2953. Среди всех треугольников с заданными сторонами AB и AC найдите тот, у которого наибольшая площадь.

2954. Одна окружность находится внутри другой. Их радиусы равны 28 и 12, а кратчайшее расстояние между точками этих окружностей равно 10. Найдите расстояние между центрами.

2955. Докажите, что каждая сторона четырехугольника меньше суммы трех других его сторон.

2956. Докажите, что высота неравнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, меньше половины гипотенузы.

2957. Может ли основание равнобедренного треугольника быть вдвое больше боковой стороны?

2958. Сколько можно составить треугольников из отрезков, равных: а) 2, 3, 4, 5; б) 2, 3, 4, 5, 6, 7?

2959. В треугольнике две стороны равны 1 и 6. Найдите третью сторону, если известно, что ее длина равна целому числу.

2960. В треугольнике ABC угол A равен среднему арифметическому двух других углов. Укажите среднюю по величине сторону треугольника.

2961. Даны четыре точки A, B, C и D . Докажите, что $AD \leq AB + BC + CD$.

2962. Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до его вершин больше половины периметра.

2963. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ не превосходит $\frac{1}{2}(AB \cdot BC + AD \cdot DC)$.

2964. Внутри треугольника ABC взята точка M . Докажите, что угол BMC больше угла BAC .

2965. Пусть CK — биссектриса треугольника ABC и $AC > BC$. Докажите, что угол AKC — тупой.

2966. Диагонали выпуклого четырехугольника равны d_1 и d_2 . Какое наибольшее значение может иметь его площадь?

2967. Пусть AA_1 и BB_1 — медианы треугольника ABC . Докажите, что

$$AA_1 + BB_1 > \frac{3}{2}AB.$$

2968. Радиус окружности равен 10, данная точка удалена от центра на расстояние, равное 15. Найдите ее наименьшее и наибольшее расстояния от точек окружности.

2969. Докажите, что в треугольнике каждая сторона меньше половины периметра.

2970. В треугольнике ABC на наибольшей стороне BC , равной b , выбирается точка M . Найдите наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAM и ACM .

2971. Существует ли четырехугольник со сторонами, равными: а) 1, 1, 1, 2; б) 1, 2, 3, 6?

2972. Докажите, что отрезок, соединяющий вершину равнобедренного треугольника с точкой, лежащей на основании, не больше боковой стороны треугольника.

2973. В треугольнике PQR сторона PQ не больше, чем 9, сторона PR не

больше, чем 12. Площадь треугольника не меньше, чем 54. Найдите его медиану, проведенную из вершины P .

2974. Существует ли треугольник, у которого две высоты больше 1 м, а площадь меньше 1 см²?

2975. Докажите, что в любом треугольнике большей стороне соответствует меньшая высота.

2976. Докажите, что в треугольнике со сторонами a, b, c медиана m , проведенная к стороне c , удовлетворяет неравенству $m > \frac{1}{2}(a + b - c)$.

2977. Внутри треугольника ABC найдите точку, из которой сторона AB видна под наименьшим углом.

2978. Найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин данного выпуклого четырехугольника минимальна.

2979. Наименьшее расстояние от данной точки до точек окружности равно a , а наибольшее равно b . Найдите радиус.

2980. Радиус окружности равен 10, данная точка удалена от ее центра на расстояние, равное 3. Найдите ее наименьшее и наибольшее расстояния от точек окружности.

2981. Докажите, что из всех хорд, проходящих через точку A , взятую внутри круга, наименьшей будет та, которая перпендикулярна диаметру, проходящему через точку A .

2982. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB и AC соответственно в точках M и N (рис. 115). Докажите, что $BN > MN$.

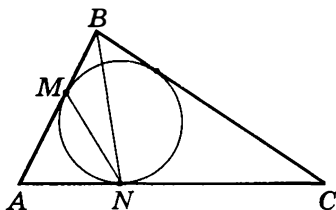


Рис. 115

2983. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит прямой угол на два неравных угла. Докажите, что катет, прилежащий к меньшему из них, меньше другого катета.

2984. Основание D высоты AD треугольника ABC лежит на стороне BC , причем $\angle BAD > \angle CAD$. Что больше: AB или AC ?

2985. Четыре дома расположены в вершинах выпуклого четырехугольника. Где нужно вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до четырех домов была наименьшей?

2986. Докажите, что каждая сторона треугольника видна из центра вписанной окружности под тупым углом.

2987. Две прямые, проходящие через точку C , касаются окружности в точках A и B . Может ли прямая, проходящая через середины отрезков AC и BC , касаться этой окружности?

2988. Отрезок соединяет вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне. Докажите, что этот отрезок меньше большей из двух других сторон.

2989. Докажите, что медиана треугольника ABC , проведенная из вершины A , меньше полусуммы сторон AB и AC .

2990. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырехугольника меньше периметра, но больше полупериметра этого четырехугольника.

2991. У треугольника ABC угол C — тупой. Докажите, что если точка X лежит на стороне AC , то $BX < AB$.

2992. Докажите, что большему из двух острых вписанных углов соответствует большая хорда.

2993. Пусть BD — биссектриса треугольника ABC . Докажите, что $AB > AD$ и $CB > CD$.

2994. Площадь треугольника равна 1. Докажите, что средняя по длине его сторона не меньше $\sqrt{2}$.

2995. Докажите, что если a, b, c — стороны произвольного треугольника, то $a^2 + b^2 > \frac{c^2}{2}$.

2996. Пусть m_1 и m_2 — медианы, проведенные к сторонам a и b треугольника со сторонами a, b, c . Докажите, что $m_1^2 + m_2^2 > \frac{9c^2}{8}$.

2997. Все биссектрисы треугольника меньше 1. Докажите, что его площадь меньше 1.

2998. Через точку пересечения двух окружностей проведите прямую, на которой окружности высекают хорды, сумма которых наибольшая. (Центры окружностей расположены по разные стороны от их общей хорды.)

2999. При каком значении высоты прямоугольная трапеция с острым углом 30° и периметром 6 имеет наибольшую площадь?

3000°. Возможен ли треугольник со сторонами $a = 7$ и $b = 2$, если известно, что высота, опущенная на третью сторону этого треугольника, является средним геометрическим двух других высот?

3001°. Диагонали четырехугольника, вписанного в окружность, пересекаются в точке E . На прямой AC взята точка M , причем $\angle DME = 80^\circ$, $\angle ABD = 60^\circ$, $\angle CBD = 70^\circ$. Где расположена точка M : на диагонали AC или на ее продолжении? Ответ обоснуйте.

3002. Дана окружность с хордой и касательной, причем точка касания лежит на меньшей из двух дуг, стягиваемых хордой. Найдите на касательной точку, из которой хорда видна под наименьшим углом.

3003. Наименьшее расстояние между точками двух концентрических окружностей равно 2, а наибольшее равно 16. Найдите радиусы окружностей.

3004. Докажите, что медиана треугольника ABC , проведенная из вер-

шины A , больше модуля полуразности сторон AB и AC .

3005. У треугольника ABC угол C — тупой. Докажите, что если точка X лежит на стороне AC , а точка Y — на стороне BC , то $XY < AB$.

3006. В треугольнике ABC известно, что $\angle B \geq 90^\circ$. На отрезке BC взяты точки M и N так, что лучи AN и AM делят угол BAC на три равные части. Докажите, что $BM < MN < NC$.

3007°. Докажите, что если D — середина основания BC равнобедренного треугольника ABC , а M — произвольная точка на AC , то

$$DB - DM < AB - AM.$$

3008°. В трапеции $ABCD$ углы при основании AD удовлетворяют неравенству $\angle A < \angle B < 90^\circ$. Докажите, что тогда $AC > BD$.

3009. Берег реки — прямая линия. Отгородите от него прямоугольным забором общей длины p участок наибольшей площади.

3010. В треугольнике ABC сторона AC не длиннее, чем 3, сторона BC не длиннее, чем 4, а его площадь не меньше, чем 6. Найдите радиус описанной вокруг треугольника ABC окружности.

3011. Докажите, что наибольшее расстояние между точками двух окружностей, лежащих одна вне другой, равно сумме радиусов этих окружностей и расстояния между их центрами.

3012. Докажите, что кратчайшее расстояние между точками двух окружностей, лежащих одна вне другой, есть отрезок линии центров, заключенный между окружностями (рис. 116).

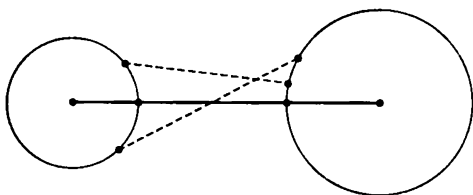


Рис. 116

3013°. Окружность радиуса 2 касается окружности радиуса 4 в точке B . Прямая, проходящая через точку B , пересекает окружность меньшего радиуса в точке A , а большего радиуса — в точке C . Найдите BC , если $AC = 3\sqrt{2}$.

3014. Биссектриса угла при основании BC равнобедренного треугольника ABC пересекает боковую сторону AC в точке K . Докажите, что $BK < 2CK$.

3015. Две окружности радиусов r и R ($r < R$) пересекаются. Докажите, что расстояние между их центрами меньше, чем $r + R$, но больше, чем $R - r$.

3016. Дан выпуклый n -угольник, все углы которого тупые. Докажите, что сумма его диагоналей больше периметра.

3017°. Докажите, что в параллелограмме против большего угла лежит большая диагональ.

3018°. В равнобедренной трапеции диагональ равна 8 и является биссектрисой одного из углов. Может ли одно из оснований этой трапеции быть меньше 4, а другое равно 5?

3019°. В треугольнике ABC известно, что $AB = 6$, $BC = 9$, $AC = 10$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке M . На отрезке BM взята точка O так, что $BO : OM = 3 : 1$. Площадь какого из треугольников ABO , BCO или ACO будет наименьшей?

3020. Докажите, что расстояние между любыми двумя точками взятыми на сторонах треугольника, не больше наибольшей из его сторон.

3021°. Дан треугольник ABC , CD — медиана, проведенная к стороне AB . Докажите, что если $AC > BC$, то угол ACD меньше угла BCD .

3022. В треугольнике ABC угол B прямой или тупой. На стороне BC взяты точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Докажите, что

$$\angle BAM > \angle MAN > \angle NAC.$$

3023. Пусть a, b, c — стороны произвольного треугольника. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac).$$

3024. Пусть AA_1 — медиана треугольника ABC . Докажите, что угол A острый тогда и только тогда, когда $AA_1 > \frac{1}{2}BC$.

3025. Точки M и N лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC , причем $AM = CN$ и $AN = BM$ (рис. 117). Докажите, что площадь четырехугольника $BMNC$ по крайней мере в три раза больше площади треугольника AMN .

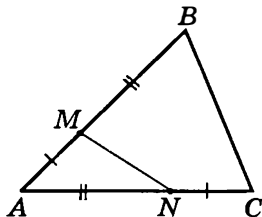


Рис. 117

3026. Пусть h_1 и h_2 — высоты треугольника, r — радиус вписанного круга. Докажите, что $\frac{1}{2r} < \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} < \frac{1}{r}$.

3027. Радиус вписанной окружности треугольника равен $\frac{1}{3}$. Докажите, что наибольшая высота треугольника не меньше 1.

3028. Докажите, что среди всех треугольников с данным основанием и высотой, опущенной на это основание, наибольшую величину противолежащего угла имеет равнобедренный треугольник.

3029. Проведите через вершину A остроугольного треугольника ABC прямую так, чтобы она не пересекала сторону BC и чтобы сумма расстояний до нее от вершин B и C была наибольшей.

3030. На сторонах прямого угла с вершиной O лежат концы отрезка AB фиксированной длины a . При каком положении отрезка площадь треугольника AOB будет наибольшей?

3031. Середины высот треугольника ABC лежат на одной прямой. Наибольшая сторона треугольника $AB = 10$. Какое максимальное значение может принимать площадь треугольника ABC ?

3032. Площадь треугольника ABC равна 10. Какое наименьшее значение может принимать радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если известно, что середины высот этого треугольника лежат на одной прямой?

3033. В треугольнике ABC со стороной $AC = 8$ проведена биссектриса BL . Известно, что площади треугольников ABL и BLC относятся, как 3 : 1. Найдите биссектрису BL , при которой высота, опущенная из вершины B на основание AC , будет наибольшей.

3034. В треугольнике KLM с основанием $KM = 6$ проведена медиана LP . Известно, что расстояния от точки P до боковых сторон KL и LM относятся, как 1 : 2. Найдите медиану LP , при которой площадь треугольника KLM будет наибольшей.

3035. Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и 3 равно 8. Найдите наименьшее и наибольшее из расстояний между точками, одна из которых лежит на первой окружности, а другая — на второй.

3036°. В треугольнике ABC с основанием $AC = 8$ проведена биссектриса BL . Известно, что площади треугольников ABL и BLC относятся, как 3 : 1. Найдите биссектрису BL , при которой высота, опущенная из вершины B на основание AC , будет наибольшей.

3037. Докажите, что если точка M лежит внутри треугольника ABC , то $MB + MC < AB + AC$.

3038. Докажите, что площадь четырехугольника $ABCD$ не превосходит $\frac{1}{2}(AB \cdot DC + AD \cdot BC)$.

3039. Докажите, что в любом треугольнике сумма его медиан больше $\frac{3}{4}$ периметра, но меньше периметра.

3040. Существует ли треугольник, все высоты которого меньше 1, а площадь больше или равна 10?

3041. Докажите, что в любом треугольнике большей стороне соответствует меньшая медиана.

3042. Докажите, что если внутри треугольника ABC существует точка D , для которой $AD = AB$, то $AB < AC$.

3043. Пусть h_1, h_2, h_3 — высоты треугольника, r — радиус вписанной окружности. Докажите, что

$$h_1 + h_2 + h_3 \geq 9r.$$

3044. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна h . Какую наименьшую длину может иметь медиана, делящая пополам больший катет?

3045. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 4, $\angle CAB = 60^\circ$, а радиус описанной окружности равен 2,2. Докажите, что длина высоты, опущенной из вершины C на AB , меньше $\frac{11\sqrt{3}}{5}$.

3046. Биссектриса треугольника делит его сторону на два отрезка. Докажите, что к большей из двух других сторон треугольника примыкает больший из них.

3047. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого пятиугольника $ABCDE$ больше периметра, но меньше удвоенного периметра.

3048. На продолжении стороны AC треугольника ABC отложен отрезок $CD = CB$. Докажите, что если $AC > BC$, то угол ABD — тупой.

3049. Докажите, что среди всех треугольников ABC с фиксированным углом $\angle A = \alpha$ и площадью S наимень-

шую сторону BC имеет равнобедренный треугольник с основанием BC .

3050. Длины двух сторон треугольника 10 и 15. Докажите, что биссектриса угла между ними не больше 12.

3051. Найдите среди всех треугольников с данным основанием и данной площадью треугольник наименьшего периметра.

3052. Среди треугольников KLM , у которых радиус описанной окружности равен 10, сторона KL равна 16, высота MH равна $\frac{39}{10}$. Найдите угол KLM

того треугольника, медиана MN которого наименьшая.

3053. Найдите радиус наибольшей окружности, касающейся изнутри двух пересекающихся окружностей с радиусами R и r , если расстояние между их центрами равно a ($a < R + r$).

3054. Рассмотрим равнобедренный треугольник с одними и теми же боковыми сторонами. Докажите, что чем больше угол при вершине, тем меньше высота, опущенная на основание.

3055. Рассмотрим равнобедренные треугольники с одними и теми же боковыми сторонами. Докажите, что чем больше основание, тем меньше проведенная к нему высота.

3056. BD — биссектриса треугольника ABC , причем $AD > CD$. Докажите, что $AB > BC$.

3057. Постройте треугольник с наименьшим возможным периметром по данной стороне и проведенной к ней высоте.

3058. Постройте окружность наибольшего радиуса, вписанную в данный сегмент данного круга. (Сегмент — это часть круга, отсекаемая от него хордой.)

3059. Хорда AB видна из центра круга радиуса R под углом, равным 120° . Найдите радиусы наибольших окружностей, вписанных в сегменты, на которые хорда AB разбивает данный круг.

3060. В вершине A единичного квадрата $ABCD$ сидит муравей. Ему надо добраться до точки C , где находится вход в муравейник. Точки A и C разделяет вертикальная стена, имеющая вид равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой BD . Найдите длину кратчайшего пути, который надо преодолеть муравью, чтобы попасть в муравейник.

3061. В тупоугольном треугольнике ABC на стороне AB , равной 14, выбрана точка L , равноудаленная от прямых AC и BC , а на отрезке AL — точка K , равноудаленная от вершин A и B . Найдите синус угла ACB , если $KL = 1$, а $\angle CAB = 45^\circ$.

3062. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри треугольника, до его вершин меньше периметра треугольника.

3063. На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC взята точка M , отличная от C . Докажите, что

$$MA + MB > CA + CB.$$

3064. Две высоты треугольника равны 12 и 20. Докажите, что третья высота меньше 30.

3065. В треугольнике ABC AD — биссектриса угла A . Через точку A проведена прямая, перпендикулярная к AD , и из вершины B опущен перпендикуляр BB_1 на эту прямую (рис. 118). Докажите, что периметр треугольника BB_1C больше периметра треугольника ABC .

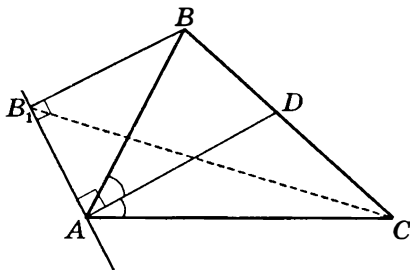


Рис. 118

3066. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ имеет место неравенство $AB \geq AC$, то $BD > DC$.

3067. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, все диагонали которого равны?

3068. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и B равны, а $\angle D > \angle C$. Докажите, что тогда $AD < BC$.

3069. Пусть M и N — середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ и $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$. Докажите, что $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

3070. Периметр выпуклого четырехугольника равен 4. Докажите, что его площадь не превосходит 1.

3071. Пусть E, F, G, H — середины сторон AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $S(ABCD) \leq EG \cdot HF$.

3072. Стороны треугольника не превосходят 1. Докажите, что его площадь не превосходит $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

3073. Две высоты треугольника равны 10 и 6. Докажите, что третья высота меньше 15.

3074. Каждая сторона выпуклого четырехугольника меньше a . Докажите, что его площадь меньше a^2 .

3075. Точки M и N расположены по одну сторону от прямой l . Постройте на прямой l такую точку K , чтобы сумма $MK + NK$ была наименьшей.

3076. Точки M и N расположены по разные стороны от прямой l . Постройте на прямой l такую точку K , чтобы разность отрезков MK и NK была наибольшей.

3077. Пусть вписанная окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC в точках B_1 и A_1 . Докажите, что если $AC > BC$, то $AA_1 > BB_1$.

3078. На плоскости даны прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее.

На прямой l выбраны точка M , сумма расстояний от которой до точек A и B наименьшая, и точка N , для которой расстояния от A и B равны: $AN = BN$. Докажите, что точки A, B, M, N лежат на одной окружности.

3079. Две окружности радиусов r и R с центрами в точках O_1 и O касаются внутренним образом в точке K . В точке A окружности радиуса r проведена касательная, пересекающая окружность радиуса R в точках B и C . Известно, что $AC : AB = p$ и отрезок AC пересекает отрезок OK . Определите:

а) при каких условиях на r, R и p возможна такая геометрическая конфигурация;

б) отрезок BC .

3080. В тупоугольном треугольнике наибольшая сторона равна 4, а наименьшая — 2. Может ли площадь треугольника быть больше $2\sqrt{3}$?

3081. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E — пересечение диагоналей. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 1, площадь всего четырехугольника не превосходит 4, $AD = 3$. Найдите сторону BC .

3082. Докажите, что биссектриса треугольника не меньше высоты и не больше медианы, проведенных из той же вершины.

3083. Докажите, что расстояние между серединами диагоналей выпуклого четырехугольника не меньше модуля полуразности пары его противоположных сторон.

3084. Через точку O пересечения медиан треугольника ABC проведена прямая, пересекающая его стороны в точках M и N . Докажите, что

$$NO \leq 2MO.$$

3085. Пусть $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — два выпуклых четырехугольника с соответственно равными сторонами. Докажите, что если $\angle A > \angle A_1$, то $\angle B < \angle B_1$, $\angle C > \angle C_1$, $\angle D < \angle D_1$.

3086. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC делит другую диагональ пополам и $BC + CD = AB + AD$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

3087. Известно, что в треугольнике ABC угол A равен 60° . Докажите, что $AB + AC \leq 2BC$.

3088. В треугольник с периметром $2p$ вписана окружность. К этой окружности проведена касательная, параллельная стороне треугольника. Найдите наибольшую возможную длину отрезка этой касательной, заключенного внутри треугольника.

3089. Докажите, что не существует двух (отличных от параллелограмма) трапеций таких, что боковые стороны каждой из них соответственно равны основаниям другой.

3090. Внутри угла даны точки M и N . Постройте на сторонах угла точки K и L так, чтобы периметр четырехугольника $MKLN$ был наименьшим.

3091. На окружности, описанной около треугольника ABC , найдите точку M такую, что расстояние между ее проекциями на прямые AC и BC максимально.

3092. Докажите, что среди всех четырехугольников с данной площадью наименьший периметр имеет квадрат.

3093. На сторонах AB и AC угла BAC , равного 120° , как на диаметрах построены полуокружности (рис. 119). В общую часть образовавшихся полуокругов вписана окружность максимального радиуса. Найдите радиус этой окружности, если $AB = 4$, $AC = 2$.

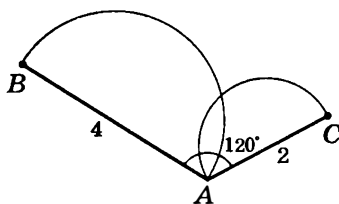


Рис. 119

3094. Около данного треугольника опишите равносторонний треугольник с наибольшим возможным периметром.

3095. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Докажите, что если периметр треугольника ABD меньше периметра треугольника ACD , то $AB < AC$.

3096. Даны угол XAY и точка O внутри него. Проведите через точку O прямую, отсекающую от данного угла треугольник наименьшей площади.

3097. Докажите, что из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине наибольший периметр имеет равнобедренный треугольник.

3098. Высота треугольника в два раза меньше его основания, а один из углов при основании равен 75° . Докажите, что треугольник — равнобедренный.

3099. На прямой, содержащей сторону AB остроугольного треугольника ABC , постройте точку M такую, что расстояние между ее проекциями на прямые AC и BC минимально. Чему равно это расстояние?

3100. От данного угла двумя прямыми разрезами длиной 1 отрезьте многоугольник наибольшего возможного периметра.

3101. В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $DO = 4$, $BC = 5$, $\angle ABD = 45^\circ$, где O — точка пересечения диагоналей. Найдите BO , если известно, что площадь четырехугольника $ABCD$ равна $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$.

3102. Диагональ AC делит площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ на две равные части. Докажите, что если $AB > AD$, то $BC < DC$.

3103. На плоскостиданы прямая l и две точки P и Q , лежащие по одну сторону от нее. Найдите на прямой l та-

кую точку M , для которой расстояние между основаниями высот треугольника PQM , опущенных на стороны PM и QM , наименьшее.

3104. Среди всех четырехугольников с данными диагоналями и данным углом между ними найдите четырехугольник наименьшего периметра.

3105. Среди всех треугольников ABC с данным углом C и стороной AB найдите треугольник с наибольшим возможным периметром.

3106. От данного угла отрезком данной длины отрезьте треугольник наибольшего возможного периметра.

3107. Середины соседних сторон выпуклого многоугольника соединены отрезками. Докажите, что периметр многоугольника, образованного этими отрезками, не меньше половины периметра исходного многоугольника.

3108. Докажите, что если треугольник не тупоугольный, то сумма трех его медиан не меньше, чем учетверенный радиус описанного круга.

3109. Пусть точка C — середина дуги AB некоторой окружности, а D — любая другая точка этой дуги. Докажите, что $AC + BC > AD + BD$.

3110. Докажите, что в любом треугольнике имеет место неравенство $R \geq 2r$ (R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей), причем равенство имеет место только для правильного треугольника.

3111. Через данную точку проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник наименьшего возможного периметра.

3112. Докажите, что в любом треугольнике большей стороне соответствует меньшая биссектриса.

3113. Впишите в данный остроугольный треугольник ABC треугольник наименьшего периметра.

КОНКУРСНЫЕ ЗАДАЧИ

3114. Впишите окружность в данный ромб.

3115. В прямоугольнике $ABCD$ отрезки AB и BD равны соответственно 2 и $\sqrt{7}$ (рис. 120). Точка M делит отрезок CD в отношении 1 : 2, считая от точки C , K — середина AD . Что больше: BK или AM ?

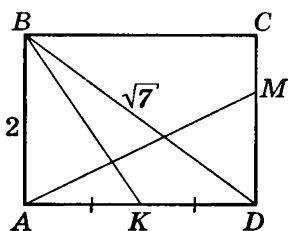


Рис. 120

3116. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно $2\sqrt{7}$, боковая сторона равна 8. Точка K делит высоту BD треугольника в отношении 2 : 3, считая от точки B . Что больше: CK или AC ?

3117. Площадь треугольника ABC равна S , $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$. Найдите AB .

3118. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $BD \parallel AE$ и $\angle CAE = 2\angle CEA$, $\angle CBD - \angle CDB = \alpha$. Найдите отношение периметра треугольника ACE к радиусу описанной около него окружности.

3119. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины A прямого угла опущена высота AH на гипотенузу BC .

Известно, что $AC = 5$, $HC = 3$. Найдите площадь треугольника ABC .

3120. Основание AC равнобедренного треугольника ABC является хордой окружности. Эта окружность касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Известно, что $\angle ABC = 120^\circ$, $AC = a$. Найдите площадь той части треугольника, которая лежит в круге, ограниченном данной окружностью.

3121. На высоте CE , опущенной из вершины C прямоугольного треугольника ABC на гипотенузу AB , как на диаметре построена окружность, которая пересекает катет BC в точке K . Найдите площадь треугольника BKE , если катет BC равен a и $\angle BAC = \alpha$.

3122. Около трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC описана окружность радиуса 5. Центр описанной окружности лежит на основании AD . Основание BC равно 6. Найдите диагональ AC данной трапеции.

3123. В треугольнике ABC угол BAC — прямой, стороны AB и BC равны соответственно 4 и 8. Биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке L , G — точка пересечения медиан треугольника ABC . Что больше: BL или CG ?

3124. В прямоугольном треугольнике ABC с равными катетами AC и BC на стороне AC как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону AB в точке M . Найдите расстояние от вершины B до центра этой окружности, если $BM = \sqrt{2}$.

3125. Дан треугольник ABC , в котором угол B равен 30° , $AB = 4$, $BC = 6$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D . Найдите площадь треугольника ABD .

3126. Точка C лежит на стороне MN ромба $KLMN$, причем $CN = 2CM$ и угол MNK равен 120° . Найдите отношение косинусов углов CKN и CLM .

3127. В равнобедренном прямоугольном треугольнике радиус вписанной окружности равен 2. Найдите расстояние от вершины острого угла до точки, в которой вписанная окружность касается противоположащего этому углу катета.

3128. Пусть O — центр правильного треугольника ABC , сторона которого равна 10. Точка K делит медиану BM треугольника BOC в отношении $3 : 1$, считая от точки B . Что больше: длина BO или длина BK ?

3129. На сторонах AD и DC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки K и M так, что $DK : KA = 2 : 1$, а $DM : MC = 1 : 1$. Найдите отношение площади треугольника DKM к площади четырехугольника $BCDK$.

3130. Дан треугольник ABC , в котором $AB = 6$, $BC = 7$, $AC = 5$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D . Найдите площадь треугольника ADC .

3131. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D . Известно, что $AB = 6$, $BC = 10$. Найдите площадь треугольника DBC .

3132. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Один из катетов делится точкой касания на отрезки длиной 6 и 10, считая от вершины прямого угла. Найдите площадь треугольника.

3133. На высоте CD , опущенной из вершины C прямоугольного треугольника ABC на гипотенузу AB , как на диаметре построена окружность, которая пересекает катет AC в точке E , а

катет BC — в точке F (рис. 121). Найдите площадь четырехугольника $CFDE$, если катет AC равен b , а катет BC равен a .

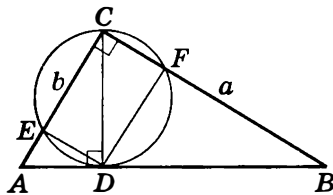


Рис. 121

3134. Диагональ BD четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Вычислите диагональ AC , если $BD = 2$, $AB = 1$, $\angle ABD : \angle BDC = 4 : 3$.

3135. Диагональ AC четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Вычислите диагональ BD , если $AC = 4$, $CD = 2\sqrt{2}$, $\angle BAC : \angle CAD = 2 : 3$.

3136. В прямоугольный треугольник ABC вписан квадрат так, что две его вершины лежат на гипотенузе AB , а две другие — на катетах. Радиус круга, описанного около треугольника ABC , относится к стороне квадрата, как $13 : 6$. Найдите углы треугольника.

3137. В окружность радиуса $3 + 2\sqrt{3}$ вписан правильный шестиугольник $ABCDEK$. Найдите радиус круга, вписанного в треугольник BCD .

3138. Средняя линия равнобедренной трапеции равна 10. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно $\frac{7}{13}$. Найдите высоту трапеции.

3139. В круге с центром O проведена хорда AB . Вычислите площадь по-

лучившегося сегмента, если $\angle AOB = \alpha$, а радиус круга равен r .

3140. Пусть $EFGH$ — выпуклый четырехугольник, а K, L, M, N — середины отрезков соответственно EF, FG, GH, HE ; O — точка пересечения отрезков KM и LN . Известно, что $\angle LOM = 90^\circ$, $KM = 3LM$, а площадь четырехугольника $KLMN$ равна S . Найдите диагонали четырехугольника $EFGH$.

3141. В треугольнике ABC угол B — прямой, медианы AD и BE взаимно перпендикулярны. Найдите величину угла C .

3142. В прямоугольном треугольнике ABC расположен прямоугольник $ADKM$ так, что его сторона AD лежит на катете AB , сторона AM — на катете AC , а вершина K — на гипотенузе BC . Катет AB равен 5, а катет AC равен 12. Найдите стороны прямоугольника $ADKM$, если его площадь равна $\frac{40}{3}$, а диагональ меньше 8.

3143. В треугольнике PQR сторона PR равна 3, сторона QR равна 4, а угол при вершине Q равен 45° . Найдите площадь треугольника, если расстояние от вершины Q до прямой PR меньше, чем $2\sqrt{3}$.

3144. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD , при этом углы ADC и CDB относятся, как 7 : 5. Найдите AD , если известно, что $BC = 1$, а угол BAC равен 30° .

3145. В треугольнике ABC угол ACB — прямой, CD — биссектриса, угол BDC равен 75° . Найдите BD , если известно, что $AC = \sqrt{3}$.

3146. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найдите высоту трапеции, если ее площадь равна 25.

3147. Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$, площадь которого равна 28, пересекаются в точке O . Найдите площади треугольников AOB, BOC, COD и DOA , если известно,

что площадь треугольника AOB в 2 раза больше площади треугольника COD , а площадь треугольника BOC в 18 раз больше площади треугольника DOA .

3148. Точка D лежит на стороне AB треугольника ABC , точки E и F — на стороне BC этого треугольника, а точка P — на стороне AC . Отрезок AD составляет две трети стороны AB , отрезок BF составляет три пятых стороны BC , отрезок BE составляет одну пятую стороны BC , а точка P делит сторону AC пополам. Найдите отношение площади четырехугольника $DEFP$ к площади треугольника ABC .

3149. A, B, C, D — последовательные вершины параллелограмма ($AD \parallel BC$). Точка E лежит на стороне AB , причем отрезок AE составляет $\frac{1}{6}$

этой стороны. Точка F лежит на стороне BC , причем отрезок BF составляет $\frac{1}{4}$ этой стороны. На стороне AD лежит

точка P , причем отрезок AP составляет $\frac{2}{3}$ этой стороны. Найдите отношение

площади треугольника EPF к площади параллелограмма.

3150. Точка D лежит на стороне AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$), причем $AB = 6$, $\angle BDC = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$, $AD = \sqrt{6}$. Найдите площадь треугольника ABC .

3151. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 3$, $BC = 6$, $\cos \angle B = \frac{1}{4}$, AD — биссектриса. Найдите радиус R окружности, описанной около треугольника ABD . Выясните, что больше: R или 1,65.

3152. Сторона AB треугольника ABC равна 24. Около треугольника описана окружность радиуса 13. Найдите стороны AC и BC треугольника, если известно, что радиус OC окружности делит сторону AB на два равных отрезка.

3153. Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) равна 128, а площадь треугольника BOC , где O — точка пересечения диагоналей трапеции, равна 2. Найдите площадь треугольника AOD .

3154. В треугольнике PQR со стороной $PQ = 3$ из вершины P к стороне QR проведены медиана $PM = \sqrt{14}$ и высота $PH = \sqrt{5}$. Найдите сторону PR , если известно, что $\angle QPR + \angle PRQ < 90^\circ$.

3155. Прямая, параллельная стороне LM треугольника KLM , пересекает сторону KL в точке A , а сторону KM — в точке B . Площадь трапеции $ALMB$ в три раза меньше площади треугольника ABK . Найдите $MB : MK$.

3156. В треугольнике BCD известно, что $BC = 3$, $CD = 5$. Из вершины C проведен отрезок CM ($M \in BD$), причем $\angle BCM = 45^\circ$ и $\angle MCD = 60^\circ$.

а) В каком отношении точка M делит сторону BD ?

б) Найдите отрезки BM и MD .

3157. В параллелограмме $ABCD$ точки P и Q лежат соответственно на сторонах BC и CD , M — точка пересечения прямых AP и BQ , причем $AM = 3MP$, $MQ = 3BM$. Найдите отношение $BP : PC$.

3158. В окружность радиуса 6 с центром в точке O вписан четырехугольник $ABCD$. Его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке K (рис. 122). Точки E и F являются соответственно серединами AC и BD . Отрезок OK равен 5, а

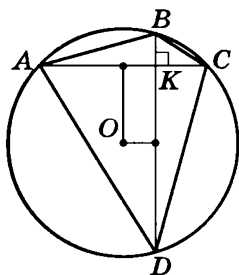


Рис. 122

площадь четырехугольника $OЕКF$ равна 12. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

3159. Даны две непересекающиеся окружности радиусов R и $2R$. К ним проведены общие касательные, которые пересекаются в точке A отрезка, соединяющего центры окружностей. Расстояние между центрами окружностей равно $2R\sqrt{3}$. Найдите площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных, заключенными между точками касания и большими дугами окружностей, соединяющими точки касания.

3160. Через вершины B и C треугольника ABC проведена окружность, которая пересекает сторону AB в точке K и сторону AC в точке E . Найдите AE , зная, что $AK = KB = a$, $\angle BCK = \alpha$, $\angle CBE = \beta$.

3161. Дан угол в 120° с вершиной C . Вне угла, на продолжении его биссектрисы, взята точка O так, что $OC = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

С центром в точке O построена окружность радиуса 1. Найдите площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключенной между ними.

3162. Внутри прямого угла с вершиной C , на его биссектрисе, взята точка O так, что $OC = \sqrt{2}$. С центром в точке O построена окружность радиуса 2. Найдите площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключенной между ними.

3163. В параллелограмме $PQRS$ угол при вершине Q равен 110° , а биссектриса угла при вершине P пересекает сторону RS в точке L . Найдите радиус окружности, касающейся отрезка PQ и лучей QR и PL , если известно, что $PQ = 9$.

3164. На плоскости даны две окружности радиусов 8 и 6 с центрами в точках S_1 и S_2 , касающиеся некоторой прямой в точках A_1 и A_2 и лежащие по

одну сторону от этой прямой. Известно, что $S_1S_2 : A_1A_2 = \sqrt{3} : 1$. Найдите S_1S_2 .

3165. На плоскости даны две окружности радиусов 5 и 2 с центрами в точках S_1 и S_2 , касающиеся некоторой прямой в точках A_1 и A_2 и лежащие по разные стороны от этой прямой. Известно, что $A_1A_2 : S_1S_2 = \sqrt{2} : 2$. Найдите A_1A_2 .

3166. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , сторона AB равна 1, а угол OAB равен 60° . Найдите площадь общей части кругов, описанных около треугольников AOB и BOC .

3167. Дан треугольник ABC . Известно, что $AB = 4$, $AC = 2$ и $BC = 3$. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке K . Прямая, проходящая через точку B параллельно AC , пересекает продолжение биссектрисы AK в точке M . Найдите KM .

3168. Дан квадрат $ABCD$, сторона которого равна a , и построены две окружности. Первая окружность целиком расположена внутри квадрата $ABCD$, касается стороны AB в точке E , а также касается стороны BC и диагонали AC . Вторая окружность имеет центром точку A и проходит через точку E (рис. 123). Найдите площадь общей части двух кругов, ограниченных этими окружностями.

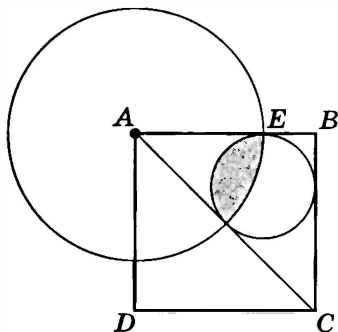


Рис. 123

3169. В треугольнике ABC косинус угла BAC равен $\frac{1}{2}$, $AB = 2$, $AC = 3$. Точка D лежит на продолжении стороны AC так, что C находится между A и D , $CD = 3$. Найдите отношение радиуса окружности, описанной около треугольника ABC , к радиусу окружности, вписанной в треугольник ABD .

3170. В треугольнике ABC косинус угла ACB равен $\frac{2}{3}$, $AC = 3$, $BC = 9$. Точка D лежит на стороне BC так, что $CD = 3$. Найдите отношение площади круга, описанного около треугольника ACD , к площади круга, вписанного в треугольник ABD .

3171. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбраны соответственно точки A_1 и C_1 так, что $A_1B : AB = 1 : 2$ и $BC_1 : BC = 1 : 4$. Через точки A_1 , B и C_1 проведена окружность. Через точку A_1 проведена прямая, пересекающая отрезок BC_1 в точке D , а окружность — в точке E . Найдите площадь треугольника A_1C_1E , если $BC_1 = 6$, $BD = 2$, $DE = 3$, а площадь треугольника ABC равна 32.

3172. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжение стороны AB за точку B пересекается с продолжением стороны DC за точку C в точке E . Найдите угол BAD , если $AB = 2$, $BD = 2\sqrt{6}$, $CD = 5$, $BE : EC = 4 : 3$.

3173. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ точки E, F, G, H — середины сторон соответственно KL, LM, MN, NK . Площадь четырехугольника $EFGH$ равна Q , $\angle HEF = 30^\circ$, $\angle EFH = 90^\circ$. Найдите диагонали четырехугольника $KLMN$.

3174. В окружности проведены хорды AB и AC , причем $AB = 2$, $AC = 1$, $\angle CAB = 120^\circ$. Найдите длину той хорды окружности, которая делит угол CAB пополам.

3175. В прямоугольнике $ABCD$ сторона AD равна 2. На продолжении

стороны AD за точку A взята точка E , причем $EA = 1$, $\angle BEC = 30^\circ$. Найдите DE .

3176. В трапеции $ABCD$ $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle ADC = 30^\circ$. Окружность, центр которой лежит на отрезке AD , касается прямых AB , BC и CD . Найдите площадь трапеции, если известно, что радиус окружности равен R .

3177. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке M , а биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке N так, что $BM = MC$, $2AN = ND$ и AM перпендикулярно BN . Найдите стороны и площадь четырехугольника $ABCD$, если его периметр равен 14 , а $\angle BAD = 60^\circ$.

3178. В равнобедренном треугольнике KLM ($KL = LM$) угол KLM равен φ . Найдите отношение радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника KLM .

3179. Четырехугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать и около него можно описать окружности. Разность сторон AD и BC равна разности длин сторон AB и CD . Докажите, что диагональ AC — диаметр описанной окружности.

3180. На боковой стороне AD трапеции $ABCD$ взята такая точка M , что $AM : DM = 3 : 2$. На противоположной стороне BC взята такая точка N , что отрезок MN делит трапецию на части, одна из которых по площади вдвое больше другой. Найдите отношение $CN : BN$, если $AB : CD = 3 : 2$.

3181. На стороне AB треугольника ABC взята точка D , а на стороне AC — точка E так, что отрезок AE равен отрезку BD и равен 2 . Прямые BE и CD пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника BOC , если каждая из сторон AB и BC равна 5 , а сторона AC равна 6 .

3182. На продолжении стороны AB за точку B треугольника ABC отложен отрезок AD так, что $AD : AB = \alpha$. На

продолжении медианы BE отложен отрезок EF так, что $EF : BE = \beta$. Найдите отношение площадей треугольников BDF и ABC .

3183. В треугольнике ABC проведены биссектрисы DB и AE . Найдите отношение площадей треугольников ABC и BDE , если $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$.

3184. Точка D лежит на стороне AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = CB$), причем $AD = \frac{4}{5}AB$, $\angle BAC = \arccos \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$, $CD = 7$. Найдите площадь

треугольника ABC .

3185. Диагонали четырехугольника $PQRS$, вписанного в окружность, пересекаются в точке D . На прямой PR взята точка A , причем $\angle SAD = 50^\circ$, $\angle PQS = 70^\circ$, $\angle RQS = 60^\circ$. Где расположена точка A : на диагонали PR или на ее продолжении? Ответ обоснуйте.

3186. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали AC и AD являются биссектрисами углов при вершинах C и D соответственно, $\angle B = 25^\circ$, $\angle E = 155^\circ$, а площадь пятиугольника $ABCDE$ равна 12 . Найдите площадь треугольника ACD .

3187. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали AC и EC являются биссектрисами углов при вершинах A и E соответственно, $\angle B = 125^\circ$, $\angle D = 55^\circ$, а площадь пятиугольника $ABCDE$ равна 14 . Найдите площадь треугольника ACE .

3188. В ромб, одна из диагоналей которого равна 20 , вписан круг радиуса 6 . Вычислите площадь части ромба, расположенной вне круга. Будет ли эта площадь больше 36 ? (Ответ обосновать.)

3189. В треугольнике MNP угол N — прямой, $MN = 6$, $NP = 3$. Точка K лежит на стороне MP , A и B — точки пересечения медиан соответственно в треугольниках MNK и KNP . Найдите площадь треугольника NAB .

3190. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O . Радиус AO перпендикулярен радиусу OB , а радиус OC перпендикулярен радиусу OD (рис. 124). Перпендикуляр, опущенный из точки C на прямую AD , равен 9; BC в два раза меньше AD . Найдите площадь треугольника AOB .

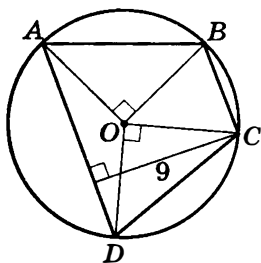


Рис. 124

3191. В треугольнике ABC с периметром $2p$ острый угол ABC равен α и $AC = \alpha$. В треугольник вписана окружность с центром в точке O . Найдите площадь треугольника AOC .

3192. В окружность радиуса 10 вписан четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны и равны 12 и $10\sqrt{3}$. Найдите стороны четырехугольника.

3193. В параллелограмме $ABCD$ сторона AD равна 6. Биссектриса угла ADC пересекает прямую AB в точке E . В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T ; $KT = 3$. Найдите угол BAD .

3194. Окружность с центром в точке O проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает сторону AC в точке M и сторону BC в точке N . Углы AOM и BON равны 60° . Расстояния от точки N до прямой AB равно $5\sqrt{3}$. Длина отрезка MN в четыре раза меньше длины отрезка AB . Найдите площадь треугольника ABC .

3195. В окружность вписан равнобедренный треугольник с основанием

a и углом при основании α . Кроме того, построена вторая окружность, касающаяся первой окружности и основания треугольника, причем точка касания является серединой основания. Найдите радиус второй окружности. Если решение не единственное, рассмотрите все случаи.

3196. В прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 4 проведена высота CD из вершины C прямого угла. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD .

3197. В треугольнике ABC на стороне BC взята точка P , а на стороне AC взята точка M . Отрезки AP и BM пересекаются в точке O . Известно, что треугольники BOP , AOM и BOA подобны. $BM = 1$, косинус угла ABC равен 0,6. Найдите площадь треугольника ABC .

3198. В треугольник ABC со стороной BC , равной 11, вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке D . Известно, что $AC = CD$ и косинус угла BAC равен $\frac{1}{6}$. Найдите сторону AC .

3199. В треугольнике PQR на стороне PR взята точка S так, что отрезок PS в три раза больше отрезка SR , а сумма углов QPR и QRP равна углу PSQ . Найдите периметр треугольника PQS , если сторона PR равна 8, а косинус угла PQR равен $-\frac{23}{40}$.

3200. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса BE прямого угла B делится центром O вписанной окружности в отношении $BO : OE = \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Найдите острые углы треугольника.

3201. На сторону BC ромба $ABCD$ опущена высота DE . Диагональ AC ромба пересекает высоту DE в точке F так, что $DF : FE = 5$. Найдите сторону ромба, если известно, что $AE = 5$.

3202. На сторону BC ромба $ABCD$ опущена высота DK . Диагональ AC пе-

ресекает высоту DK в точке M так, что $DM : MK = 13 : 7$. Найдите DK , если известно, что $AK = 17$.

3203. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведены высота CD и медиана CE . Площади треугольников ACD и ECB равны соответственно 4 и 10. Найдите AB .

3204. В треугольнике ABC биссектриса AE относится к радиусу вписанной окружности, как $\sqrt{2} : (\sqrt{2} - 1)$. Найдите углы B и C , если известно, что угол A равен $\frac{\pi}{3}$.

3205. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса $CL = a$ и медиана $CM = b$. Найдите площадь треугольника ABC .

3206. В треугольник со сторонами $AB = 8$, $BC = 6$, $AC = 4$ вписана окружность. Найдите отрезок DE , где D и E — точки касания этой окружности со сторонами AB и AC соответственно.

3207. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$ (рис. 125). Продолжение высоты CH

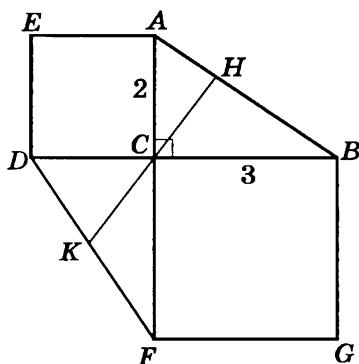


Рис. 125

треугольника ABC пересекает прямую DF в точке K . Найдите HK , если катеты равны 2 и 3.

3208. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD относятся, как

1 : 4, а угол между ними равен 60° . Чему равен больший из отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, если меньший равен $\sqrt{26}$?

3209. Около треугольника ABC описана окружность. Продолжение биссектрисы AD треугольника ABC пересекает эту окружность в точке E , причем AE — диаметр данной окружности. Найдите отношение отрезков EC и AB , если косинус угла ABC равен $\frac{1}{3}$.

3210. Около треугольника ABC описана окружность. Продолжение биссектрисы BM треугольника ABC пересекает эту окружность в точке N , причем BN — диаметр данной окружности. Найдите отношение отрезков BC и AN , если косинус угла ACB равен $\frac{1}{5}$.

3211. В треугольнике ABC сторона $AB = 24$, $\angle BAC = 60^\circ$, радиус описанной окружности равен 13. Найдите сторону AC .

3212. Точки K и L расположены на стороне BC треугольника ABC так, что $BK : KC = 1 : 3$ и $BL : LC = 1 : 2$. Точки M и N расположены на стороне AC этого же треугольника, причем $AM = MN = NC$. Найдите отношение площади четырехугольника $KLPQ$ к площади треугольника ABC , если P и Q являются точками пересечения прямой BN с прямыми ML и AK соответственно.

3213. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = 12$ и $BC = 3$. На продолжении стороны BC выбрана такая точка M , что прямая AM отсекает от трапеции треугольник, площадь которого составляет три четверти площади трапеции. Найдите CM .

3214. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = 16$ и $BC = 9$. На продолжении BC выбрана такая точка M , что $CM = 3,2$. В каком отношении прямая AM делит площадь трапеции $ABCD$?

3215. Прямая CE пересекает сторону AB треугольника ABC в точке E , а

прямая BD пересекает сторону AC в точке D . Прямые CE и BD пересекаются в точке O . Площади треугольников BOE , BOC , COD равны соответственно 15, 30, 24. Найдите угол DOE , если известно, что $OE = 4$, $OD = 4\sqrt{3}$, а угол BOE — острый.

3216. В треугольнике ABC сторона BC равна 2, высота, опущенная из вершины C на сторону AB , равна $\sqrt{2}$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен $\sqrt{5}$. Найдите стороны AB и AC треугольника, если известно, что угол ABC — острый.

3217. В треугольнике ABC сторона AB равна 5, угол ABC равен 60° , а радиус окружности, описанной около данного треугольника, равен $\frac{7\sqrt{3}}{3}$. Найдите стороны AC и BC треугольника ABC .

3218. В треугольник KLM вписана окружность, которая касается стороны KM в точке A . Найдите отрезок AL , если известно, что отрезок AK равен 10, отрезок AM равен 4, а угол KLM равен 60° .

3219. Окружности радиусов 3 и 2 касаются друг друга внешним образом. К этим окружностям проведены общие касательные AB и CD таким образом, что точки A и D принадлежат окружности большего радиуса, а точки B и C принадлежат окружности меньшего радиуса. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков AB , BC и CD .

3220. Касательная, проведенная через вершину M вписанного в окружность треугольника KLM , пересекает продолжение стороны KL за вершину L в точке N . Известно, что радиус окружности равен 2, $KM = \sqrt{8}$ и $\angle MNK + \angle KML = 4\angle LKM$. Найдите касательную MN .

3221. Известно, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен стороне AB этого треуголь-

ника. Найдите высоту треугольника ABC , проведенную из точки C , если она меньше $\frac{1}{2}$, а две другие стороны

треугольника равны $\sqrt{3}$ и 2.

3222. В треугольнике ABC угол C равен 120° , а биссектриса угла C равна 3. Длины сторон AC и CB относятся, как 3 : 2 соответственно. Найдите тангенс угла A и сторону BC .

3223. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжение стороны AB за точку B пересекается с продолжением стороны CD в точке E . Найдите угол ADE , если $CD = 2BE$, $AB : EC = = 7 : 2$ и косинус угла EAD равен $\frac{7}{8}$.

3224. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AD перпендикулярна основаниям и равна 9. Основание CD равно 12, а отрезок AO , где O — точка пересечения диагоналей трапеции, равен 6. Найдите площадь треугольника BOC .

3225. Медиана AM и высота CH равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке K . Найдите площадь треугольника ABC , если $CK = 5$, $KH = 1$.

3226. В окружность вписан четырехугольник $MNPQ$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке F (рис. 126). Прямая, проходящая через точку F и середину стороны MN , пересекает сторону PQ в точке H . Докажите, что FH — высота треугольника PFQ , и найдите ее длину, если $MN = 4$, $MQ = 7$ и $\angle MPQ = \alpha$.

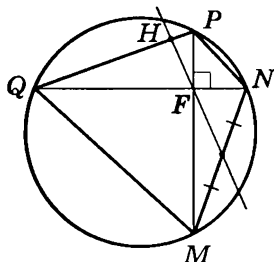


Рис. 126

3227. Медиана AD и биссектриса CE прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) пересекаются в точке M . Найдите площадь треугольника ABC , если $CM = 8$, $ME = 5$.

3228. Из вершины B равнобедренного треугольника ABC на его основание AC опущена высота BD . Каждая боковая сторона AB и BC треугольника ABC равна 8. В треугольнике BCD проведена медиана DE . В треугольник BDE вписана окружность, касающаяся стороны BE в точке K и стороны DE в точке M . Известно, что $KM = 2$. Найдите угол BAC .

3229. Окружность радиуса 3, вписанная в треугольник ABC , касается стороны BC в точке D . Окружность радиуса 4 касается продолжения сторон AB и AC и касается стороны BC в точке E . Найдите ED , если $\angle BCA = 120^\circ$.

3230. В треугольнике ABC расположены три окружности равных радиусов так, что каждая из окружностей касается двух сторон треугольника. Одна из этих окружностей (с центром O_2) касается двух других (с центрами O_1 и O_3 соответственно) и $\angle O_1O_2O_3 = 120^\circ$. Установите, что больше: площадь круга, ограниченного окружностью с центром O_1 , или шестая часть площади треугольника ABC .

3231. Первая из двух окружностей проходит через центр второй и пересекает ее в точках A и B . Касательная к первой окружности, проходящая через точку A , делит вторую окружность в отношении $m : n$ ($m < n$). В каком отношении вторая окружность делит первую?

3232. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B . Первая окружность проходит через центр второй и ее хорда BD пересекает вторую окружность в точке C и делит дугу ACB в отношении $AC : CB = n$. В каком отношении точка D делит дугу ADB ?

3233. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, в 4 раза меньше радиуса окружности, описанной вокруг него. Найдите углы треугольника.

3234. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α вписана окружность. Кроме того, построена вторая окружность, касающаяся основания, одной из боковых сторон треугольника и вписанной в него первой окружности. Найдите радиус второй окружности.

3235. В равнобедренную трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся нижнего основания AD в точке E . Верхнее основание BC равно a , $\angle BAD = 60^\circ$. Вторая окружность, целиком расположенная внутри трапеции, касается внешним образом первой (вписанной) окружности в точке K , касается основания AD в точке M и боковой стороны DC . Найдите площадь фигуры KEM , ограниченной меньшей из дуг KE , меньшей из дуг MK и отрезков EM .

3236. В треугольнике ABC биссектриса AN делит медиану BE в отношении $BK : KE = 2$, а угол ACB равен 30° . Найдите отношение площади треугольника BCE к площади описанного около этого треугольника круга.

3237. В треугольнике ABC высота BH делит сторону AC в отношении $AN : NC = 4$, а угол HBC вдвое меньше угла BAC . Биссектриса AE угла BAC пересекается с BH в точке M . Найдите отношение площади треугольника ABM к площади описанного около этого треугольника круга.

3238. Точки A , B , C делят стороны выпуклого четырехугольника $KLMN$ в отношении $AK : AL = BM : BL = CM : CN = 1 : 2$. Площадь $KLMN$ равна $9\sqrt{3}$, $AB = BC = 2\sqrt{2}$. Каков радиус описанной окружности треугольника ABC , если известно, что $AC > AB$?

3239. Площадь треугольника ABC равна $2\sqrt{3}$, сторона BC равна 1, угол BAC равен 60° . Точка D стороны AB удалена от точки B на расстояние, равной 3, M — точка пересечения CD с медианой BE . Найдите отношение $BM : ME$.

3240. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC , а точка O расположена на отрезке AD так, что $AO : OD = 9 : 4$. Прямая, проходящая через вершину B и точку O , пересекает сторону AC в точке E , причем $BO : OE = 5 : 6$. Найдите отношение, в котором точка E делит сторону AC .

3241. В трапеции $ABCD$ углы A и D при основании AD соответственно равны 60° и 90° . Точка N лежит на основании BC , причем $BN : BC = 2 : 3$. Точка M лежит на основании AD , прямая MN параллельна боковой стороне AB и делит площадь трапеции пополам. Найдите $AB : BC$.

3242. Основание AD трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$) является диаметром окружности, которая касается прямой CD в точке D и пересекает сторону AB в точке L так, что $AB = 4\sqrt{3}AL$. Радиус окружности равен R , $\angle CAD = 45^\circ$. Найдите площадь трапеции.

3243. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K , а биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке N . Площадь четырехугольника, образованного пересечением биссектрис AK и CN с отрезками BN и KD , равна 4. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $BC = 3AB$.

3244. В окружность радиуса 5 вписан четырехугольник $ABCD$, у которого угол D прямой, $AB : BC = 3 : 4$. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, если его площадь равна 44.

3245. Пусть A, B, C, D — последовательные вершины квадрата, а точка O расположена внутри квадрата. Из-

вестно, что $OC = OD = \sqrt{10}$ и $OB = \sqrt{26}$. Найдите площадь квадрата.

3246. В правильном треугольнике ABC со стороной a точки D и E — середины сторон AB и BC соответственно. Точка F лежит на отрезке DB . Точка K лежит на стороне AC . Отрезки FK и DE пересекаются в точке M . Найдите длину отрезка FM , если известно, что $DM : ME = 2 : 3$, а площадь четырехугольника $MECK$ составляет $\frac{2}{5}$ площади треугольника ABC .

3247. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CH и AH_1 . Известно, что $AC = 2$, площадь круга, описанного около треугольника HBH_1 , равна $\frac{\pi}{3}$. Найдите угол между высотой CH и стороной BC .

3248. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K . Вокруг треугольника BCK описана окружность, а касательная к этой окружности, проведенная в точке K , пересекает прямую AD в точке L (рис. 127). Известно, что $LK = a$, $AD = b$. Найдите AL , если $BC < AD$.

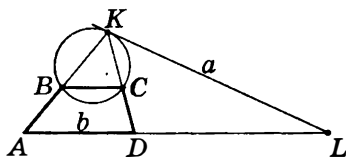


Рис. 127

3249. В трапеции $MNPQ$ даны основания $MQ = 4$, $NP = 2$ и углы M и Q при основании, равные соответственно $\arctg 5$ и $\arctg \frac{1}{2}$. Найдите радиус

окружности, касающийся диагоналей MP и NQ трапеции и основания MQ .

3250. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке Q . Отрезок, соединяю-

щий вершину C серединой отрезка AD , равен 3. Расстояние от точки Q до отрезка BC равно 1, сторона AD равна 2. Найдите AQ .

3251. В окружность радиуса R вписан четырехугольник $KLMN$, Q — точка пересечения его диагоналей, $KL = MN$. Высота, опущенная из точки L на сторону KN , равна 6, $KN + LM = 24$, а площадь треугольника LMQ равна 2. Найдите стороны четырехугольника и радиус окружности R .

3252. В прямоугольном треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на катетах BC и AC так, что $CD = CE = 1$. Точка O есть точка пересечения отрезков AD и BE . Площадь треугольника AOE меньше площади треугольника BOD на $\frac{1}{2}$. Кроме того,

известно, что $BE = \sqrt{17}$. Найдите площадь треугольника ABC .

3253. В прямоугольном треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на катетах BC и AC так, что $CD = CE = 1$. Точка O есть точка пересечения отрезков AD и BE . Площадь треугольника BOD больше площади треугольника AOE на $\frac{1}{2}$. Кроме того, известно, что $AB = 5$. Найдите катеты треугольника ABC .

3254. В трапеции $KLMN$ известны боковые стороны $KL = 27$, $MN = 28$, верхнее основание $LM = 5$ и $\cos \angle LMN = -\frac{2}{7}$. Найдите диагональ KM .

3255. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, точка L лежит на отрезке AB и $AL = LB$. Описанная около треугольника ALO окружность пересекает AC в точке K . Найдите площадь треугольника ABC , если $\angle LOA = 45^\circ$, $LK = 8$, $AK = 7$.

3256. В треугольнике ABC известно, что $AB = 10$, $BC = 12$, $AC = 8$. На стороне AB взята точка K так, что

$AK : KB = 2 : 3$, а на стороне BC — точка M так, что $BM : MC = 2 : 1$. На отрезке KM взята точка O так, что $KO : OM = 4 : 5$. Площадь какого из треугольников ABO , BCO и ACO является наименьшей?

3257. Точки P и Q на стороне BC треугольника ABC выбраны так, что $BP : PQ : QC = \frac{2}{3} : 1 : 1$. Точка R на

продолжении стороны AB этого треугольника выбрана так, что B принадлежит отрезку AR и $AB : BR = 1 : 2$. Найдите отношение площади четырехугольника $PQSR$ к площади треугольника ABC , если S и T являются точками пересечения прямых AQ и AP с прямой CR соответственно.

3258. В трапеции $ABCD$ отрезки AB и CD являются основаниями. Диагонали трапеции пересекаются в точке K . Найдите площадь треугольника AKD , если $AB = 27$, $DC = 18$, $AD = 3$, $BC = 6\sqrt{2}$.

3259. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка K так, что $AK = 1$, $RC = 3$, а на стороне AB взята точка L так, что $AL : LB = 2 : 3$. Пусть Q — точка пересечения прямых BK и CL . Площадь треугольника AQC равна 1. Найдите высоту треугольника ABC , опущенную из вершины B .

3260. Дана трапеция $PQRN$ с основаниями $PN = 8$ и $QR = 4$, боковой стороной $PQ = \sqrt{28}$ и углом RNP , равным 60° . Через точку R проходит прямая, делящая трапецию на две равновеликие фигуры. Найдите отрезок этой прямой, находящейся внутри трапеции.

3261. В треугольнике ABC из вершины A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D , лежащей между точками B и C , причем $BD : BC = \alpha$ ($\alpha < 1$). Через точку D проведена прямая, параллельная стороне AB и пересекающая сторону AC в точке E . Найдите отношение площадей треугольников ABD и ECD .

3262. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Сторона AB равна стороне BC , а угол ADC равен 60° . Диагональ $AC = 7$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P . Площади треугольников ADP и CDP относятся, как $3 : 1$. Найдите все стороны четырехугольника $ABCD$.

3263. В треугольнике ABC точка M делит сторону BC пополам, а точка K лежит на стороне AC , причем отрезок AK в 4 раза меньше стороны AC . Отрезки AM и BK пересекаются в точке O . Отрезок AM равен 5, отрезок BK равен 10. Найдите отрезок MK , если угол AOB равен 135° .

3264. В трапеции $ABCD$ основание AD равно 16, сумма боковой стороны AB и диагонали BD равна 40, угол CBD равен 60° . Отношение площадей треугольников ABO и BOC , где O — точка пересечения диагоналей, равно 2. Найдите площадь трапеции.

3265. В прямоугольном треугольнике ABC угол C — прямой, а угол A равен 30° . Высота CC_1 , опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу AB , равна $5\sqrt{2}$. Из точки C_1 проведены биссектрисы углов CC_1A и CC_1B , пересекающие стороны AC и BC в точках B_1 и A_1 соответственно. Найдите длину отрезка A_1B_1 . Укажите ее приближенное значение в виде десятичной дроби с точностью до 0,01.

3266. В окружность с центром O вписана трапеция $ABCD$, в которой AB параллельна DC , $AB = 5$, $DC = 1$, $\angle ABC = 60^\circ$. Точка K лежит на отрезке AB , причем $AK = 2$. Прямая CK пересекает окружность в точке F , отличной от C . Найдите площадь треугольника OFC .

3267. В окружность с центром O вписана трапеция $KLMN$, в которой KN параллельна LM , $KN = 6$, $LM = 4$, $\angle KLM = 135^\circ$. Точка A лежит на отрезке KN , причем $AK = 4$. Найдите расстояние от точки O до прямой BN .

3268. Отрезок AB является диаметром некоторой окружности. Через его концы проведены две прямые, пересекающие окружность в точках C и D , лежащих по одну сторону от прямой AB . Точка O , в которой пересекаются эти прямые, равноудалена от концов диаметра AB . Найдите радиус окружности, если $CD = 1$ и $\angle OCD = 60^\circ$.

3269. В треугольнике ABC угол BAC равен 30° . Через вершины A и C проведены перпендикуляры к сторонам BC и AB соответственно. Точка пересечения этих перпендикуляров находится от вершин A и C на расстоянии, равном 1. Найдите стороны треугольника ABC .

3270. В окружности проведены хорды KL , MN , PS . Хорды KL и PS пересекаются в точке C , хорды KL и MN пересекаются в точке A , а хорды MN и PS пересекаются в точке B , причем $AL = CK$, $AM = MN$, $BA = 5$, $BC = 4$. Найдите радиус окружности, если $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$.

3271. Диаметр MN и хорда PQ окружности пересекаются в точке R , причем MN перпендикулярен PQ . Касательные к окружности в точках N и P пересекаются в точке L . Отрезки ML и PR пересекаются в точке S . Найдите диаметр окружности, если площадь треугольника PLS равна 2 и $MR = 1$.

3272. Точка F лежит на продолжении стороны BC параллелограмма $ABCD$ за точку C . Отрезок AF пересекает диагональ BD в точке E , а сторону CD — в точке G . Известно, что $AE = 2$ и $GF = 3$. Найдите отношение площадей треугольников BAE и EDG .

3273. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник KLM , касается основания KM в точке N и боковой стороны KL в точке P . Точка Q — середина стороны KL , а точка R — точка пересечения окружности и отрезка QN , отличная от N . Касательная к окружности, проходящая через точ-

ку R , пересекает сторону KL в точке T . Найдите угол LMK , если известно, что $QT : TP = 3 : 2$.

3274. В равнобедренном треугольнике ABC равные стороны AB и CB продолжены за точку B и на этих продолжениях взяты соответственно точки D и E . Отрезки AE , ED и DC равны между собой, а $\angle BED \neq \angle BDE$. Найдите угол ABE .

3275. В треугольнике KLM проведена биссектриса KP . Окружность, вписанная в треугольник KLP , касается стороны KL в точке Q , причем $LQ = a$. На сторонах KL и LM выбраны точки E и R соответственно так, что прямая ER проходит через центр окружности, вписанной в треугольник KLM (рис. 128). Найдите длину биссектрисы KP , если известно, что $EL + LR = b$, а отношение площадей треугольников KLP и ELR равно α .

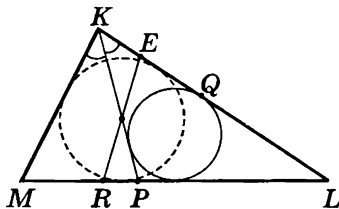


Рис. 128

3276. В четырехугольнике $ABCD$ сторона AD равна 6, сторона CD равна 5, косинус угла ADC равен $\frac{1}{2}$, синус угла BCA равен $\frac{1}{4}$. Найдите сторону BC , если известно, что окружность, описанная около треугольника ABC , проходит также и через точку D .

3277. В четырехугольнике $ABCD$ можно вписать окружность. Пусть K — точка пересечения его диагоналей. Известно, что $BC > AB > BK$, $KC = \sqrt{7} - 1$, $\cos \angle KBC = \frac{\sqrt{7}+1}{4}$, а периметр треугольника BKC равен $2\sqrt{7} + 4$. Найдите DC .

3278. В четырехугольнике $ABCD$ можно вписать окружность. Пусть K — точка пересечения его диагоналей. Известно, что $AB > BC > BK$, $BK = \sqrt{14} + 2$, $\cos \angle BCK = \frac{\sqrt{14}-2}{6}$, а периметр треугольника BKC равен $2\sqrt{14} + 6$. Найдите DC .

3279. В треугольнике PQL проведена средняя линия AB , соединяющая стороны PQ и QL . Сторона PL равна $\sqrt{2}$, а синус угла PLQ равен $\frac{1}{3}$. Окружность, проведенная через точки A , B и L , касается стороны PQ . Найдите ее радиус.

3280. Вокруг треугольника KLM , у которого $KL = LM$, LN — высота, описана окружность радиуса 10. Найдите LN , если $LN = \frac{1}{4} KM$.

3281. В треугольнике ABC известно, что $AB = 4$, $\angle BAC = 60^\circ$, радиус описанной окружности равен $2\sqrt{3}$. Найдите среднюю линию, параллельную стороне AC , и расстояние между точками, в которых прямая, содержащая эту среднюю линию, пересекает описанную окружность.

3282. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Площадь треугольника CDE в 11 раз меньше площади четырехугольника $ABED$. Найдите AB и радиус окружности, если $DE = 1$ и $\angle C = 30^\circ$.

3283. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, точка L лежит на отрезке AB и $AL = LB$. Описанная около треугольника ALO окружность пересекает AC в точке K . Найдите площадь треугольника ABC , если $\angle LOA = 45^\circ$, $LK = 8$, $AK = 7$.

3284. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена медиана CD . В треугольник ACD вписана окружность, а около тре-

угольника BCD описана окружность. Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если $BC = 3$, а радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $\frac{5}{2}$.

3285. Дан ромб $ABCD$. Радиусы окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD , равны 3 и 4. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

3286. Сторона ромба $ABCD$ равна 4. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ACD и ABD , равно 3. Найдите радиусы этих окружностей.

3287. Дан ромб $ABCD$. Радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и BCD , равны 1 и 2. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

3288. Окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC в точках A и B соответственно. На дуге этой окружности, лежащей внутри треугольника, расположена точка K так, что расстояния от нее до сторон AC и BC равны 6 и 24 соответственно. Найдите расстояние от точки K до стороны AB .

3289. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC расположены точки S и E соответственно так, что CD — биссектриса треугольника ABC , DE — биссектриса треугольника ACD , $ES = ED = \frac{4}{9}$, $BC = 1$. Найдите CD и площадь треугольника ABC .

3290. Около окружности описаны ромб со стороной 3 и треугольник, две стороны которого параллельны диагоналям ромба, а третья параллельна одной из сторон ромба и равна 7. Найдите радиус окружности.

3291. В треугольнике ABC с периметром $2p$ острый угол BAC равен α . Окружность с центром в точке O касается стороны BC и продолжения сторон AB и AC в точках K и L соответственно. Точка D лежит внутри отрез-

ка AK , $AD = a$. Найдите площадь треугольника DOK .

3292. Две окружности внутренне касаются. Прямая, проходящая через центр меньшей окружности, пересекает большую окружность в точках A и D , а меньшую — в точках B и C . Найдите отношение радиусов окружностей, если $AB : BC : CD = 2 : 4 : 3$.

3293. В прямоугольном треугольнике ABC угол C — прямой, $AC : AB = 3 : 5$. Окружность с центром на продолжении катета AC за точку C касается продолжения гипотенузы AB за точку B и пересекает катет BC в точке P так, что $BP : PC = 1 : 4$. Найдите отношение радиуса окружности к катету BC .

3294. Около окружности описана равнобедренная трапеция $ABCD$. Меньшее основание BC касается окружности в точке M , боковая сторона CD — в точке N . Высота CE пересекает отрезок MN в точке P так, что $MP : PN = 2$. Найдите отношение $AD : BC$.

3295. Около треугольника ABC описана окружность. Пусть AD и BE — параллельные хорды. Известно, что отрезки BC и AD пересекаются, $\angle ECD = \alpha$ и $\angle BAC = 2\angle ABC$. Найдите отношение периметра треугольника ABC к радиусу вписанной в него окружности.

3296. В равнобедренном треугольнике MPK с основанием PM угол P равен $\arctg \frac{5}{12}$. Окружность, вписанная в угол K , касается стороны KP в точке A и отсекает от основания отрезок HE . Известно, что центр окружности удален от вершины K на расстояние $\frac{13}{24}$ и

$AP = \frac{6}{5}$. Найдите площадь треугольника $HAЕ$.

3297. В прямоугольном треугольнике ABC угол C — прямой, а сторона $CA = 4$. На катете BC взята точка D так,

что $CD = 1$. Окружность радиуса $\frac{\sqrt{5}}{2}$ проходит через точки C и D и касается в точке C окружности, описанной около треугольника ABC . Найдите площадь треугольника ABC .

3298. Дан треугольник ABC , у которого стороны $AB = \sqrt{17}$, $BC = 5$, $AC = 4$. На стороне AC взята точка D так, что BD является высотой треугольника ABC . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и D и касающейся в точке D окружности, описанной около треугольника BCD .

3299. В окружности радиуса $R = \sqrt{6}$ проведены хорда MN и диаметр MP . В точке N проведена касательная к окружности, которая пересекает продолжение диаметра MP в точке Q под углом 60° . Найдите медиану QD треугольника MQN .

3300. Точка O делит отрезок AB на отрезки длиной $OA = 6$ и $OB = 4$. С центром в точке O проведена окружность, из A и B к ней проведены касательные, пересекающиеся в точке M , причем точки касания лежат по одну сторону от прямой AB . Найдите радиус окружности, если $OM = 12$.

3301. Окружность с центром в точке пересечения диагоналей KM и LN равнобедренной трапеции $KLMN$ касается меньшего основания LM и боковой стороны MN . Найдите периметр трапеции $KLMN$, если известно, что ее высота равна 36, а радиус окружности равен 11.

3302. Основание KM равнобедренного треугольника KLM является хордой окружности, центр которой лежит вне треугольника KLM . Прямые, проходящие через точку L , касаются окружности в точках P и Q . Найдите площадь треугольника PLQ , если $KL = LM = \sqrt{5}$, $\angle KLM = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}$, а радиус окружности равен 1.

3303. Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, проходит через середину стороны BC и пересекает в точке D продолжение стороны AB за точку A так, что $AD = \frac{2}{3}AB$. Найдите площадь треугольника ABC , если $AC = 1$.

3304. Квадрат $ABCD$ и окружность расположены так, что окружность касается прямой BD в точке D , а центр окружности лежит по ту же сторону от прямой BD , что и точка A (рис. 129). Касательные к окружности, проведенные из точки C , образуют угол 60° . Найдите отношение площади квадрата к площади круга, ограниченного данной окружностью.

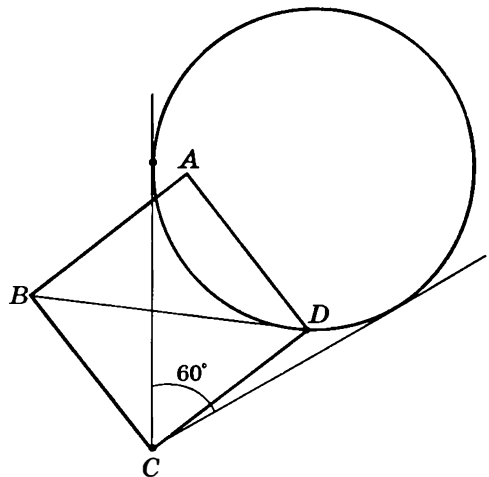


Рис. 129

3305. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC точка D делит сторону BC в отношении $3 : 1$, считая от вершины B , а точка E — середина отрезка AD . Известно, что $BE = \sqrt{7}$, $CE = 3$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

3306. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке P . Хорда PQ

параллельна катету BC . Прямая BQ пересекает катет AC в точке D . Известно, что $AC = b$, $DC = d$. Найдите BC .

3307. Вершины B , C , D четырехугольника $ABCD$ расположены на окружности с центром O . Эта окружность пересекает сторону AD в точке E , а сторону AB — в точке F . Известно, что хорды BF , FE и ED равны, а также равны между собой хорды BC и CD . Найдите угол OBC , если известно, что угол DAB — прямой.

3308. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит биссектрису одного из острых углов на отрезки, отношение которых равно $3 + 2\sqrt{3}$, считая от вершины. Найдите острые углы треугольника.

3309. В треугольнике KLM проведены биссектрисы LE и KF углов KLM и LKM соответственно, которые пересекаются в точке O . Известно, что $KL = LE$, периметр треугольника KLM равен 34, $LO = 5OE$. Найдите ML .

3310. AM — биссектриса треугольника ABC , $BM = 2$, $CM = 3$, D — точка пересечения продолжения AM с окружностью, описанной около данного треугольника, $MD = 2$. Найдите AB .

3311. Прямая, проходящая через точку пересечения медиан треугольника ABC , пересекает стороны BA и BC в точках A' и C' соответственно. При этом $BA' < BA = 4$, $BC = 2$, $BA' \cdot BC' = 4$. Найдите BA' .

3312. Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках M и N . Площадь треугольника ABC равна $\sqrt{15}$, отрезок BC равен 2, а отрезок AO в четыре раза больше радиуса вписанной в треугольник ABC окружности. Найдите периметр треугольника AMN .

3313. В окружности проведены хорды AC и BD , пересекающиеся в точке E , причем касательная к окружности, проходящая через точку B , па-

раллельна AC . Известно, что $EA : DA = 3 : 4$ и $S(DCB) = 16$. Найдите площадь треугольника BCE .

3314. В окружности проведены хорды AC и BD , пересекающиеся в точке E , причем касательная к окружности, проходящая через точку D , параллельна AC . Известно, что $EC : BC = 2 : 3$ и $S(ADE) = 12$. Найдите площадь треугольника ADB .

3315. Площадь треугольника ABC равна 16. На сторонах AB , BC и AC этого треугольника взяты соответственно точки P , Q и R так, что прямая PQ параллельна AC , а прямая BR проходит через точку пересечения прямых PC и AQ . Известно, что S — точка пересечения PQ и BR и на отрезке BS взята точка T так, что $BT : TS : SR = 1 : 2 : 5$. Найдите площадь треугольника PTB .

3316. Площадь трапеции $ABCD$ равна 23. Точка M на боковой стороне AB выбрана так, что $2MB = MA$. Точка N на боковой стороне CD выбрана так, что $3DN = CD$. Точка L — пересечение прямых DM и AN . Найдите площадь треугольника ALD , если $AD = 3BC$.

3317. В трапеции $ABCD$ (рис. 130), где $\angle BAD = 45^\circ$, $\angle CDA = 60^\circ$, основание AD равно 15, основание BC равно 13, перпендикуляр к стороне AB , составленный из точки M , являющейся

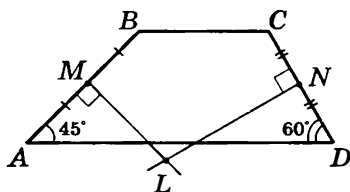


Рис. 130

серединой стороны AB , пересекается с перпендикуляром к стороне CD , составленным из точки N , являющейся серединой стороны CD , в некоторой точке L . Найдите отношение площади треугольника MNL к площади трапеции $ABCD$.

3318. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке K . Известно, что $AD = 5$, $BC = 10$, $BK = 6$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

3319. На сторонах угла ABC взяты точки D и E так, что точка D лежит между A и B , точка E лежит между B и C , а отрезки AE и DC пересекаются в точке N . Известно, что $AD = CE$, $BD : BC = k$. Найдите отношение $AN : NE$.

3320. В некоторый угол B вписаны две непересекающиеся окружности. Окружность большего радиуса касается сторон этого угла в точках A и C , меньшего — в точках A_1 и C_1 (точки A , A_1 и C , C_1 лежат на разных сторонах угла B). Прямая AC_1 пересекает окружности большего и меньшего радиусов в точках E и F соответственно. Найдите отношение площадей треугольников ABC_1 и A_1BC_1 , если $A_1B = 2$, $EF = 1$, а отрезок AE есть среднее арифметическое отрезков BC_1 и EF .

3321. В окружности проведены хорды AC и BD , пересекающиеся в точке E , причем касательная к окружности, проходящая через точку B , параллельна AC . Известно, что $EA : DA = 3 : 4$ и $S(DCB) = 16$. Найдите площадь треугольника BCE .

3322. В окружности проведены хорды AC и BD , пересекающиеся в точке E , причем касательная к окружности, проходящая через точку D , параллельна AC . Известно, что $EC : BC = 2 : 3$ и $S(ADE) = 12$. Найдите площадь треугольника ADB .

3323. Диагонали вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M , причем $\angle BAC = \frac{\pi}{12}$, $AC = 6$ и $AB \cdot MD = AD \cdot MB$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

3324. В треугольнике MLN сторона NL равна 6, $\angle NML = \arcsin \frac{12}{13}$. Хорда

AD окружности, описанной около треугольника MLN , пересекает отрезки MN и ML в точках B и C соответственно. Известно, что $\angle NLM = \angle MBC$, площадь четырехугольника $NLCB$ равна 9, а $BC = 3$. Найдите высоту треугольника AMD , опущенную из вершины M , и его площадь.

3325. Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках M и N . Площадь треугольника ABC равна $\sqrt{15}$, $BC = 2$, а отрезок AO в четыре раза больше радиуса вписанной в треугольник ABC окружности. Найдите периметр треугольника ABC .

3326. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D , лежащих по разные стороны от прямой AB . Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E . Найдите AC , если $AB = 12$, $AD = 21$, $AE = 35$.

3327. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D , лежащих по разные стороны от прямой AB . Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E . Найдите AD , если $AB = 15$, $AC = 20$, $AE = 24$.

3328. В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 8$ и $CD = 5$ биссектриса угла B пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла D пересекает те же две биссектрисы в точках L и K , причем точка L лежит на основании BC .

а) В каком отношении прямая MK делит сторону AB , а прямая LN — сторону AD ?

б) Найдите отношение $KL : MN$, если $LM : KN = 4 : 7$.

3329. На стороне BC треугольника ABC взята точка D такая, что $\angle CAD = 2\angle DAB$. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ADC и ADB , равны соответственно 3 и 2, а расстояние между центрами этих окружностей равно $\sqrt{29}$. Найдите AD .

3330. В треугольнике ABC угол B равен $\arccos \frac{15}{17}$. На стороне AC взята точка K так, что $AK = 12$, $KC = 4$. Найдите радиус окружности, проходящей через вершину B , касающейся стороны AC в точке K и касающейся окружности, описанной около треугольника ABC .

3331. В треугольнике ABC угол A равен $\arccos \frac{5}{13}$, сторона BC равна 12.

На продолжении CB за точку C взята точка M так, что $CM = 6$. Найдите радиус окружности, проходящей через вершину A , касающейся прямой BC в точке M и касающейся окружности, описанной около треугольника ABC .

3332. В окружность вписан четырехугольник $MNPQ$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке F . Прямая, проходящая через точку F и середину стороны NP , пересекает сторону MQ в точке H . Докажите, что FH — высота треугольника MFQ , и найдите ее длину, если $PQ = 6$, $NF = 5$, $\angle MQN = \alpha$.

3333. Через вершины A и C треугольника ABC проведена окружность K , центр которой лежит на окружности, описанной около треугольника ABC . Окружность K пересекает сторону AB в точке M . Найдите угол BAC , если $AM : AB = 2 : 7$, $\angle ABC = \arcsin \frac{4}{5}$.

3334. На окружности радиуса 12 с центром в точке O лежат точки A и B . Прямые AC и BC касаются этой окружности. Другая окружность с центром в

точке M вписана в треугольник ABC и касается стороны AC в точке K , а стороны BC — в точке N (рис. 131). Расстояние от точки M до прямой KN равно 3. Найдите угол AOB .

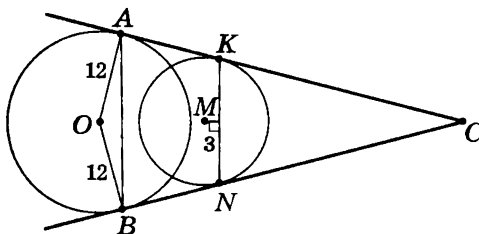


Рис. 131

3335. Длина стороны ромба $ABCD$ равна 5. В этот ромб вписана окружность радиуса 2,4. Найдите расстояние между точками, в которых эта окружность касается сторон AB и BC , если диагональ AC меньше диагонали BD .

3336. Два равных ромба $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AD \parallel CB$) и $APQR$ ($AP \parallel QR$, $AR \parallel PQ$) имеют общую вершину A и лежат в одной плоскости. Известно, что $\angle BAD = \angle PAR = \alpha < \frac{\pi}{2}$. Точка R

лежит внутри ромба $ABCD$ и угол RAD равен β . Стороны BC и QR пересекаются в точке K . Найдите величину угла BAK .

3337. Два равных равнобедренных треугольника ABC и BDF ($AC = BC = DB = BF$) имеют общую вершину B и лежат в одной плоскости так, что точки C и D находятся по разные стороны от прямой AB , а отрезки AC и DF пересекаются в точке K . В каком отношении прямая BK делит угол ABC , если $\angle DBF = \alpha$, $\angle CBF = \beta < \alpha$?

3338. В трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD , а диагональ DB перпендикулярна боковой стороне AB . На продолжениях боковых сторон AB и DC за меньшее основание BC отложены отрезки BM и CN так, что получается новая трапе-

ция $BMNC$, подобная трапеции $ABCD$. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если площадь трапеции $AMND$ равна P , а сумма углов CAD и BDA равна 60° .

3339. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и DB взаимно перпендикулярны, $\angle ABD = \angle ACD$. На продолжениях боковых сторон AB и DC за большее основание AD отложены отрезки AM и DN так, что получается новая трапеция $MADN$, подобная трапеции $ABCD$. Найдите площадь трапеции $MBCN$, если площадь трапеции $ABCD$ равна P , а сумма углов при большем основании равна 150° .

3340. В трапеции $ABCD$ основание AD равно 4, основание BC равно 3, стороны AB и CD равны. Точки M и N лежат на диагонали BD , причем точка M расположена между точками B и N , а отрезки AM и CN перпендикулярны диагонали BD . Найдите CN , если $BM : DN = 2 : 3$.

3341. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $\angle ACP = \angle PCQ = \angle QCB$. Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $4CP = 3\sqrt{3}CQ$.

3342. В равнобедренном треугольнике ABC (AC — основание) на стороне BC находятся точки D и E так, что $DE = EC = 2$. Найдите периметр треугольника ABC , если известно, что $AE = 5$, $AD = \sqrt{33}$.

3343. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на высоте BD как на диаметре построена окружность. Через точки A и C к окружности проведены касательные AM и CN , продолжения которых пересекаются в точке O . Найдите отношение $AB : AC$, если $OM : AC = k$ и высота BD меньше основания AC .

3344. В равнобедренной трапеции $ABCD$ углы при основании AD равны 45° , диагональ AC является биссектрисой угла BAD . Биссектриса угла BCD пересекает основание AD в точке K , а отрезок BK пересекает диагональ AC в точке Q . Найдите площадь тре-

угольника ABQ , если площадь трапеции $ABCD$ равна $3 + 2\sqrt{2}$.

3345. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Прямая, параллельная основанию AC , пересекает сторону AB в точке D , а сторону BC — в точке E , причем каждый из отрезков AD , EC и DE равен 2. Точка F — середина отрезка AC и точка G — середина отрезка EC соединены отрезком прямой. Известно, что $\angle GFC = \beta$. Найдите площадь треугольника ABC .

3346. В равнобедренной трапеции $KLMN$ (ML параллельно NK) каждая из сторон KL , LM и MN равна 1. Сторона LM — меньшее основание трапеции. Точка P , середина основания KN , и точка Q , середина стороны MN , соединены отрезком прямой. Известно, что $\angle QPN = \beta$. Найдите площадь трапеции $KLMN$.

3347. В прямоугольной трапеции $PQRS$ (QR параллельна PS , PQ перпендикулярна PS) меньшее основание QR равно 2, а боковая сторона RS равна 4. Точка T , середина стороны RS , соединена отрезком прямой с точкой P . Известно, что $\angle TPS = \beta$. Найдите площадь трапеции $PQRS$.

3348. В плоскости даны квадрат с последовательно расположенными вершинами A, B, C, D и точка O . Известно, что $OA = OC = 10$, $OD = 6\sqrt{2}$ и что сторона квадрата не превосходит 3. Найдите площадь квадрата. Где расположена точка O : вне или внутри квадрата?

3349. В квадрат площадью 24 вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Стороны прямоугольника относятся, как $1 : 3$. Найдите площадь прямоугольника.

3350. В треугольнике KLM сторона KL равна 24, биссектриса LN равна 24, а отрезок MN равен 9. Найдите периметр треугольника LMN .

3351. Четырехугольник $ABCD$ с взаимно перпендикулярными диагоналями AC и BD вписан в окружность. Найдите ее радиус, если $AB = 4$, $CD = 2$.

3352. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC , прямая AD пересекается с биссектрисой угла ACB в точке O . Известно, что точки C , D и O лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC , $AC : AB = 4 : 3$, а угол DAC в три раза больше угла DAB . Найдите косинус угла ACB .

3353. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC , а точка O — на отрезке AD . Известно, что точки C , D и O лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC , $AC = 2\sqrt{2}AB$, угол DAC в два раза больше угла BAD , а угол OCA в два раза меньше угла OCB . Найдите косинус угла ACB .

3354. В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB вдвое меньше стороны BC . Внутри прямоугольника расположена точка F , причем $BF = \sqrt{17}$, $CF = \sqrt{2}$, $DF = 1$. Найдите косинус угла DCF и площадь прямоугольника $ABCD$.

3355. В прямоугольнике $ABCD$ сторона BC вдвое меньше стороны CD . Внутри прямоугольника расположена точка E , причем $AE = \sqrt{2}$, $CE = 3$, $DE = 1$. Найдите косинус угла CDE и площадь прямоугольника $ABCD$.

3356. В параллелограмме $ABCD$ угол A — острый, $AB > AD$, $AB = 14$. Точка C_1 симметрична точке C относительно прямой BD , а точка C_2 симметрична точке C_1 относительно прямой AC и лежит на продолжении диагонали BD за точку D (рис. 132). Найдите

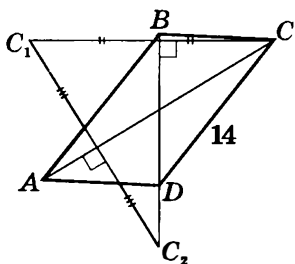


Рис. 132

площадь параллелограмма $ABCD$, если $BC_2 = \frac{4}{3}BD$.

3357. Среди треугольников ABC , у которых радиус описанной окружности равен 5, сторона AC равна 6, высота BH равна $\frac{9}{10}$, найдите угол ABC того треугольника, медиана BD которого наименьшая.

3358. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC , а точка O — на отрезке AD . Известно, что точки C , D и O лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC , $4AC = 3\sqrt{2}AB$, угол DAC в два раза больше угла BAD , а угол OCA в два раза меньше угла OCB . Найдите косинус угла ABC .

3359. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC , причем прямая AD пересекается с биссектрисой угла ACB в точке O . Известно, что точки C , D и O лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC , $AC : AB = 4 : 3$, а угол DAC в три раза больше угла DAB . Найдите косинус угла ABC .

3360. Внутри треугольника ABC выбрана точка O так, что радиусы описанных около треугольников AOC и AOB окружностей равны соответственно 7 и 4. Известно, что расстояние между центрами этих окружностей равно 9, $AB = 5$, $AC = 8$. Найдите OC .

3361. В выпуклом четырехугольнике $MNPQ$ диагональ NQ является биссектрисой угла PNM и пересекается с диагональю PM в точке S . Найдите NS , если известно, что около четырехугольника $MNPQ$ можно описать окружность, $PQ = 12$, $SQ = 9$.

3362. Через точку D основания AB равнобедренного треугольника ABC проведена прямая CD , пересекающая описанную около треугольника ABC окружность в точке E . Найдите AC , если $CE = 3$ и $DE = DC$.

3363. Около квадрата $BEFC$ описана окружность радиуса $2\sqrt{2}$. Из точки P , лежащей на продолжении стороны BC так, что $PC < BP$ и $PC = \sqrt{28} - 2$, проведена секущая PA , пересекающая окружность в точках D и A . Известно, что внешняя часть секущей PD равна 4 ($PD = 4$), а угол BAC — тупой. Найдите угол BPA .

3364. В параллелограмме лежат две окружности. Одна из них, радиуса 3, вписана в параллелограмм, а вторая касается двух сторон параллелограмма и первой окружности (рис. 133). Расстояние между точками касания, лежащими на одной стороне параллелограмма, равно 3. Найдите площадь параллелограмма.

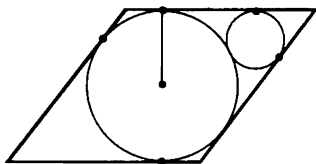


Рис. 133

3365. Диагональ MP выпуклого четырехугольника $MNPQ$, вписанного в окружность, является биссектрисой угла NMQ и пересекается с диагональю NQ в точке T . Найдите NP , если $MT = 5$, $TP = 4$.

3366. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 48, а длина диагонали равна 10. В плоскости прямоугольника $ABCD$ выбрана точка O так, что $OB = OD = \sqrt{61}$. Найдите расстояние от точки O до ближайшей к ней вершины прямоугольника.

3367. О треугольнике KLM известно, что $\angle LKM = \beta$, $\angle LMK = \gamma$, $KM = a$. На стороне KL взята точка N так, что $KN = 2NL$. Через точки L и N проведена окружность, касающаяся стороны KM или ее продолжения за точку M . Найдите радиус окружности.

3368. На стороне угла с вершиной O взяты точки B и D (B между O и D) так, что $2OB = 3BD$. Через точки B и D проведена окружность, касающаяся другой стороны угла в точке A . Между точками O и A взята точка F . Известно, что $OF = l$, $\angle DOF = \alpha$, $\angle DFO = \beta$. Найдите радиус окружности.

3369. Биссектриса AE угла A рассекает четырехугольник $ABCD$ на равнобедренный треугольник ABE ($AB = BE$) и ромб $AECD$. Радиус круга, описанного около треугольника ECD , в 1,5 раза больше радиуса круга, вписанного в треугольник ABE . Найдите отношение периметров этих треугольников.

3370. В круге проведены три хорды AB , BC и CD одинаковой длины. Хорды AB и CD пересекаются в точке E , $\angle BEC = 120^\circ$. Установите, что больше: шестая часть площади круга или площадь треугольника BEC .

3371. В окружность вписана трапеция $ABCD$. Диаметр, проведенный через вершину A , перпендикулярен боковой стороне CD . Через вершину C проведен перпендикуляр к основанию AD , пересекающий отрезок AD в точке M , а окружность — в точке N так, что $CM : MN = 5 : 2$. Найдите угол при основании трапеции.

3372. Две окружности радиусов 1 и $\sqrt{2}$ пересекаются в точке A . Расстояние между центрами окружностей равно 2. Хорда AC большей окружности пересекает меньшую окружность в точке B и делится этой точкой пополам. Найдите эту хорду.

3373. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и являются диаметрами двух равных касающихся окружностей радиуса r . Площадь четырехугольника $ABCD$ равна mr^2 . Найдите длины сторон BC и AD .

3374. Около треугольника ABC описана окружность. Диаметр AD пе-

ресекает сторону BC в точке E , при этом $AE = AC$ и $BE : CE = m$. Найдите $DE : AE$.

3375. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ заключены две окружности одинакового радиуса r , касающиеся друг друга внешним образом. Центр первой окружности находится на отрезке, соединяющем вершину A с серединой F стороны CD , а центр второй окружности находится на отрезке, соединяющем вершину C с серединой E стороны AB . Первая окружность касается сторон AB , AD и CD , а вторая окружность касается сторон AB , BC и CD . Найдите AC .

3376. На диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ находится центр окружности радиуса r , касающейся сторон AB , AD и BC . На диагонали BD находится центр окружности такого же радиуса r , касающейся сторон BC , CD и AD (рис. 134). Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, зная, что указанные окружности касаются друг друга внешним образом.

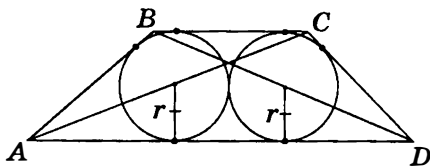


Рис. 134

3377. Радиус вписанной в треугольник PQR окружности равен 5, причем $RP = RQ$. На прямой PQ взята точка A , удаленная от прямых PR и QR на расстояния 12 и 2 соответственно. Найдите косинус угла AQR .

3378. Около треугольника AMB описана окружность, центр которой удален от стороны AM на расстояние 10. Продолжение стороны AM за вершину M отсекает от касательной к окружности, проведенной через вершину B , отрезок CB , равный 29. Найдите

площадь треугольника CMB , если известно, что угол ACB равен $\operatorname{arctg} \frac{20}{21}$.

3379. Центр окружности радиуса 6, касающейся сторон AB , BC и CD равнобедренной трапеции $ABCD$, лежит на ее большем основании AD . Длина основания BC равна 4. Найдите расстояние между точками, в которых окружность касается боковых сторон AB и CD этой трапеции.

3380. На боковых сторонах KL и MN равнобедренной трапеции $KLMN$ выбраны соответственно точки P и Q так, что отрезок PQ параллелен основанию трапеции. Известно, что в каждую из трапеций $KPQN$ и $PLMQ$ можно вписать окружность и радиусы этих окружностей равны R и r соответственно. Найдите основания LM и KN .

3381. Точка O — центр окружности, вписанной в равнобедренную трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Прямая AO пересекает отрезок CD в точке K . Найдите углы и площадь трапеции, если $AO = 5$, $OK = 3$.

3382. В остроугольном треугольнике ABC проведены биссектриса AD и медиана BE . Точки M и N являются ортогональными проекциями на сторону AB точек D и E соответственно, причем $AM : MB = 9 : 1$, $AN : NB = 2 : 3$. Найдите отношение $AD : BE$.

3383. В трапеции $MNPQ$ ($MQ \parallel NP$) угол NQM в два раза меньше угла MPN ; $NP = MP = \frac{13}{2}$, $MQ = 12$. Найдите площадь трапеции.

3384. В треугольнике KLM стороны KL и LM равны. Высота, проведенная из вершины L , равна $\frac{7}{10}$, а сторона

KM равна $2\frac{1}{3}$. Сторона KM является большим основанием трапеции $KNPM$, причем точки L и N лежат по одну сторону от прямой KM . Известно, что $KM = KN$, $\angle NPM = 90^\circ$,

$\angle KNP = 150^\circ$. Найдите площадь общей части треугольника KLM и трапеции $KNPM$.

3385. Через точку C проведены две прямые, касающиеся заданной окружности в точках A и B . На большей из дуг взята точка D , для которой $CD = 3$ и $\sin \angle ACD \cdot \sin \angle BCD = \frac{1}{2}$.

Найдите расстояние от точки D до хорды AB .

3386. Периметр прямоугольного треугольника ABC равен 90, причем катет AC больше, чем 20. Окружность радиуса 10, центр которой лежит на катете BC , касается прямых AB и AC . Найдите площадь треугольника ABC .

3387. Из точки P проведены две касательные к окружности, диаметр MN которой равен 24. Одна из них касается окружности в точке M , а вторая пересекает прямую MN в точке Q , при этом длина отрезка MP больше, чем 25. Найдите площадь треугольника MPQ , если его периметр равен 486.

3388. Трапеция $ABCD$ с большим основанием AD вписана в окружность. Точка E к этой окружности выбрана так, что прямая BE перпендикулярна AC . Чему равен радиус окружности, если $EA \parallel BD$, $EC \parallel AB$ и площадь треугольника BCD равна $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$?

3389. На окружности радиуса $\sqrt{6}$ расположены пять различных точек, которые являются вершинами трех трапеций: $KLMN$ (с большим основанием KN), $KMNP$ (с основанием KM), $LMNP$ (с основанием LP). Найдите площадь треугольника KLM , если известно, что диагонали трапеции $KMNP$ пересекаются под прямым углом.

3390. В трапеции $KLMN$ известно, что $LM \parallel KN$, $\angle LMN = 90^\circ$. Прямая, перпендикулярная стороне KL , пересекает сторону KL в точке A , а сторону MN — в точке B . Известно также, что $KB = a$, $AN = b$, а расстояние от точки

L до прямой KB равно c . Найдите расстояние от точки M до прямой AN .

3391. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E , $AB = BC$, DB — биссектриса угла D , $\angle ABC = 100^\circ$, $\angle BEA = 70^\circ$. Найдите угол CAD .

3392. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D , лежащих по разные стороны от прямой AB . Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E . Найдите AC , если $AB = 12$, $AD = 21$, $AE = 35$.

3393. Дана окружность с диаметром PQ . Вторая окружность с центром в точке Q пересекает первую окружность в точках S и T , а диаметр PQ — в точке A (рис. 135); AB — диаметр второй окружности. На дуге SB , не содержащей точки T , взята точка C , отличная от точек S и B . Отрезок PC пересекает первую окружность в точке D . Известно, что $SD = n$, $DC = m$. Найдите DT .

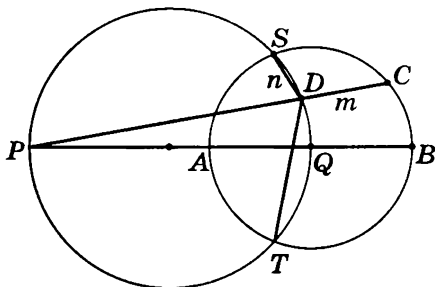


Рис. 135

3394. Дан треугольник ABC . На стороне BC взята точка P , а на стороне AC взята точка M так, что $\angle APB = \angle BMA = \frac{\pi}{4}$. Отрезки AP и BM пересекаются в точке O . Известно, что площади треугольников BOP и AOM равны между собой, $BC = 1$, $BO = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Найдите площадь треугольника ABC .

3395. Через центр O окружности, описанной вокруг остроугольного треугольника ABC , проведена прямая, перпендикулярная BO и пересекающая отрезок AB в точке P , и продолжение отрезка BC за точку C в точке Q . Вычислите BP , если известны стороны треугольника: $AB = c$, $BC = a$, а $BQ = p$.

3396. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $BC = a$, AD — высота. На стороне AB взята точка P так, что $AP : PB = 1 : 2$. Через точку P проведена окружность, касающаяся стороны BC в точке D . Найдите радиус этой окружности.

3397. Окружность, проведенная через вершины B и C треугольника ABC , пересекает сторону AB в точке D , а сторону AC — в точке E . Площадь круга, ограниченного этой окружностью, в 12 раз меньше площади круга, описанного около треугольника ADE . Отношение площади треугольника ADE к площади четырехугольника $BDEC$ равна $\frac{25}{11}$. Угол DBE равен 60° . Найдите угол ADC .

3398. Основание MQ трапеции $MNPQ$ ($MQ \parallel NP$, $MQ > NP$) является диаметром окружности, которая касается прямой MN в точке M и пересекает сторону PQ в точке K так, что $PQ = 4\sqrt{3} KQ$. Радиус окружности равен R , $\angle NQM = 60^\circ$. Найдите площадь трапеции.

3399. Площадь треугольника ABC равна 1, $\angle A = \arctg \frac{3}{4}$, точка O — середина стороны AC . Окружность с центром в точке O касается стороны BC и пересекает сторону AB в точках M и N , при этом $AM = NB$. Найдите площадь части треугольника ABC , заключенной внутри круга.

3400. В треугольнике ABC биссектриса AD , высота BE и медиана CF пересекаются в точке O . Найдите $\angle A$, если $AF = \sqrt{3} OF$ и $\angle A > 60^\circ$.

3401. В прямоугольном треугольнике ABC угол ACB — прямой. Пусть E — точка пересечения биссектрисы угла ABC со стороной AC . Точка D — середина стороны AB , O — точка пересечения отрезков BE и CD . Через точку O проведен перпендикуляр к BO до пересечения со стороной BC в точке F .

Известно, что $FC = b$, $OC = \frac{3b}{2}$. Найдите площадь треугольника ABC .

3402. В треугольнике PQR медиана, проведенная из вершины Q , равна $\frac{3\sqrt{21}}{4}$. Окружности с центрами в вершинах P и R и радиусами соответственно 5 и 1 касаются друг друга, а вершина Q лежит на прямой, касающейся каждой из окружностей. Найдите площадь S треугольника PQR , если известно, что $S < 7$.

3403. Продолжения сторон KN и LM выпуклого четырехугольника $KLMN$ пересекаются в точке P , а продолжения сторон KL и MN — в точке Q . Отрезок PQ перпендикулярен биссектрисе угла KQN . Найдите сторону KL , если $KQ = 12$, $NQ = 8$, а площадь четырехугольника $KLMN$ равна площади треугольника LQM .

3404. В треугольнике ABC сторона AC равна $3\sqrt{3}$, сторона BC равна $\sqrt{13}$. Точка M лежит на стороне AC , точка N лежит на стороне BC , причем прямые MN и AB параллельны. Отрезок MC в два раза длиннее отрезка AM . Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке K , лежащей между точками M и N , причем радиус окружности, описанной около треугольника AMK , равен $\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}$. Найдите сторону AB .

3405. В треугольнике ABC угол C — тупой, а точка D выбрана на продолжении стороны AB за точку B так, что $\angle ACD = 135^\circ$. Точка D_1 симметрична точке D относительно прямой BC , а точка D_2 симметрична точке D_1 отно-

сительно прямой AC и лежит на прямой BC . Найдите площадь треугольника ABC , если $\sqrt{3} BC = CD_2$ и $AC = 6$.

3406. Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M , а продолжения сторон AB и CD — в точке O (рис. 136). Отрезок MO перпендикулярен биссектрисе угла AOD . Найдите отношение площадей треугольников AOD и BOC , если $OA = 6$, $OD = 4$, $CD = 1$.

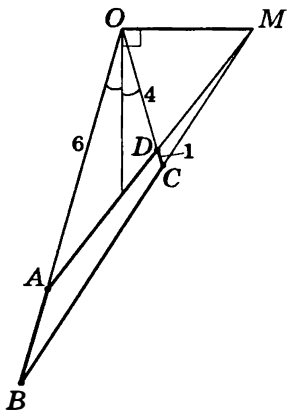


Рис. 136

3407. Две окружности пересекаются в точках K и L . Их центры расположены по одну сторону от прямой, содержащей отрезок KL . Точки A и B лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AK , касается одной окружности в точке K . Прямая, содержащая отрезок BK , касается другой окружности также в точке K . Известно, что $AL = 3$, $BL = 6$, $\operatorname{tg} \angle AKB = -\frac{1}{2}$. Найдите площадь треугольника AKB .

3408. В треугольнике ABC угол B равен 45° , угол C равен 60° . На медианах BM и CN как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q . Хорда PQ пересекает среднюю линию MN в точке F . Найдите отношение $NF : FM$.

3409. На плоскости дан прямой угол. Окружность с центром, расположенным вне данного угла, касается биссектрисы прямого угла, пересекает одну из его сторон в точках A и B и пересекает продолжение другой стороны в точках C и D . Хорда AB равна $\sqrt{7}$, хорда CD равна 1. Найдите радиус окружности.

3410. На плоскости дан прямой угол. Окружность с центром, расположенным вне этого угла, касается продолжения одной из его сторон, пересекает другую сторону в точках A и B и пересекает биссектрису этого угла в точках C и D . Хорда AB равна $4\sqrt{2}$, хорда CD равна 2. Найдите радиус окружности.

3411. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке M . Пусть P и Q — центры окружностей, вписанных в треугольники ABM и CDM , K и L — середины дуг AB и CD . Докажите, что $PQ \parallel KL$.

3412. Дана окружность с диаметром LM . Вторая окружность с центром в точке M пересекает первую окружность в точках N и Q , а диаметр LM — в точке B . BC — диаметр второй окружности. На дуге NC , не содержащей точки Q , взята точка D , отличная от точек N и C . Отрезок LD пересекает первую окружность в точке E . Известно, что $EN = n$, $ED = m$. Найдите QE .

3413. В остроугольном треугольнике ABC угол C равен 60° . На медианах BM и CN как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q . Хорда PQ пересекает сторону BC в точке D такой, что $BD : DC = \sqrt{3}$. Найдите угол B .

3414. В треугольнике ABC угол C — тупой, D — точка пересечения прямой DB , перпендикулярной к AB , и прямой DC , перпендикулярной к AC . Высота треугольника ADC , проведенная

из вершины C , пересекает AB в точке M . Известно, что $AM = a$, $MB = b$. Найдите AC .

3415. В ромб $ABCD$ вписана окружность. Прямая, касающаяся этой окружности в точке P , пересекает стороны AB , BC и продолжение стороны AD соответственно в точках N , Q и M так, что $MN : NP : PQ = 7 : 1 : 2$. Найдите углы ромба.

3416. В треугольнике ABC угол C равен 60° , а радиус круга, описанного вокруг этого треугольника, равен $2\sqrt{3}$. На стороне AB взята точка D так, что $AD = 2DB$ и при этом $CD = 2\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника ABC .

3417. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ равна $\sqrt{5}$, $\angle BAD = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$. Точки E и F расположены на диагонали BD , причем $\angle AEB = \angle CFD = 90^\circ$, $BF = 3BE$. Найдите площадь параллелограмма.

3418. Вершины K , E , M прямоугольника $KCEM$ лежат соответственно на сторонах AB , CD , AD равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Найдите углы трапеции и отношение площадей трапеции и прямоугольника, если $AM = 3BC$, $KM = 4KC$.

3419. Вершины K , H , E прямоугольника $KBHE$ лежат соответственно на сторонах AB , CD , AD равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Найдите углы трапеции и отношение площадей трапеции и прямоугольника, если $BH = 5KB$, $BC = \frac{3}{5}AE$.

3420. В равнобедренную трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписана окружность радиуса R , касающаяся основания AD в точке P и пересекающая отрезок BP в точке Q такой, что $PQ = 3BQ$. Найдите углы и площадь трапеции.

3421. Равнобедренные треугольники ABC ($AB = BC$) и $A_1B_1C_1$ ($A_1B_1 = B_1C_1$) подобны и $AB : A_1B_1 = 2$. Вер-

шины A_1 , B_1 и C_1 расположены соответственно на сторонах CA , AB и BC , причем A_1B_1 перпендикулярно AC . Найдите угол ABC .

3422. Равнобедренные треугольники ABC ($AB = BC$) и $A_1B_1C_1$ ($A_1B_1 = B_1C_1$) подобны и $BC : B_1C_1 = 4 : 3$ (рис. 137). Вершина B_1 расположена на стороне AC , вершины A_1 и C_1 — соответственно на продолжениях стороны BA за точку A и стороны CB за точку B , причем A_1C_1 перпендикулярно BC . Найдите угол ABC .

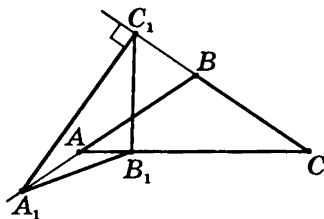


Рис. 137

3423. В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны AB , пересекает сторону AC в точке M так, что $MA : CM = 3$. Перпендикуляр, проходящий через середину стороны AC , пересекает сторону AB в точке N так, что $AN : BN = 2$. Найдите углы треугольника ABC .

3424. На гипотенузе LM прямоугольного треугольника LKM лежит точка N . На прямой LM взята точка P так, что точка M находится между точками N и P , а угол NKP — прямой. Найдите площадь треугольника NKM , если известно, что угол LKP равен ϕ , а площади треугольников LKM и NKP равны a и b соответственно.

3425. Точки K и M расположены соответственно на стороне BC и высоте BP остроугольного треугольника ABC . Найдите площадь равностороннего треугольника AMK , если известно, что $AP = 3$, $PC = \frac{11}{2}$, $BK : KC = 10 : 1$.

3426. Средняя линия KL равнобедренного треугольника ABC является также средней линией треугольника DEF , у которого вершина D лежит на отрезке AC , а вершина F — на продолжении стороны AC за точку C . Площадь четырехугольника $DKLC$ составляет $\frac{3}{8}$ площади треугольника DEF .

Найдите угол EDF .

3427. Ромб $ABCD$ и параллелограмм $BCFE$ с углом $BCF = 120^\circ$ расположены так, что точка E лежит на отрезке AD , а точка F — на продолжении стороны AD за точку D . Площадь четырехугольника $BCDE$ составляет $\frac{3}{4}$ площади ромба. Найдите углы ромба.

3428. На окружности по разные стороны от диаметра AB расположены точки C и D . Известно, что $AC = 4$, $BD = \sqrt{5}$, а площадь треугольника ABC вдвое больше площади треугольника CBD . Найдите радиус окружности.

3429. Биссектрисы углов M и N трапеции $KLMN$ ($LM \parallel KN$) пересекаются в точке Q . Найдите MN и LM , если $\angle KNM = 2 \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $QL = \sqrt{3}$, $QK = \sqrt{11}$, $KN = 2LM$.

3430. Биссектрисы углов K и N параллелограмма $KLMN$ пересекаются в точке Q . Найдите площадь параллелограмма, если $\angle K = 2 \arcsin \frac{2}{3}$, $QL = \sqrt{21}$, $QM = 2\sqrt{6}$. (Найдите все решения.)

3431. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ сторона AB равна $\frac{5}{8}$, длина стороны BC равна $19\frac{33}{40}$, сторона AD равна $12\frac{4}{5}$. Известно, что угол DAB — острый, синус угла DAB равен $\frac{3}{5}$, косинус угла ABC равен $-\frac{63}{65}$. Окружность с

центром в точке O касается сторон BC , CD и AD . Найдите OD .

3432. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ отрезок MS , соединяющий вершину M с точкой S , расположенной на стороне KN , пересекает диагональ LN в точке O . Известно, что $KL : KM = 7 : 9$, $SO : ON = 2 : 3$ и $\angle KLM + \angle KMN = 180^\circ$. Найдите отношение стороны MN к отрезку MS .

3433. Две окружности пересекаются в точках A и B . Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AB . Точки K и N лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AK , касается одной окружности в точке A . Прямая, содержащая отрезок AN , касается другой окружности также в точке A . Известно, что $AK = \sqrt{5}$, $AN = 2$, $\operatorname{tg} \angle KAN = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Найдите площадь треугольника KBN .

3434. Через середины сторон BD и CD треугольника BCD проведены прямые, перпендикулярные этим сторонам. Эти прямые пересекают высоту DH треугольника или ее продолжение в точках K и M . Известно, что $DK = k$, $DM = m$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD .

3435. Через вершину M треугольника LMN проведена прямая, перпендикулярная стороне LN . Эта прямая пересекает в точках A и B серединные перпендикуляры к сторонам LM и NM . Известно, что $AM = a$, а радиус окружности, описанной около треугольника LMN , равен R . Найдите BM .

3436. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD перпендикулярна отрезку OH , где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $AC = \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$, $AD = 1 - \sqrt{3} + \sqrt{2}$. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности.

3437. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. На дуге AD , не содержащей вершин B и C , взята точка S (рис. 138). Точки P, Q, M и N являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки S соответственно на стороны AD, BC, AB и CD (или на продолжения этих сторон). Известно, что $SP = d$, а отношение площади треугольника NQS к площади треугольника MPS равно m . Найдите SN .

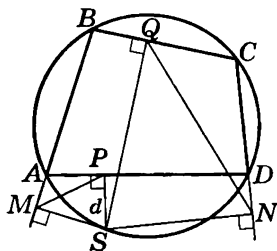


Рис. 138

3438. Продолжение общей хорды AB двух пересекающихся окружностей радиусов R и r пересекает их общую касательную в точке C (A между B и C , M и N — точки касания). Найдите:

- 1) радиус окружности, проходящей через точки A, M и N ;
- 2) отношение расстояний от точки C до прямых AM и AN .

3439. В окружность с центром O вписан треугольник BAC с тупым углом при вершине A . Точка P является серединой большей из дуг, стягиваемых хордой BC . Радиус OA пересекает сторону BC в точке L , а хорда AP пересекает сторону BC в точке Q . Пусть AF — высота треугольника BAC . Найдите отношение площади треугольника AOP к площади треугольника AQF , если известно, что биссектриса угла A треугольника ALF равна $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $AP = \sqrt{3}$

и $\angle OPA = 30^\circ$.

3440. Около треугольника ABC ($A > 90^\circ$) описана окружность с цент-

ром O . Точка F является серединой большей из дуг, стягиваемых хордой BC . Обозначим точку пересечения стороны BC с радиусом AO через E , а с хордой AF — через P . Пусть AH — высота треугольника ABC . Найдите отношение площади четырехугольника $OEPF$ к площади треугольника APH , если известно, что радиус описанной окружности $R = 2\sqrt{3}$, $AE = \sqrt{3}$ и $EH = \frac{3}{2}$.

3441. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ вершины A и C противоположны, $AB = 3$, $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle BCD = 120^\circ$. Найдите сторону AD , если известно, что площадь четырехугольника равна $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$.

3442. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ вершины A и C противоположны, $BC = 4$, $\angle ADC = 60^\circ$, $\angle BAD = 90^\circ$. Найдите сторону CD , если площадь четырехугольника равна $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$.

3443. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Хорды MN первой окружности и KL второй окружности имеют общую точку O . Отрезок PQ в пять раз больше отрезка OL . Отрезок OK в два раза больше отрезка MO , который, в свою очередь, в два раза больше отрезка OL . Какие значения может принимать длина отрезка PO , если известно, что $QO = 4$, а отрезки MO и ON равны?

3444. В тупоугольном треугольнике KLM $\angle KML = 15^\circ$, а высота, опущенная из вершины этого угла, равна $2\sqrt{2}$. Найдите радиус описанной окружности, если известно, что периметр треугольника KLM равен $8\sqrt{2} + 4 + 4\sqrt{3}$.

3445. На дуге окружности, стягиваемой хордой AD , взяты точки B и C . Биссектрисы углов ABC и BCD пере-

секаются в точке E , лежащей на хорде AD . Известно, что $\frac{AD}{CD} = k$. Найдите:

1) отношение расстояний от точки E до прямых AB и CD ;

2) отношение $\frac{AB}{CD}$.

3446. В прямоугольном секторе AOB из точки B как из центра проведена дуга OC (C — точка пересечения этой дуги с дугой AB) радиуса BO . Окружность S_1 касается дуги AB , дуги OC и прямой OA , а окружность S_2 касается дуги AB , прямой OA и окружности S_1 . Найдите отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2 .

3447. В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны AC , пересекает сторону BC в точке M , а перпендикуляр, проходящий через сторону BC , пересекает сторону AC в точке N . Прямая MN перпендикулярна AB и $MN = \frac{1}{\sqrt{3}} AB$. Найдите углы треугольника ABC .

3448. В остроугольном треугольнике PQR ($PQ > QR$) проведены высоты PT и RS ; QN — диаметр окружности, описанной около треугольника PQR . Известно, что величина острого угла между высотами PT и RS равна α , $PR = a$. Найдите площадь четырехугольника $NSQT$.

3449. Из вершины M треугольника KLM проведены высота MH , равная h , медиана MP и биссектриса MN . Точка N — середина отрезка PH . Расстояние от вершины M до точки пересечения высот треугольника KLM равно m . Найдите биссектрису MN .

3450. В треугольнике KLM , все стороны которого различны, биссектриса угла KLM пересекает сторону KM в точке N . Через точку N проведена прямая, пересекающая сторону LM в точке A такой, что $MN = AM$. Известно, что $LN = a$, $KL + KN = b$. Найдите AL .

3451. Трапеция $AEFG$ ($EF \parallel AG$) расположена в квадрате $ABCD$ со стороны 3 так, что точки E , F и G лежат на сторонах AB , BC и CD соответственно (рис. 139). Диагонали AF и EG трапеции перпендикулярны, $BF = 1$. Найдите периметр трапеции.

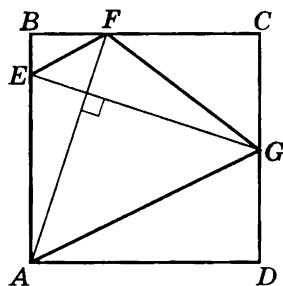


Рис. 139

3452. Диагонали BD и AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны, пересекаются в точке O , $AO = \frac{4}{3}$, $OC = 3$. Точка N лежит на стороне AB , причем $AN : NB = 1 : 3$. Треугольник DNC — равносторонний. Найдите его площадь.

3453. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) угол BAD равен α , $AB = 2BC + AD$, K — точка на боковой стороне CD такая, что $CK : KD = 1 : 2$. Найдите углы треугольника ABK .

3454. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$. Пусть D — основание перпендикуляра, опущенного из B на AC — точку пересечения биссектрисы угла BAC со стороной BC . Через точку E проведен перпендикуляр к AE до пересечения с nm , $FC = \frac{m}{4}$. Найдите площадь треугольника ABC .

3455. В треугольнике ABC точка P — центр вписанной окружности, а точка Q — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Прямая PQ перпендикулярна биссектрисе AP треугольника ABC . Известно, что

$\angle PAQ = \alpha$. Найдите углы треугольника.

3456. Прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей треугольника, перпендикулярна одной из его биссектрис. Известно, что отношение расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей к радиусу вписанной окружности равно k . Найдите углы треугольника.

3457. В окружность с центром O вписана трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$). В этой же трапеции проведены диаметр CE и хорда BE , пересекающая AD в точке F . Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из точки F на CE , S — середина отрезка EO , M — середина отрезка BD . Известно, что радиус окружности равен R , а $CH = \frac{9R}{8}$.

Найдите SM .

3458. Площадь трапеции $ABCD$ равна S , отношение оснований $AD : BC = 3 : 1$. Отрезок MN расположен так, что он параллелен стороне CD , пересекает сторону AB , а отрезок

AM параллелен отрезку BN . Найдите площадь треугольника BNC , если $AM : BN = 3 : 2$, $MN : CD = 1 : 3$ (найдите все решения).

3459. Около треугольника ABC описана окружность с центром в точке O . Касательная к окружности в точке C пересекается с прямой, делящей пополам угол B треугольника, в точке K , причем угол BKC равен половине угла C треугольника. Сторона AB на $\sqrt{3}$ длиннее стороны AC , а расстояние от точки O до стороны AC на 1 больше расстояния от точки O до стороны AB . Найдите радиус окружности.

3460. Около треугольника ABC описана окружность с центром в точке O . Касательная к окружности в точке B пересекается с прямой AC в точке K , причем угол AKB равен разности учетверенного угла A и угла B треугольника. Сторона AB в два раза длиннее стороны AC , а расстояние от точки O до стороны AC на 1 больше расстояния от точки O до стороны AB . Найдите радиус окружности.

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ

3461. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла опущена высота CN на гипотенузу AB . Известно, что $BC = 5$, $CN = 4$. Найдите площадь треугольника ABC .

3462. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60° , AM и CN — его высоты, а Q — середина стороны AC . Докажите, что треугольник MNQ — равносторонний.

3463. Из центра каждой из двух данных окружностей проведены касательные к другой окружности (рис. 140). Докажите, что хорды, соединяющие точки пересечения касательных с окружностями, равны между собой.

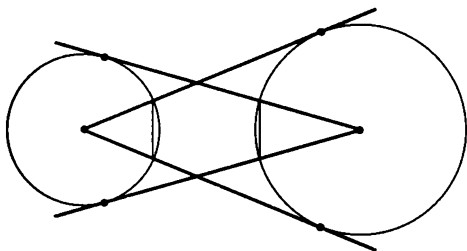


Рис. 140

3464. От квадрата отрезан прямоугольный треугольник, сумма катетов которого равна стороне квадрата. Докажите, что сумма трех углов, под которыми видна из трех оставшихся вершин его гипотенуза, равна 90° .

3465. Биссектриса угла, смежного с углом C треугольника ABC , пересекает продолжение стороны AB за точку B в точке D , а биссектриса угла,

смежного с углом A , пересекает продолжение BC за точку C в точке E . Известно, что $DC = CA = AE$. Найдите углы треугольника ABC .

3466. В треугольнике ABC проведена прямая DE , параллельная AC (D и E — точки пересечения со сторонами AB и BC соответственно). Прямая, проходящая через вершину B и точку пересечения диагоналей трапеции $ADEC$, пересекает сторону AC в точке P . На отрезке BD взята точка Q . Найдите площадь треугольника QBP , если известно, что площадь треугольника DBE равна 8 и $QB : AQ = DE : AC = 1 : 7$.

3467. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ верны равенства $AB = BC = CD$, M — точка пересечения диагоналей, K — точка пересечения биссектрис углов A и D . Докажите, что точки A , M , K и D лежат на одной окружности.

3468. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке D . Прямая касается одной из этих окружностей в точке A и пересекает другую в точках B и C . Докажите, что точка A равноудалена от прямых BD и CD .

3469. Внутри остроугольного треугольника ABC дана точка P такая, что $\angle APB = \angle ACB + 60^\circ$, $\angle BPC = \angle BAC + 60^\circ$, $\angle CPA = \angle CBA + 60^\circ$. Докажите, что точки пересечения продолжений отрезков AP , BP и CP (за точку P) с описанной окружностью треугольника ABC лежат в вершинах равностороннего треугольника.

3470. Пусть CM — медиана треугольника ABC . Известно, что $\angle CAB + \angle MCB = 90^\circ$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный или прямоугольный.

3471. Через точку O внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведены четыре окружности одинакового радиуса, каждая из которых касается двух смежных сторон четырехугольника. Докажите, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

3472. В треугольнике ABC стороны CB и CA равны соответственно a и b . Биссектриса угла ACB пересекает сторону AB в точке K , а описанную около треугольника ABC окружность — в точке M . Окружность, описанная около треугольника AMK , вторично пересекает прямую CA в точке P . Найдите AP .

3473. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.

3474. Противоположные стороны шестиугольника $ABCDEF$ попарно параллельны. Докажите, что треугольники ACE и BDF равновелики.

3475. Точка O , лежащая внутри треугольника ABC , обладает тем свойством, что прямые AO , BO и CO проходят через центры описанных окружностей треугольников BCO , ACO и ABO . Докажите, что O — центр вписанной окружности треугольника ABC .

3476. Прямая l пересекает окружность с диаметром AB в точках C и D , отличных от A и B . Из точек A и B к прямой l проведены перпендикуляры AE и BF соответственно. Докажите, что отрезки CE и DF равны.

3477. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$), A_1 и B_1 — точки, симметричные точкам A и B относительно

биссектрисы угла AOB . Докажите, что $\angle ACA_1 = \angle BDB_1$.

3478. Сторона квадрата $ABCD$ равна 1. На сторонах AB и AD выбраны точки P и Q так, что периметр треугольника APQ равен 2. Докажите, что $\angle PCQ = 45^\circ$.

3479. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB , BC и AC в точках C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Известно, что отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 равны. Докажите, что треугольник ABC — правильный.

3480. Докажите, что если $abc = 4Rrr_1$, где a , b , c — стороны треугольника, R , r , r_1 — радиусы описанной, вписанной и одной из внеписанных окружностей, то треугольник — прямоугольный.

3481. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Докажите, что круги, построенные на ее боковых сторонах как на диаметрах, касаются друг друга.

3482. Диагонали трапеции с основаниями AD и BC пересекаются в точке O (рис. 141). Докажите, что окружности, описанные около треугольников AOD и BOC , касаются друг друга.

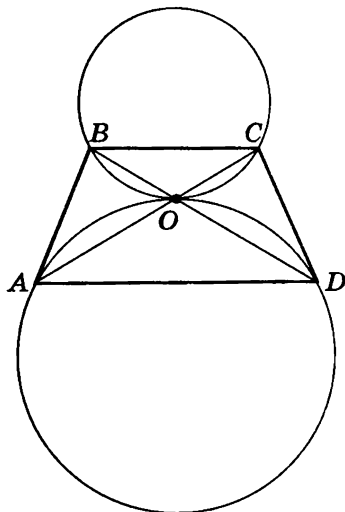


Рис. 141

3483. В прямоугольном треугольнике ABC угол при вершине A равен 60° , O — середина гипотенузы AB , P — центр вписанной окружности. Найдите угол POC .

3484. Через две вершины треугольника проведены прямые, разбивающие его на три треугольника и четырехугольник.

а) Могут ли площади всех четырех частей быть равны?

б) Какие три из этих частей могут иметь равные площади? Во сколько раз отличается от них площадь четвертой части?

3485. Каждая сторона выпуклого четырехугольника разделена на 8 равных частей. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены друг с другом, и полученные клетки раскрашены в шахматном порядке. Докажите, что сумма площадей черных клеток равна сумме площадей белых клеток.

3486. Докажите, что если стороны треугольника связаны неравенством $a^2 + b^2 > 5c^2$, то c — наименьшая сторона.

3487. Вокруг правильного треугольника APQ описан прямоугольник $ABCD$, причем точки P и Q лежат на сторонах BC и CD соответственно; P_1 и Q_1 — середины сторон AP и AQ . Докажите, что треугольники BQ_1C и CP_1D подобны.

3488. Через произвольную точку K квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая его противоположные стороны AB и CD в точках P и Q . Докажите, что отличная от K точка пересечения окружностей, проходящих через точки K, B, P и K, D, Q , лежит на диагонали BD .

3489. Точки M и N на сторонах BC и AB равностороннего треугольника ABC выбраны так, что площадь треугольника AKC равна площади четы-

рехугольника $BMKN$ (R — точка пересечения отрезков AM и CN). Найдите угол AKC .

3490. По стороне правильного треугольника катится окружность радиуса, равного его высоте. Докажите, что угловая величина дуги, отсекаемой на окружности сторонами треугольника, всегда равна 60° .

3491. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ взяты точки K и M так, что $3AK = 4AM = AB$. Докажите, что прямая KM касается окружности, вписанной в квадрат.

3492. На сторонах AB, BC, CD, DA прямоугольника $ABCD$ соответственно взяты точки K, L, M, N , отличные от вершин. Известно, что $KL \parallel MN$ и $KM \perp NL$. Докажите, что точка пересечения отрезков KM и LN лежит на диагонали BD прямоугольника.

3493. Докажите, что если в четырехугольнике два каких-то угла тупые, то диагональ, соединяющая вершины этих углов, меньше другой диагонали.

3494. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 и высоты AA_2, BB_2, CC_2 . Докажите, что длина ломаной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$ равна периметру треугольника ABC .

3495. Докажите, что в каждом девятиугольнике есть пара диагоналей, угол между которыми меньше 7° .

3496. В выпуклом четырехугольнике прямая, проходящая через середины двух противоположных сторон, образует равные углы с диагоналями четырехугольника. Докажите, что диагонали равны.

3497. Докажите, что у выпуклого многоугольника может быть не более трех острых углов.

3498. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре треугольника. Известно, что радиусы окружностей, описанных около этих че-

тырех треугольников, равны между собой. Докажите, что этот четырехугольник — ромб.

3499°. На сторонах AD и DC ромба $ABCD$ построены правильные треугольники AKD и DMC так, что точка K лежит по ту же сторону от AD , что и прямая BC , а точка M — по другую сторону от DC , чем AB (рис. 142). Докажите, что точки B , K и M лежат на одной прямой.

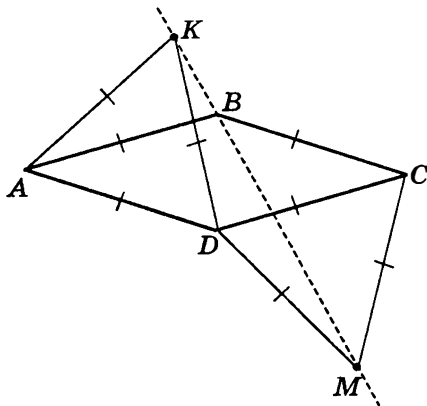


Рис. 142

3500. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC . Докажите, что расстояние между серединами отрезков BC и AH равно радиусу описанной окружности треугольника ABC .

3501. Пусть Q — центр вписанной окружности треугольника ABC . Докажите, что центры описанных окружностей треугольников AQB , BQC и AQC лежат на описанной окружности треугольника ABC .

3502°. Через точку пересечения биссектрисы угла A треугольника ABC и отрезка, соединяющего основания двух других биссектрис, проведена прямая, параллельная стороне BC . Докажите, что меньшее основание образовавшейся трапеции равно полусумме ее боковых сторон.

3503. Высота, биссектриса и медиана, выходящие из одной вершины треугольника, соответственно равны $\sqrt{3}$, 2 и $\sqrt{6}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

3504. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты точки C_1 , A_1 и B_1 . Известно, что отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M . Докажите, что сумма $MA_1 + MB_1 + MC_1$ не превосходит наибольшей стороны треугольника ABC .

3505. Внутри треугольника ABC взята точка M . Докажите, что

$$AM \cdot BC + BM \cdot AC + CM \cdot AB \geq 4S,$$

где S — площадь треугольника ABC .

3506. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка M , являющаяся:

- точкой пересечения медиан;
- точкой пересечения биссектрис;
- точкой пересечения высот.

Докажите, что если радиусы окружностей, вписанных в треугольники AMB , VMC , AMC , равны, то треугольник ABC — правильный.

3507. Продолжения сторон AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P , а продолжения BC и AD — в точке Q (рис. 143). Докажите, что точки пересечения биссектрис углов AQB и BPC со сторонами четырехугольника являются вершинами ромба.

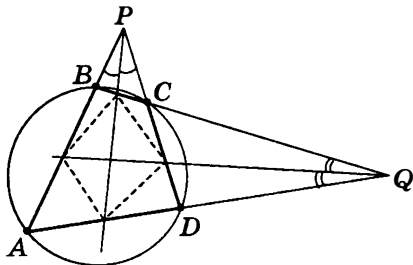


Рис. 143

3508. Общая внутренняя касательная к окружностям с радиусами R и r пересекает их общие внешние касательные в точках A и B и касается одной из окружностей в точке C . Докажите, что $AC \cdot CB = R \cdot r$.

3509. На отрезке AB взята точка C . Прямая, проходящая через точку C , пересекает окружности с диаметрами AC и BC в точках K и L , а также окружность с диаметром AB — в точках M и N . Докажите, что $KM = LN$.

3510. Из точки A проведены касательные AB и AC к окружности с центром O . Через точку X отрезка BC проведена прямая KL , перпендикулярная $ХО$ (точки K и L лежат на прямых AB и AC). Докажите, что $KX = XL$.

3511. Из вершины B параллелограмма $ABCD$ проведены его высоты BK и BH . Известны отрезки $KH = a$ и $BD = b$. Найдите расстояние от точки B до точки пересечения высот треугольника BKH .

3512. Опустим из любой точки P биссектрисы угла A треугольника ABC перпендикуляры PA_1 , PB_1 , PC_1 на его стороны BC , CA и AB соответственно. Пусть R — точка пересечения прямых PA_1 и B_1C_1 . Докажите, что прямая AR делит сторону BC пополам.

3513. Бумажная прямоугольная полоска помещается внутри данного круга. Полоску согнули (не обязательно пополам). Докажите, что после сгибания полоску можно также разместить в этом круге.

3514. Четыре окружности радиуса R пересекаются по три в точках M и N и по две в точках A , B , C и D . Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

3515. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и N . Пусть P — точка пересечения прямой MN и биссектрисы угла B (или ее продолжения). Докажите, что $\angle BPC = 90^\circ$.

3516°. Известно, что в некотором треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные из вершины C , делят угол на четыре равные части. Найдите углы этого треугольника.

3517. Докажите, что если в выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ имеют место равенства $\angle ABC = \angle ADE$ и $\angle AEC = \angle ADB$, то $\angle BAC = \angle DAE$.

3518. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK . Известно, что центры окружностей, вписанной в треугольник ABK и описанной около треугольника ABC , совпадают. Найдите углы треугольника ABC .

3519. Дан треугольник ABC . Окружность проходит через вершины A , B и пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. На стороне AB взяты точки R и S так, что $QR \parallel CA$, $PS \parallel CB$. Докажите, что точки P , Q , R , S лежат на одной окружности.

3520. Точка D лежит на биссектрисе угла ACB . На луче CA выбрали точки A_1 и A_2 , а на луче CB — точки B_1 и B_2 так, что четыре точки A_1 , C , B_1 , D лежат на одной окружности и четыре точки A_2 , C , B_2 , D тоже лежат на одной окружности. Докажите, что $A_1A_2 = B_1B_2$.

3521. Через вершину C квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке K , а серединный перпендикуляр к стороне AB — в точке M (M между C и K). Найдите $\angle DCK$, если $\angle AKB = \angle AMB$.

3522. Внутри отрезка AB взята точка C . По одну сторону от прямой AB построены равнобедренные треугольники ADC и CEB , причем $AD = DC = CE = EB$. Точка F находится на расстоянии, равном AD , от вершин D и E и не совпадает с точкой C . Докажите, что $AF = FB$.

3523. Точки касания вписанного в данный треугольник круга соединены отрезками и в полученном треуголь-

нике проведены высоты. Докажите, что прямые, соединяющие основания этих высот, параллельны сторонам исходного треугольника.

3524. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC , $AD = 7$, $BC = 3$, $\angle ACD = 60^\circ$. Известно, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности и перпендикуляр, проведенный из точки A к стороне CD , делит угол $\angle BAD$ пополам. Найдите диагональ AC .

3525. Внутри выпуклого четырехугольника расположены четыре окружности, каждая из которых касается двух соседних сторон четырехугольника и двух окружностей (внешним образом). Известно, что в четырехугольник можно вписать окружность. Докажите, что по крайней мере две из данных окружностей равны.

3526. Пусть Q — центр вписанной окружности треугольника ABC , прямая AQ пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D . Выразите отрезки AQ и QD через R и r (радиусы описанной и вписанной окружностей треугольников ABC) и угол A .

3527. Взаимно перпендикулярные прямые l и m пересекаются в точке P окружности так, что они разбивают окружность на три дуги (рис. 144). Отметим на каждой дуге такую точку, что проведенная через нее касатель-

ная к окружности пересекается с прямыми l и m в точках, равноотстоящих от точки касания. Докажите, что три отмеченные точки являются вершинами равностороннего треугольника.

3528. Основания трапеции равны a и b . Известно, что через середину одной из ее сторон можно провести прямую, делящую трапецию на два четырехугольника, в каждый из которых можно вписать окружность. Найдите другую боковую сторону трапеции.

3529. Имеются четыре окружности. В первой проведена хорда AB , при этом расстояние от середины меньшей из двух образовавшихся дуг до AB равно 1. Вторая, третья и четвертая окружности расположены внутри большего сегмента и касаются хорды AB . Вторая и четвертая окружности касаются изнутри первой и внешним образом третьей. Сумма радиусов трех последних окружностей равна радиусу первой окружности. Найдите радиус третьей окружности, если известно, что прямая, проходящая через центры первой и третьей окружностей, не параллельна прямой, проходящей через центры двух других окружностей.

3530. Три прямые, параллельные сторонам треугольника ABC и проходящие через одну точку, отсекают от треугольника ABC трапеции. Три диагонали этих трапеций, не имеющие общих концов, делят треугольник на семь частей, из которых четыре — треугольники. Докажите, что сумма площадей трех из этих треугольников, прилежающих к сторонам треугольника ABC , равна площади четвертого.

3531. Шесть кругов расположены на плоскости так, что некоторая точка O лежит внутри каждого из них. Докажите, что один из этих кругов содержит центр некоторого другого.

3532. Внутри квадрата со стороной 1 расположено n точек. Докажите, что площадь одного из треугольников с

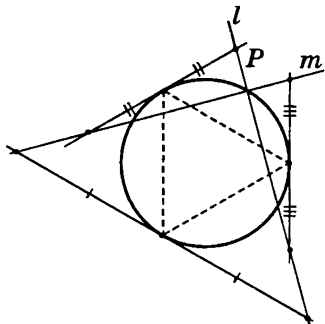


Рис. 144

вершинами в этих точках или в вершинах квадрата не превосходит $\frac{1}{2(n+1)}$.

3533. Все биссектрисы треугольника меньше 1. Докажите, что его площадь меньше $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3534. Даны n точек $A_1, A_2, \dots, A_n$ и окружность радиуса 1. Докажите, что на окружности можно выбрать точку M так, что

$$MA_1 + MA_2 + \dots + MA_n \geq n.$$

3535. Точка M лежит на стороне AC остроугольного треугольника ABC . Вокруг треугольников ABM и CBM описываются окружности. При каком положении точки M площадь общей части ограниченных ими кругов будет наименьшей?

3536. Из произвольной точки M окружности, описанной около прямоугольника, опустили перпендикуляры MP и MQ на две его противоположные стороны и перпендикуляры MR и MT — на продолжения двух других сторон. Докажите, что прямые PR и QT перпендикулярны друг другу, а их точка пересечения принадлежит диагонали прямоугольника.

3537. Внутри треугольника расположены окружности $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ одинакового радиуса так, что каждая из окружностей α, β, γ касается двух сторон треугольника и окружности δ . Докажите, что центр окружности δ принадлежит прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей данного треугольника.

3538. О выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что окружность с диаметром AB касается прямой CD . Докажите, что окружность с диаметром CD касается прямой AB тогда и только тогда, когда прямые BC и AD параллельны.

3539. Дан треугольник ABC , который можно накрыть одним пятаком.

Постройте с помощью пятака четвертую вершину параллелограмма $ABCD$ (пятак разрешается прикладывать к любым двум точкам и обводить карандашом).

3540. В треугольнике ABC угол C — тупой. На стороне AB отмечены точки E и H , на сторонах AC и BC — точки K и M соответственно. Оказалось, что $AH = AC, BE = BC, AE = AK, BH = BM$. Докажите, что точки E, H, K, M лежат на одной окружности.

3541. Дан правильный треугольник ABC . Некоторая прямая, параллельная прямой AC , пересекает прямые AB и BC в точках M и P соответственно. Точка D — центр правильного треугольника PMB , точка E — середина отрезка AP . Определите углы треугольника DEC .

3542. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около треугольника окружность в точке K . Докажите, что проекция отрезка AK на прямую AB равна полусумме сторон AB и AC .

3543. Три равные окружности S_1, S_2, S_3 попарно касаются друг друга и вокруг них описана окружность S , которая касается всех трех. Докажите, что для любой точки M окружности S касательная, проведенная из точки M к одной из трех окружностей S_1, S_2, S_3 , равна сумме касательных, проведенных из точки M к двум другим окружностям.

3544. Высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, делит треугольник на два треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Найдите углы и площадь треугольника, образованного катетами исходного треугольника и прямой, проходящей через центры этих окружностей, если высота исходного треугольника равна h .

3545. В треугольнике ABC на стороне BC взята точка M так, что $BM =$

$= 2MC$, причем $\angle AMB = 60^\circ$. Зная, что $\angle BAC = 60^\circ$, найдите углы B и C треугольника ABC .

3546. В прямоугольнике $ABCD$ опущен перпендикуляр BK на диагональ AC . Точки M и N — середины отрезков AK и CD соответственно. Докажите, что угол BMN — прямой.

3547. Из некоторой точки окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC , проведены прямые, параллельные BC , CA и AB и пересекающие прямые CA , AB и BC в точках M , N и Q соответственно. Докажите, что точки M , N и Q лежат на одной прямой.

3548. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B . Секущая, проходящая через точку A , пересекает эти окружности вторично в точках M и N . Касательные к окружностям S_1 и S_2 в точке A пересекаются прямыми BN и BM в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямые PQ и MN параллельны.

3549. Пусть A — основание перпендикуляра, опущенного из центра данной окружности на данную прямую l (рис. 145). На этой прямой взяты еще две точки B и C так, что $AB = AC$. Через точки B и C проведены две произвольные секущие, из которых одна пересекает окружность в точках Q и P , вторая — в точках M и N . Пусть прямые PM и QN пересекают прямую l в точках R и S . Докажите, что $AR = AS$.

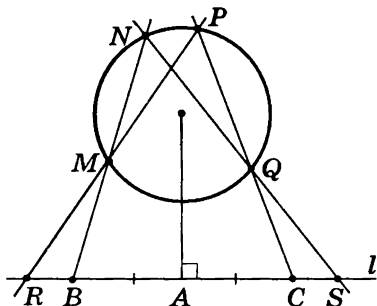


Рис. 145

3550. Внутри треугольника имеются две точки. Расстояния от одной из них до сторон треугольника равны 1, 3 и 15, а от другой (в том же порядке) — 4, 5 и 11. Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

3551. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD . Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно DC , пересекает AC в точке E . Докажите, что $EC = 2AD$.

3552. Рассмотрим два различных четырехугольника с соответственно равными сторонами. Докажите, что если у одного из них диагонали перпендикулярны, то и у другого тоже.

3553. Вписанная окружность треугольника $A_1A_2A_3$ касается сторон A_2A_3 , A_3A_1 и A_1A_2 в точках S_1 , S_2 и S_3 соответственно. Пусть O_1 , O_2 и O_3 — центры вписанных окружностей треугольников $A_1S_2S_3$, $A_2S_3S_1$ и $A_3S_1S_2$ соответственно. Докажите, что прямые O_1S_1 , O_2S_2 и O_3S_3 пересекаются в одной точке.

3554. Центры трех окружностей, попарно касающихся друг друга внешним образом, расположены в вершинах прямоугольного треугольника. Эти окружности касаются изнутри четвертой окружности. Найдите радиус четвертой окружности, если периметр прямоугольного треугольника равен $2p$.

3555. Пусть M и N — середины сторон AD и BC прямоугольника $ABCD$. На продолжении отрезка DC за точку D взята точка P ; Q — точка пересечения прямых PM и AC . Докажите, что $\angle QNM = \angle MNP$.

3556. В равнобедренном треугольнике ABC из середины H основания BC опущен перпендикуляр HE на боковую сторону AC ; O — середина отрезка HE . Докажите, что прямые AO и BE перпендикулярны.

3557. Расстояния от точки M до трех вершин прямоугольника равны (последовательно) 3, 5, 4. Найдите площадь прямоугольника.

3558. На стороне треугольника взяты четыре точки K , P , H и M , являющиеся соответственно серединой этой стороны, основанием биссектрисы противоположного угла треугольника, точкой касания с этой стороной вписанной в треугольник окружности и основанием соответствующей высоты. Найдите KH , если $KP = a$, $KM = b$.

3559. Внутри правильного треугольника имеется точка, удаленная от его вершин на расстояния 5, 6 и 7. Найдите площадь этого правильного треугольника.

3560. В некотором царстве, в некотором государстве есть несколько городов, причем расстояния между ними все попарно различны. В одно прекрасное утро из каждого города вылетает по одному самолету, который приземляется в ближайшем соседнем городе. Может ли в одном городе приземлиться более пяти самолетов?

3561. На диаметре AC некоторой окружности дана точка E . Проведите через нее хорду BD так, чтобы площадь четырехугольника $ABCD$ была наибольшей.

3562. В треугольнике ABC углы при вершинах B и C равны 40° ; BD — биссектриса угла B . Докажите, что

$$BD + DA = BC.$$

3563. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки E и F так, что $\angle EAF = 45^\circ$. Отрезки AE и AF пересекают диагональ BD в точках P и Q . Докажите, что $\frac{S(AEF)}{S(APQ)} = 2$.

3564. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AD и AB в точках M и N . Докажите, что точки пересечения отрезка MN с BC и CD лежат на вписанной окружности треугольника BCD .

3565. ABC — данный остроугольный треугольник, H — точка пересечения высот. Положим $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $AH = x$, $BH = y$, $CH = z$. Докажите, что $ayz + bzx + cxy = abc$.

3566. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 60° . Докажите, что одна из биссектрис угла, образованного высотами, проведенными из вершин B и C , проходит через центр описанной окружности этого треугольника.

3567. На окружности взяты последовательно точки A , B , C и D , причем $AB = BD$. Касательная к окружности в точке A пересекается с прямой BC в точке Q ; R — точка пересечения прямых AB и CD . Докажите, что прямые QR и AD параллельны.

3568. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные противоположным сторонам CD и CB соответственно. Докажите, что эти прямые и прямая AC имеют общую точку.

3569. В окружность вписаны треугольники T_1 и T_2 , причем вершины треугольника T_2 являются серединами дуг, на которые окружность разбивается вершинами треугольника T_1 (рис. 146). Докажите, что в шестиугольнике, являющемся пересечением треугольников T_1 и T_2 , диагонали, соединяющие противоположные вер-

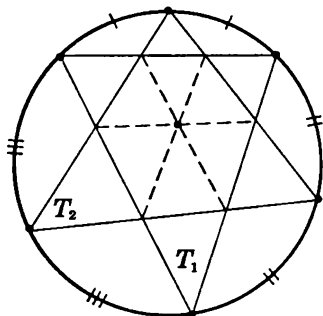


Рис. 146

шины, параллельны сторонам треугольника T_1 и пересекаются в одной точке.

3570. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность; O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA и DAB . Докажите, что $O_1O_2O_3O_4$ — прямоугольник.

3571. Внутри треугольника ABC , в котором $\angle A = 50^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 70^\circ$, дана такая точка M , что $\angle AMB = 110^\circ, \angle BMC = 130^\circ$. Найдите $\angle MBC$.

3572. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке E , лежащей на стороне CD . Известно, что $\frac{CD}{BC} = m$. Найдите:

1) отношение расстояний от точки E до прямых AD и BC ;

2) отношение площадей треугольников ADE и BCE .

3573. Около окружности описан многоугольник. Точки касания его сторон с окружностью служат вершинами второго, вписанного в эту окружность многоугольника. Докажите, что произведение расстояний от произвольной точки M окружности до сторон (или их продолжений) одного многоугольника равно произведению расстояний от этой точки до сторон (или их продолжений) второго.

3574. На стороне AD вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ находится центр окружности, касающейся трех других сторон четырехугольника. Найдите AD , если $AB = 2$ и $CD = 3$.

3575. В равносторонний треугольник ABC вписана полуокружность с центром O на стороне AB . Некоторая касательная к полуокружности пересекает стороны BC и CA в точках M и N соответственно, а прямая, соединяющая точки касания сторон AB и AC с

полуокружностью, пересекает отрезки OM и ON в точках P и Q . Докажите, что $MN = 2PQ$.

3576. В треугольнике ABC известно, что $\angle B = 50^\circ, \angle C = 70^\circ$. Найдите углы треугольника OHC , где H — точка пересечения высот, O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC .

3577. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат на сторонах AB и BC соответственно, причем $BP = BQ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC . Докажите, что угол DHQ — прямой.

3578. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ взяты точки K и N соответственно. При этом $AK \cdot AN = 2BK \cdot DN$. Отрезки CK и CN пересекают диагональ BD в точках L и M . Докажите, что точки K, L, M, N и A лежат на одной окружности.

3579. Дан треугольник ABC . На прямых AB, BC и CA взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно, отличные от вершин треугольника. Докажите, что окружности, описанные около треугольников $AB_1C_1, A_1B_1C_1, A_1BC_1$, пересекаются в одной точке.

3580. На сторонах AB и BC треугольника ABC как на гипотенузах построены вне его прямоугольные треугольники APB и BQC с одинаковыми углами β при их общей вершине B . Найдите углы треугольника PQK , где K — середина стороны AC .

3581. Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ нет параллельных сторон. Обозначим через E и F точки пересечения прямых AB и DC, BC и AD соответственно (точка A лежит на отрезке BE , а точка C — на отрезке BF). Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда $EA + AF = EC + CF$.

3582. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена

биссектриса CD угла C . На прямой AC взята точка E так, что $\angle EDC = 90^\circ$. Найдите EC , если $AD = 1$.

3583. Пусть AE и CD — биссектрисы треугольника ABC , $\angle BED = 2\angle AED$ и $\angle BDE = 2\angle EDC$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

3584. Внутри треугольника ABC с острыми углами при вершинах A и C взята точка K так, что $\angle AKB = 90^\circ$, $\angle CKB = 180^\circ - \angle ACB$. В каком отношении прямая BK делит сторону AC , если высота, опущенная на AC , делит эту сторону в отношении λ , считая от вершины A ?

3585. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1 . Докажите, что расстояние от любой точки M отрезка A_1B_1 до прямой AB равно сумме расстояний от M до прямых AC и BC .

3586. Пусть p — полупериметр остроугольного треугольника ABC , q — полупериметр треугольника, образованного основаниями его высот. Докажите, что $p : q = R : r$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC .

3587. На доске была начерчена трапеция, в ней была проведена средняя линия EF и опущен перпендикуляр OK из точки O пересечения диагоналей на большее основание. Затем трапецию стерли. Как восстановить чертеж по сохранившимся отрезкам EF и OK ?

3588. Острый угол при вершине A ромба $ABCD$ равен 40° . Через вершину A и середину M стороны CD проведена прямая, на которую опущен перпендикуляр BH из вершины B . Найдите угол AHB .

3589. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C , а вторую — в точке D . Пусть M и N — середины дуг BC и BD , не содер-

жащих точку A , а K — середина отрезка CD (рис. 147). Докажите, что $\angle MKN = 90^\circ$. (Можно считать, что точки C и D лежат по разные стороны от точки A .)

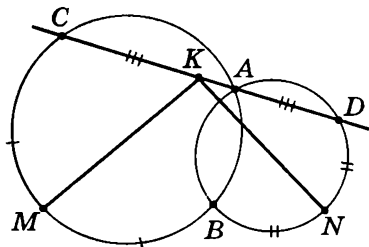


Рис. 147

3590. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника $ABCDE$ отсекает от него треугольник единичной площади. Вычислите площадь пятиугольника $ABCDE$.

3591. На основании AB равнобедренного треугольника ABC выбрана точка D так, что окружность, вписанная в треугольник BCD , имеет тот же радиус, что и окружность, касающаяся продолжений отрезков CA и CD и отрезка AD (внеписанная окружность треугольника ACD). Докажите, что этот радиус равен $\frac{1}{4}$ высоты треугольника, опущенной на ее боковую сторону.

3592. Найдите углы остроугольного треугольника ABC , если известно, что его биссектриса AD равна стороне AC и перпендикулярна отрезку OH , где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC .

3593. Известно, что AE и CD — биссектрисы треугольника ABC , $\angle CDE = 30^\circ$. Докажите, что один из углов треугольника ABC равен 60° или 120° .

3594. Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена высота CD , и в треугольниках ACD и BCD вписаны окружности с

центрами P и Q . Общая внешняя касательная к этим окружностям пересекает катеты AC и BC в точках M и N , а высоту CD — в точке K . Докажите, что:

а) треугольники CMN и CBA подобны;

б) точки C, M, N, P и Q лежат на одной окружности с центром K , радиус которой равен радиусу вписанной окружности треугольника ABC .

3595. В треугольнике ABC проведены высота $АН$ и биссектриса BE . Докажите, что если $\angle BEA = 45^\circ$, то и $\angle EHC = 45^\circ$.

3596. Хорды AB и CD пересекаются в точке E внутри окружности. Пусть M — внутренняя точка отрезка BE . Касательная в точке E к окружности, проходящей через точки D, E и M , пересекает прямые BC и AC в точках F и G соответственно. Пусть $\frac{AM}{AB} = t$. Найдите $\frac{EG}{EF}$ как функцию от t .

3597. Через вершину A квадрата $ABCD$ проведены прямые l_1 и l_2 , пересекающие его стороны. Из точек B и D опущены перпендикуляры BB_1, BB_2, DD_1, DD_2 на эти прямые. Докажите, что отрезки B_1B_2 и D_1D_2 равны и перпендикулярны.

3598. В треугольнике ABC с углом A , равным 120° , биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O . Докажите, что $\angle A_1C_1O = 30^\circ$.

3599. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке A . Хорда BC в большей окружности касается меньшей в точке D . Прямая AD вторично пересекает большую окружность в точке M . Найдите MB , если $MA = a, MD = b$.

3600. На сторонах BC, CA и AB треугольника взяты точки A_1, B_1, C_1 соответственно так, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники

A_1BC_1, AB_1C_1 и A_1B_1C , равны между собой и равны r . Радиус окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$, равен r_1 . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

3601. Докажите, что во всяком описанном четырехугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности расположены на одной прямой (прямая Ньютона).

3602. Прямые PC и PD касаются окружности с диаметром AB (C и D — точки касания). Докажите, что прямая, соединяющая точку P с точкой пересечения прямых AC и BD , перпендикулярна AB .

3603. Для данной хорды MN окружности рассматриваются треугольники ABC , основаниями которых являются диаметры AB этой окружности, не пересекающие MN , а стороны AC и BC проходят через концы M и N хорды MN . Докажите, что высоты всех таких треугольников ABC , опущенные из вершины C на сторону AB , пересекаются в одной точке.

3604. Пусть M — точка пересечения биссектрис внутреннего угла B и внешнего угла C треугольника ABC , а N — точка пересечения биссектрис внешнего угла B и внутреннего угла C (рис. 148). Докажите, что середина от-

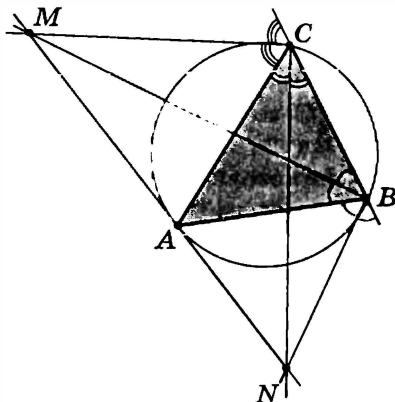


Рис. 148

резка MN лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .

3605. В треугольнике ABC через середину M стороны BC и центр O вписанной в этот треугольник окружности проведена прямая MO , которая пересекает высоту AH в точке E . Докажите, что отрезок AE равен радиусу вписанной окружности.

3606°. Даны две непересекающиеся окружности, к которым проведены две общие внешние касательные. Рассмотрим равнобедренный треугольник, основание которого лежит на одной касательной, противоположная вершина — на другой, а каждая из боковых сторон касается одной из данных окружностей. Докажите, что высота треугольника равна сумме радиусов окружностей.

3607. Пусть AE и CD — биссектрисы треугольника ABC . Докажите, что если $\angle BDE : \angle EDC = \angle BED : \angle DEA$, то треугольник ABC — равнобедренный.

3608. Три пары противоположных сторон шестиугольника параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие их середины, пересекаются в одной точке.

3609. Продолжение биссектрисы AD остроугольного треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке E . Из точки D на стороны AB и AC опущены перпендикуляры DP и DQ . Докажите, что $S(ABC) = S(APEQ)$.

3610. Пусть $A_1A_2...A_n$ — правильный многоугольник с нечетным числом сторон, M — произвольная точка на дуге A_1A_n окружности, описанной около многоугольника. Докажите, что сумма расстояний от точки M до вершин с нечетными номерами равна сумме расстояний от M до вершин с четными номерами.

3611. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC зеленой краской отме-

тили соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 , отличные от вершин треугольника. Оказалось, что $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A$, а $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Докажите, что треугольник с зелеными вершинами подобен треугольнику ABC .

3612. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Противоположные стороны AB и CD при продолжении пересекаются в точке K , стороны BC и AD — в точке L . Докажите, что биссектрисы углов BKC и BLC пересекаются на прямой, соединяющей середины AC и BD .

3613. Противоположные стороны четырехугольника, вписанного в окружность, пересекаются в точках P и Q . Найдите PQ , если касательные к окружности, проведенные из точек P и Q , равны a и b .

3614. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках A и C , пересекают касательную, проведенную в точке B , соответственно в точках M и N . В треугольнике ABC проведена высота BP . Докажите, что прямая BP является биссектрисой угла MPN .

3615. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 так, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M . Докажите, что если а) два из этих четырехугольников являются вписанными, то и третий также является вписанным; б) два из этих четырехугольников являются описанными, то и третий также является описанным.

3616. На плоскости даны n красных и n синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести n отрезков с разноцветными концами, не имеющих общих точек.

3617. (Задача о бабочке.) Через середину C произвольной хорды AB окружности (рис. 149) проведены две хорды KL и MN (точки K и M лежат по одну сторону от AB). Отрезок KN пересекает AB в точке P . Отрезок LM пересекает AB в точке Q . Докажите, что $PC = QC$.

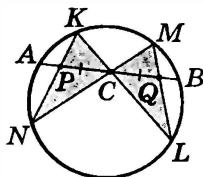


Рис. 149

3618. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка D , а на отрезке BD — точка K так, что $AD : DC = \angle AKD : \angle DKC = 2 : 1$. Докажите, что $\angle AKD = \angle ABC$.

3619. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, $DC = m$, $DA = n$. На стороне BA взяты точки A_1 и K , а на стороне BC — точки C_1 и M . Известно,

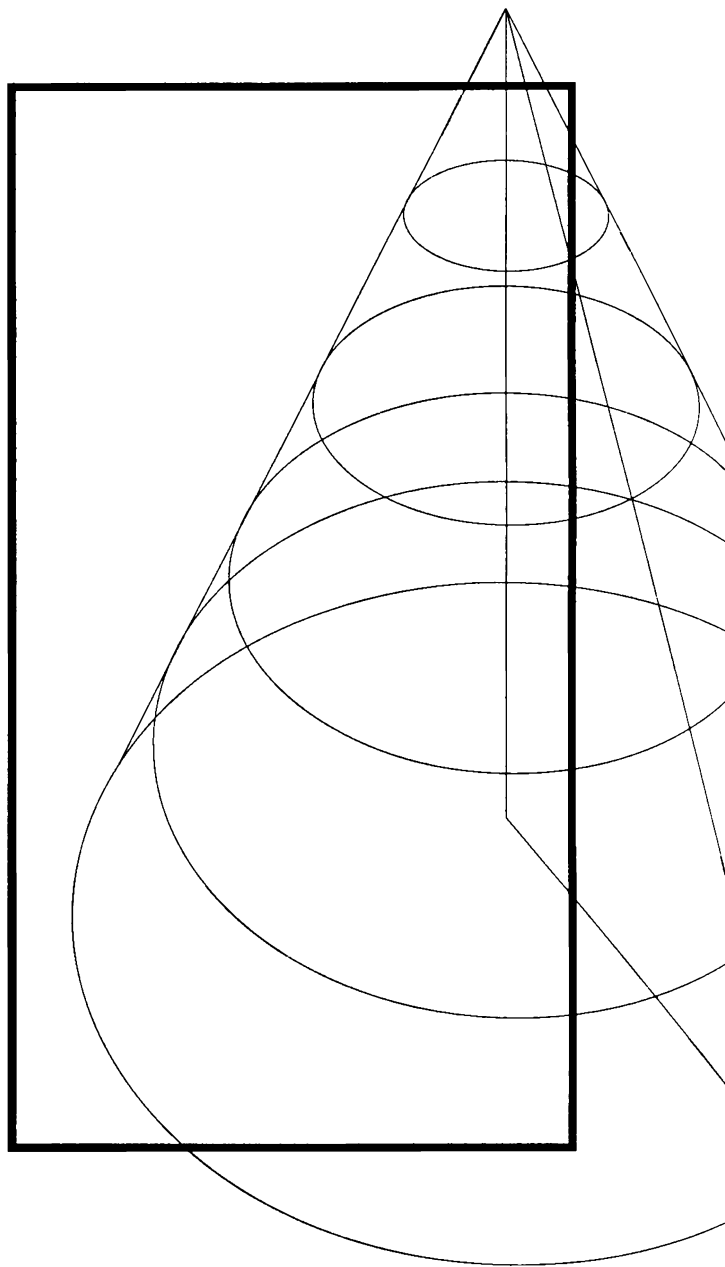
что $BA_1 = a$, $BC_1 = c$, $BK = BM$ и что отрезки A_1M и C_1K пересекаются на диагонали BD . Найдите BK и BM .

3620. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 20° . На боковых сторонах AB и CB взяты соответственно точки Q и P так, что $\angle QCA = 60^\circ$, а $\angle PAC = 50^\circ$. Найдите $\angle QPA$.

3621. Окружность, построенная на высоте AD прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает катет AB в точке K , а катет AC — в точке M . Отрезок KM пересекает высоту AD в точке L . Известно, что отрезки AK , AL и AM составляют геометрическую прогрессию (т. е. $AK : AL = AL : AM$). Найдите острые углы треугольника ABC .

3622. Докажите, что если $ABCD$ — вписанный четырехугольник, то сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABC и ACD , равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники BCD и BDA .

Стереометрия



УЧЕБНЫЕ ЗАДАЧИ

1. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

3623. Докажите, что через две параллельные прямые можно провести единственную плоскость.

3624. Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.

3625. (Признак параллельности прямой и плоскости.) Прямая a , не лежащая в плоскости α , параллельна некоторой прямой этой плоскости. Докажите, что прямая a параллельна плоскости α .

3626. Если через прямую a , параллельную данной плоскости, проведена плоскость, пересекающая данную, то прямая пересечения плоскостей параллельна прямой a .

3627. Докажите, что в пространстве через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести единственную прямую, параллельную данной.

3628. Докажите, что две прямые, параллельные одной и той же прямой, параллельны.

3629. Прямая a лежит в плоскости α , а прямая b пересекает эту плоскость в точке A , лежащей на прямой a . Докажите, что a и b — скрещивающиеся прямые.

3630. Прямые a и b параллельны. Плоскость, проходящая через прямую a , и плоскость, проходящая через пря-

мую b , пересекаются по прямой c . Докажите, что прямая c параллельна каждой из прямых a и b .

3631. (Признак параллельности плоскостей.) Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.

3632. Если две параллельные плоскости пересечь третьей, то прямые пересечения параллельны.

3633. Докажите, что через точку, не лежащую на плоскости, можно провести единственную плоскость, параллельную данной.

3634. Докажите, что две плоскости, параллельные третьей, параллельны между собой.

3635. Докажите, что плоскость, пересекающая одну из двух параллельных плоскостей, пересекает и другую.

3636. Докажите, что если две пересекающиеся плоскости параллельны некоторой прямой, то прямая их пересечения параллельна этой же прямой.

3637. Точки A , B , C и D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые AB и CD не пересекаются.

3638. Пусть A , B , C и D — четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что прямая AB параллельна плоскости, проходящей через середины отрезков AD , BD и CD .

3639. Пусть A , B , C и D — четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что плоскость, проходящая через середины отрезков AD , BD и CD , параллельна плоскости ABC .

3640. В пространстве проведены две параллельные прямые и пересекающие эти прямые две параллельные плоскости. Докажите, что четыре точки пересечения прямых и плоскостей служат вершинами параллелограмма.

3641. Пусть ABC — правильный треугольник, $BCKM$ — параллелограмм. Найдите угол между прямыми AB и KM .

3642. Найдите сумму всех плоских углов треугольной пирамиды.

3643. Докажите, что каждая прямая, лежащая в одной из двух параллельных плоскостей, параллельна другой плоскости.

3644. Пусть A, B, C и D — четыре точки в пространстве (рис. 150). Докажите, что середины отрезков AB, BC, CD и DA служат вершинами параллелограмма.

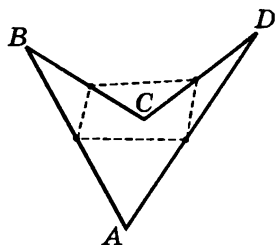


Рис. 150

3645. В основании пирамиды лежит многоугольник площади 6. Плоскость, параллельная основанию, делит высоту пирамиды в отношении $1:2$, считая от вершины. Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

3646. В пирамиде $ABCD$ угол ABC равен α . Найдите угол между прямыми, одна из которых проходит через середины ребер AC и BC , а другая — через середины ребер BD и CD .

3647. На одной из двух скрещивающихся прямых взяли различные точки A и A_1 , на другой — различные точки B и B_1 . Верно ли, что AB и A_1B_1 — скрещивающиеся прямые?

3648. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ и точку E , не лежащую в его

плоскости. Пусть плоскости ABE и CDE пересекаются по прямой l , а плоскости BCE и ADE — по прямой p . Найдите угол между прямыми l и p .

3649. Постройте изображение призмы $ABCA_1B_1C_1$, если даны изображения точек A, B, B_1 и C_1 .

3650. Постройте изображение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если даны изображения точек A, B, D и A_1 .

3651. Постройте изображение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если даны изображения точек A, B, C и D_1 .

3652. Пусть A — некоторая точка пространства, не лежащая в плоскости α , M — произвольная точка плоскости α . Найдите геометрическое место середин отрезков AM .

3653. Докажите, что если сечение параллелепипеда плоскостью является многоугольником с числом сторон, большим трех, то у этого многоугольника есть параллельные стороны.

3654. Основание пирамиды $SABCD$ — произвольный четырехугольник $ABCD$. Постройте прямую пересечения плоскостей ABS и CDS .

3655. Площадь основания пирамиды равна S . Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная плоскости основания. Найдите площадь полученного сечения.

3656. Известно, что M и N — точки пересечения медиан граней ABD и BCD тетраэдра $ABCD$ (рис. 151). Найдите MN , если $AC = a$.

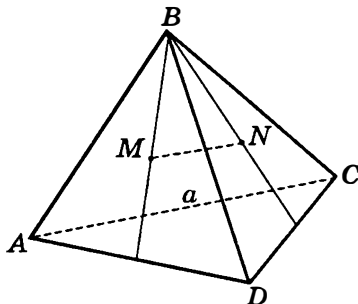


Рис. 151

3657. На ребрах AB , BC и BD пирамиды $ABCD$ взяты точки K , L и M соответственно. Постройте прямую пересечения плоскостей CDK и MLA .

3658. Сумма трех чисел, равных количеству вершин, ребер и граней некоторого многогранника, равна 102. Определите вид многогранника, если известно, что это либо пирамида, либо призма.

3659. Сумма трех чисел, равных количеству вершин, ребер и граней некоторого многогранника, равна 104. Определите вид многогранника, если известно, что это либо пирамида, либо призма.

3660. Постройте изображение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если даны изображения точек A , C , B_1 и D_1 .

3661. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Какая фигура получится в сечении этой пирамиды плоскостью ABM , где M — точка на ребре SC ?

3662. Прямые a и b пересекаются. Докажите, что все прямые, параллельные прямой b и пересекающие прямую a , лежат в одной плоскости.

3663. Найдите геометрическое место середин всех отрезков, концы которых лежат в двух параллельных плоскостях.

3664. Пусть A , B , C и D — четыре точки пространства, не лежащие на одной прямой. Докажите, что отрезок, соединяющий середины AB и CD , пересекается с отрезком, соединяющим середины AD и BC . При этом каждый из указанных отрезков делится точкой пересечения пополам.

3665. Разрежьте треугольную призму на три треугольные пирамиды.

3666. Может ли в сечении параллелепипеда плоскостью получиться правильный пятиугольник?

3667. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке.

3668. Точка M — середина ребра AD тетраэдра $ABCD$. Точка N лежит на продолжении ребра AB за точку B , точка K — на продолжении ребра AC за точку C , причем $BN = AB$ и $CK = AC$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK . В каком отношении эта плоскость делит ребра DB и DC ?

3669. Пусть M и N — точки пересечения медиан граней ABD и BCD тетраэдра $ABCD$. Найдите MN , если известно, что $AC = a$.

3670. Дан тетраэдр $ABCD$. В каком отношении плоскость, проходящая через точки пересечения медиан граней ABC , ABD и BCD , делит ребро BD ?

3671. Угол между противоположными ребрами AB и CD пирамиды $ABCD$ равен α , $AB = a$, $CD = b$. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра BC параллельно прямым AB и CD .

3672. Прямая a параллельна плоскости α . Прямая b , параллельная прямой a , проходит через точку M плоскости α . Докажите, что прямая b лежит в плоскости α .

3673. Даны три попарно пересекающиеся плоскости. Две из трех прямых пересечения этих плоскостей пересекаются в точке M . Докажите, что третья прямая проходит через точку M .

3674. Пусть A , B , C и D — четыре точки, не лежащие в одной плоскости. В каком отношении плоскость, проходящая через точки пересечения медиан треугольников ABC , ABD и BCD , делит отрезок BD ?

3675. Плоскость проходит через середины ребер AB и AC пирамиды $ABCD$ и делит ребро BD в отношении $1 : 3$. В каком отношении эта плоскость делит ребро CD ?

3676. Найдите угол между прямыми AC и BD , если расстояние между серединами отрезков AD и BC равно расстоянию между серединами отрезков AB и CD .

3677. На ребрах AB , BC и BD пирамиды $ABCD$ взяты точки K , L и M соответственно. Постройте точку пересечения плоскостей ACM , CDK и ADL .

3678. На ребрах AB , BC и BD пирамиды $ABCD$ взяты точки K , L и M соответственно. Постройте точку пересечения плоскостей AML , CKM и DKL .

3679. В пирамиде $ABCD$ площадь грани ABC в три раза больше площади грани ABD . На ребре CD взята точка M , причем $CM : MD = 2$. Через точку M проведены плоскости, параллельные граням ABC и ABD . Найдите отношение площадей получившихся сечений.

3680. Боковое ребро пирамиды разделено на 100 равных частей и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Найдите отношение площадей наибольшего и наименьшего из получившихся сечений.

3681. На боковом ребре AB пирамиды взяты точки K и M , причем $AK = BM$. Через эти точки проведены сечения, параллельные основанию пирамиды. Известно, что сумма площадей этих сечений составляет $\frac{2}{3}$ площади основания пирамиды. Найдите отношение $KM : AB$.

3682. В треугольной пирамиде $ABCD$ площади граней ABC и ABD равны 3 и 4. Через точку на ребре CD проведены плоскости, параллельные ABC и ABD и пересекающие пирамиду по равновеликим треугольникам. В каком отношении эта плоскость делит ребро CD ?

3683. Постройте изображение призмы $ABCA_1B_1C_1$, если даны изображения середин отрезков AA_1 , BC , CC_1 и A_1C_1 .

3684. Плоскость, проходящая через середины ребер AB и CD треугольной пирамиды $ABCD$, делит ребро AD в отношении 3 : 1, считая от вершины A . В каком отношении эта плоскость делит ребро BC ?

3685. В параллелепипеде $ABCA_1B_1C_1D_1$ проведен отрезок, соединяющий вершину A с серединой ребра CC_1 (рис. 152). В каком отношении этот отрезок делится плоскостью BDA_1 ?

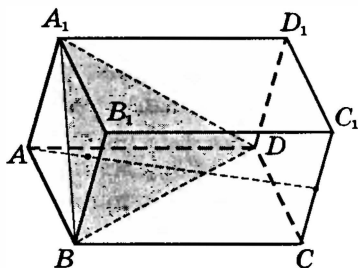


Рис. 152

3686. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точки M , N и K — середины ребер BC , AC и AB соответственно. Докажите, что прямые MA_1 , NB_1 и KC_1 пересекаются в одной точке.

3687. Через вершину C тетраэдра $ABCD$ и середины ребер AD и BD проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит отрезок MN , где M и N — середины ребер AB и CD соответственно?

3688. В призме $ABCA_1B_1C_1$ медианы оснований ABC и $A_1B_1C_1$ пересекаются соответственно в точках O и O_1 . Через середину отрезка OO_1 проведена прямая, параллельная прямой CA_1 . Найдите длину отрезка этой прямой, лежащего внутри призмы, если $CA_1 = a$.

3689. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$; M — середина AB , N — середина SC . В каком отношении плоскость BSD делит отрезок MN ?

3690. Точки M и N лежат на ребрах BC и AA_1 параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$. Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью основания $A_1B_1C_1D_1$.

3691. Постройте сечения треугольной пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через середины M и N ребер AC и BD и точку K ребра CD такую, что $CK : KD = 1 : 2$. В каком отношении эта плоскость делит ребро AB ?

3692. Докажите, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных плоскостей, пересекает и другую.

3693. В пространстве проведены три прямые, не лежащие в одной плоскости, но при этом никакие две не являются скрещивающимися. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку либо параллельны.

3694. Докажите, что через любую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость, параллельную другой прямой.

3695. Пусть A , B , C и D — четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Через точку пересечения медиан треугольника ABC проведена плоскость, параллельная прямым AB и CD . В каком отношении эта плоскость делит медиану, проведенную к стороне CD треугольника ACD ?

3696. На ребрах AB , CD и AC пирамиды $ABCD$ взяты точки K , M и Q соответственно. Постройте точку пересечения прямой KM с плоскостью BDQ .

3697. На ребрах AB , BC , CD , DA , BD и AC пирамиды $ABCD$ взяты точки K , L , M , P , N и Q соответственно. Постройте точку пересечения плоскостей ALM , CNP и DKQ .

3698. Точка K лежит на ребре AB пирамиды $ABCD$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K параллельно прямым BC и AD .

3699. Два противоположных ребра треугольной пирамиды равны a , два других противоположных ребра равны b , два оставшихся — c . Найдите косинус угла между ребрами, равными a .

3700. В тетраэдре $ABCD$ проведены медианы AM и DN граней ACD и ADB .

На этих медианах взяты соответственно точки E и F так, что EF параллельна BC . Найдите отношение $EF : BC$.

3701. Докажите, что диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проходит через точки пересечения медиан треугольников $A_1 BD$ и $CB_1 D_1$ и делится ими на три равные части.

3702. Основание четырехугольной пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$.

1) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра AB параллельно плоскости SAD .

2) Найдите площадь полученного сечения, если площадь грани SAD равна 16.

3703. Даны несколько прямых в пространстве, каждые две из которых пересекаются. Докажите, что либо все эти прямые лежат в одной плоскости, либо все проходят через одну точку.

3704. Рассмотрим две скрещивающиеся прямые a и b . Проведем через прямую a плоскость, параллельную b , а через b — плоскость, параллельную a . Возьмем точку M , не лежащую в проведенных плоскостях. Докажите, что две плоскости, одна из которых проходит через a и M , а вторая — через b и M , пересекаются по прямой, пересекающей прямые a и b .

3705. Плоскость проходит через середины ребер AB и CD пирамиды $ABCD$ и делит ребро BD в отношении $1 : 3$. В каком отношении эта плоскость делит ребро AC ?

3706. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На ребрах AD , $A_1 D_1$ и $B_1 C_1$ взяты соответственно точки M , L и K , причем $B_1 K = \frac{1}{3} A_1 L$, $AM = \frac{1}{2} A_1 L$.

Известно, что $KL = 2$. Найдите длину отрезка, по которому плоскость KLM пересекает параллелограмм $ABCD$.

3707. Найдите угол между прямыми AC и BD , если $AC = 6$, $BD = 10$, а рас-

стояние между серединами AD и BC равно 7.

3708. На ребрах AD , DC и BC пирамиды $ABCD$ взяты точки K , L и M соответственно. Постройте прямую, проходящую через точку M и пересекающую прямые BK и AL .

3709. В основании правильной треугольной пирамиды лежит треугольник площади S , площадь боковой грани равна Q . Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и середину противоположного ребра.

3710. Разрежьте куб на три равные четырехугольные пирамиды.

3711. Через точку на ребре треугольной пирамиды проведены две плоскости, параллельные двум граням пирамиды. Эти плоскости отсекают две треугольные пирамиды. Разрежьте оставшийся многогранник на две треугольные призмы.

3712. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на прямых AC и BA_1 взяты точки K и M так, что $KM \parallel DB_1$ (рис. 153). Найдите отношение $KM : DB_1$.

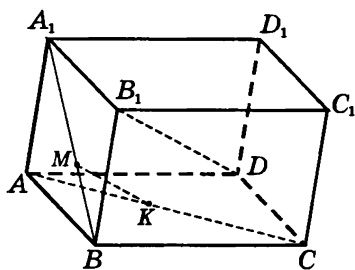


Рис. 153

3713. Через данную точку пространства проведите прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые.

3714. Докажите, что через данную точку можно провести единственную плоскость, параллельную двум данным скрещивающимся прямым.

3715. Докажите, что выпуклый четырехгранный угол можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

3716. Докажите, что медианы тетраэдра (отрезки, соединяющие вершины с точками пересечения медиан противоположащих граней) пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $3 : 1$, считая от вершины.

3717. Дан тетраэдр $ABCD$. Точки M , N и K лежат на ребрах AD , BC и DC соответственно, причем $AM : MD = 1 : 3$, $BN : NC = 1 : 1$ и $CK : KD = 1 : 2$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK . В каком отношении эта плоскость делит ребро AB ?

3718. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, основание которой — трапеция $ABCD$. Отношение оснований AD и BC этой трапеции равно 2. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку D и середины ребер SA и SB . В каком отношении эта плоскость делит ребро SC ?

3719. На ребрах AB , BC и AD тетраэдра $ABCD$ взяты точки K , N и M соответственно, причем $AK : KB = BN : NC = 2 : 1$, $AM : MD = 3 : 1$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K , M и N . В каком отношении эта плоскость делит ребро CD ?

3720. Пусть M — точка пересечения медиан основания ABC треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$; N и K — точки пересечения диагоналей граней $AA_1 C_1 C$ и $BB_1 C_1 C$ соответственно. Плоскость MNK пересекает прямые $B_1 C_1$ и CC_1 в точках P и Q соответственно. Постройте сечение призмы плоскостью MNK и найдите отношения $B_1 P : B_1 C_1$ и $C_1 Q : CC_1$.

3721. Через середины M и N ребер AD и CC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость параллельно диагонали DB_1 . Постройте сечение параллелепипеда этой плоскостью.

костью. В каком отношении она делит ребро BB_1 ?

3722. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, основание которой — параллелограмм $ABCD$. Точки M , N и K лежат на ребрах AS , BS и CS соответственно, причем $AM : MS = 1 : 2$, $BN : NS = 1 : 3$, $CK : KS = 1 : 1$. Постройте сечение пирамиды плоскостью MNK . В каком отношении эта плоскость делит ребро SD ?

3723. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, основание которой — параллелограмм $ABCD$. Через середину ребра AB проведите плоскость, параллельную прямым AC и SD . В каком отношении эта плоскость делит ребро SB ?

3724. Пусть M — точка пересечения медиан основания ABC треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$; N и K — точки пересечения диагоналей граней AA_1C_1C и BB_1C_1C соответственно. Плоскость MNK пересекает прямые B_1C_1 и CC_1 в точках P и Q соответственно. Постройте сечение призмы плоскостью MNK и найдите отношения $B_1P : B_1C_1$ и $C_1Q : CC_1$.

3725. Через середину ребра AB куба $ADCD A_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a , проведена плоскость, параллельная прямым BD_1 и A_1C_1 .

1) В каком отношении эта плоскость делит диагональ BD_1 ?

2) Найдите площадь полученного сечения.

3726. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Плоскость проведена через сторону AB и середину M бокового ребра SC .

1) Постройте сечение пирамиды этой плоскостью.

2) В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

3727. Три отрезка, не лежащие в одной плоскости, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам. Докажите, что существует ровно два тетра-

эдра, в которых эти отрезки соединяют середины противоположных ребер.

3728. Докажите, что сумма квадратов всех ребер тетраэдра равна учетверенной сумме квадратов расстояний между серединами его противоположных ребер.

3729. На диагоналях AB_1 и BC_1 грани параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ взяты точки M и N так, что отрезки MN и A_1C параллельны (рис. 154). Найдите отношение этих отрезков.

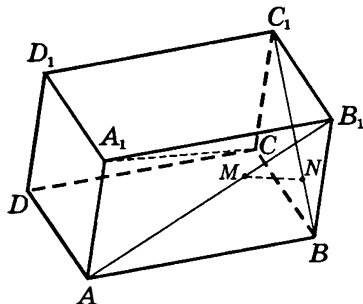


Рис. 154

3730. Сколько различных пирамид можно составить из шести отрезков длиной 1, 2, 2, 3, 3, 3 (эти отрезки равны ребрам пирамиды)?

3731. Рассмотрим две треугольные пирамиды, вершинами которых служат вершины данного параллелепипеда (каждая вершина параллелепипеда является вершиной одной пирамиды). Возможно ли, чтобы каждая вершина одной из пирамид принадлежала плоскости грани другой пирамиды, и наоборот?

3732. Укажите все точки на диагонали AC_1 параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$, через которые нельзя провести прямую, пересекающую прямые а) BC и DD_1 ; б) A_1B и B_1C .

3733. Постройте изображение параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$, если даны изображения середин отрезков AB_1 , BC_1 , CD и A_1D_1 .

3734. Докажите, что если суммы плоских углов при трех вершинах треугольной пирамиды равны по 180° , то все грани этой пирамиды — равные треугольники (т. е. пирамида является равногранной).

3735. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и N — середины боковых ребер AA_1 и CC_1 соответственно. На отрезках CM и AB_1 расположены соответственно точки E и F так, что $EF \parallel BM$. Найдите отношение $EF : BN$.

3736. Дан произвольный трехгранный угол. Рассматриваются три плоскости, каждая из которых проведена через ребро и биссектрису противоположащей грани. Верно ли, что эти три плоскости пересекаются по одной прямой?

3737. Постройте сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точки A_1 и C параллельно прямой BC_1 . В каком отношении эта плоскость делит ребро AB ?

3738. Через середины M и N ребер AD и CC_1 параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость параллельно диагонали DB_1 . Постройте сечение параллелепипеда этой плоскостью. В каком отношении она делит ребро BB_1 ?

3739. Точки M , N и K лежат на ребрах BC , AA_1 и C_1D_1 параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через эти точки.

3740. Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a . На лучах C_1C , C_1B_1 и C_1D_1 отложены соответственно отрезки C_1M , C_1N и C_1K , равные $\frac{5}{2}a$. Постройте сечение этого куба плоскостью, проходящей через точки M , N , K , и найдите площадь полученного сечения.

3741. Найдите геометрическое место середин отрезков с концами на двух заданных скрещивающихся прямых.

3742. В пирамиде $ABCD$ точки M , F и K — середины ребер BC , AD и CD соответственно. На прямых AM и CF взяты соответственно точки P и Q , причем $PQ \parallel BK$. Найдите отношение $PQ : BK$.

3743. В прямоугольнике $ABCD$ даны стороны $AB = 3$, $BC = 4$. Точка K удалена от точек A , B и C на расстояния, равные $\sqrt{10}$, 2 и 3 соответственно. Найдите угол между прямыми CK и BD .

3744. Постройте изображение параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$, если даны изображения вершин A , B и центров граней $A_1B_1C_1D_1$ и CDD_1C_1 .

3745. Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Точки M , N , K — середины ребер AB , BC и DD_1 соответственно. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью MNK . В каком отношении эта плоскость делит ребро CC_1 и диагональ DB_1 ?

3746. В тетраэдре $ABCD$ через середину M ребра AD , вершину C и точку N ребра BD такую, что $BN : ND = 2 : 1$, проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит отрезок, соединяющий середины ребер AB и CD ?

3747. На ребре AD и диагонали A_1C параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки M и N так, что прямая MN параллельна плоскости BDC_1 и $AM : AD = 1 : 5$. Найдите отношение $CN : CA_1$.

3748. На ребрах AB , BC , CD , DA и AC пирамиды $ABCD$ взяты точки K , L , M , P , N и Q соответственно. Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости KLM и PNQ .

3749. Точки K и M лежат на ребрах соответственно CD и AB пирамиды $ABCD$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки K и M параллельно прямой AD .

3750. Через точку пространства проведены четыре плоскости, никакие три из которых не имеют общей прямой. На сколько частей делят пространство эти

плоскости? Как называются образовавшиеся части пространства?

3751. Докажите, что квадрат может служить разверткой некоторой треугольной пирамиды.

3752. Плоскость пересекает ребра AB, AC, DC и DB тетраэдра $ABCD$ в точках M, N, P и Q соответственно, причем $AM:MB = m$, $AN:NC = n$, $DP:PC = p$. Найдите отношение $BQ:QB$.

3753. В тетраэдре $ABCD$ через середину M ребра AD , вершину C и точку N ребра BD такую, что $BN:ND = 2:1$, проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит отрезок KP , где K и P — середины ребер AB и CD соответственно?

3754. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и N — середины ребер BB_1 и CC_1 . Через точку O пересечения медиан треугольника ABC проведена прямая, пересекающая прямые MN и AB_1 в точках P и Q соответственно. Найдите отношение $PQ:OQ$.

3755. Постройте сечение треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через три точки, лежащие в трех гранях пирамиды.

3756. На трех гранях параллелепипеда взято по точке (рис. 155). Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через эти точки.

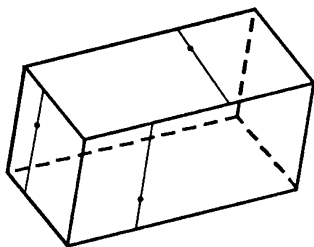


Рис. 155

3757. Докажите, что если у тетраэдра равны два противоположных ребра, а суммы плоских углов при двух вершинах равны по 180° , то все грани тетраэдра — равные треугольники.

3758. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды $ABCD$ с основанием ABC равен α . Правильная усеченная пирамида $ABCA_1B_1C_1$ разрезана по пяти ребрам: A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CA и AB , после чего эту пирамиду развернули на плоскость. При каких значениях α получившаяся развертка будет обязательно накрывать сама себя?

3759. На плоскости даны три луча с общим началом. Они делят плоскость на три тупых угла, внутри которых взято по точке. Постройте треугольник, вершины которого лежат на данных лучах, а стороны проходят через данные точки.

2. ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ПЛОСКОСТИ. ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

3760. Докажите, что прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.

3761. Боковые ребра пирамиды равны между собой. Докажите, что высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания.

3762. Докажите, что если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна некоторой плоскости, то и вторая прямая перпендикулярна этой плоскости.

3763. Докажите, что две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

3764. Докажите, что через данную точку можно провести единственную плоскость, перпендикулярную данной прямой.

3765. Докажите, что две различные плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

3766. Докажите, что если прямая перпендикулярна одной из двух па-

параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой.

3767. Докажите, что через данную точку можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной плоскости.

3768. (Теорема о трех перпендикулярах.) Докажите, что прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ортогональной проекции этой наклонной на данную плоскость.

3769. Докажите, что через одну из двух перпендикулярных скрещивающихся прямых можно провести единственную плоскость, перпендикулярную другой.

3770. (Необходимое и достаточное условия перпендикулярности плоскостей.) Докажите, что две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда одна из них проходит через прямую, перпендикулярную другой.

3771. Точка A лежит в плоскости α , ортогональная проекция отрезка AB на эту плоскость равна 1, $AB = 2$. Найдите расстояние от точки B до плоскости α .

3772. Верно ли утверждение, что две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны?

3773. Найдите диагональ единичного куба.

3774. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным a . Докажите, что AA_1 и BC — скрещивающиеся прямые, постройте их общий перпендикуляр и найдите расстояние между ними.

3775. Пусть A — некоторая точка пространства, B — ортогональная проекция точки A на плоскость α , l — некоторая прямая этой плоскости. Докажите, что ортогональные проекции точек A и B на эту прямую совпадают.

3776. Точка M находится на расстоянии a от плоскости α и на расстоянии b от некоторой прямой m этой плоскости. Пусть M_1 — ортогональная

проекция точки M на плоскость α . Найдите расстояние от точки M_1 до прямой m .

3777. В пирамиде $ABCD$ ребра AD , BD и CD равны 5, расстояние от точки D до плоскости ABC равно 4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

3778. Найдите расстояние от центра грани единичного куба до вершин противоположной грани.

3779. Высота прямоугольного треугольника ABC , опущенная на гипотенузу, равна 9,6. Из вершины C прямого угла восстановлен к плоскости треугольника ABC перпендикуляр CM , причем $CM = 28$. Найдите расстояние от точки M до гипотенузы AB .

3780. Точка M равноудалена от вершин треугольника ABC . Докажите, что ортогональная проекция точки M на плоскость ABC есть центр описанной около треугольника ABC окружности.

3781. Докажите, что в кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ прямые AC_1 и BD перпендикулярны (рис. 156).

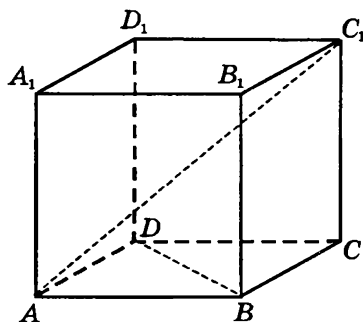


Рис. 156

3782. Все боковые ребра пирамиды равны b , а высота равна h . Найдите радиус описанной около основания окружности.

3783. Даны две неперпендикулярные скрещивающиеся прямые. Можно ли через одну из них провести плоскость, перпендикулярную другой?

3784. Известно, что некоторая точка M в пространстве равноудалена от вершин плоского многоугольника. Докажите, что этот многоугольник является вписанным, причем центр его описанной окружности есть ортогональная проекция точки M на плоскость многоугольника.

3785. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным a . Найдите площадь сечения этого куба плоскостью, проходящей через вершины C , B_1 и D_1 .

3786. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным a . Найдите площадь сечения этого куба плоскостью, проходящей через вершину C и середины ребер $C_1 B_1$ и $C_1 D_1$.

3787. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ диагонали AC и BD основания $ABCD$ пересекаются в точке M , причем $\angle AMB = \alpha$. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если $B_1 M = b$, $\angle BMB_1 = \beta$.

3788. Известно, что некоторая точка M равноудалена от двух пересекающихся прямых m и n . Докажите, что ортогональная проекция точки M на плоскость прямых m и n лежит на биссектрисе одного из углов, образованных прямыми m и n .

3789. Прямая l проходит через точку, лежащую на окружности с центром O и радиусом r . Известно, что ортогональной проекцией прямой l на плоскость окружности является прямая, касающаяся этой окружности. Найдите расстояние от точки O до прямой l .

3790. Все попарные расстояния между четырьмя точками в пространстве равны 1. Найдите расстояние от одной из этих точек до плоскости, определяемой тремя другими.

3791. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 13, а диагонали боковых граней равны $4\sqrt{10}$ и $3\sqrt{17}$. Найдите его объем.

3792. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным a . Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BD_1 и постройте их общий перпендикуляр.

3793. Верно ли, что в пространстве углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны или составляют в сумме 180° ?

3794. Найдите расстояние между серединами двух скрещивающихся ребер куба, полная поверхность которого равна 36.

3795. В треугольной пирамиде $ABCD$ найдите угол между прямыми AD и BC , если $AB = AC$ и $\angle DAB = \angle DAC$.

3796. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами a и b . Боковые ребра равны l . Найдите высоту пирамиды.

3797. Диагонали трех различных граней прямоугольного параллелепипеда равны m , n и p . Найдите диагональ параллелепипеда.

3798. Через диагональ куба, ребро которого равно a , проведена плоскость, параллельная диагонали одной из граней куба. Найдите площадь полученного сечения.

3799. Докажите, что прямая и плоскость параллельны, если они перпендикулярны одной и той же прямой.

3800. Через каждую вершину единичного куба проведены плоскости, перпендикулярные одной и той же диагонали куба. На какие части делится диагональ этими плоскостями?

3801. Точки A и B лежат в плоскости α , M — такая точка в пространстве, для которой $AM = 2$, $BM = 5$ и ортогональная проекция на плоскость α отрезка BM в три раза больше ортогональной проекции на эту плоскость отрезка AM . Найдите расстояние от точки M до плоскости α .

3802. В треугольной пирамиде $ABCD$ известно, что $AB = 2$, $BC = 3$, $BD = 4$, $AD = 2\sqrt{5}$, $CD = 5$ (рис. 157). Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости ABC .

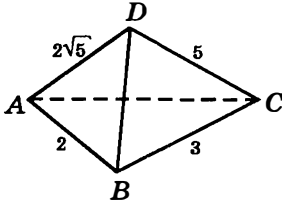


Рис. 157

3803. Расстояния от концов отрезка до плоскости равны 1 и 3. Чему может быть равно расстояние от середины этого отрезка до той же плоскости?

3804. Пусть A , B , C и D — четыре точки в пространстве. Докажите, что если $AB = BC$ и $CD = DA$, то прямые AC и BD перпендикулярны.

3805. В пирамиде $ABCD$ медиана, проведенная к стороне AD треугольника ABD , равна половине AD , а медиана, проведенная к стороне CD треугольника BCD , равна половине CD . Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости ABC .

3806. Докажите, что геометрическое место точек, равноудаленных от двух заданных точек пространства, есть плоскость, перпендикулярная отрезку с концами в этих точках и проходящая через середину этого отрезка.

3807. Ортогональные проекции отрезка на три попарно перпендикулярные прямые равны 1, 2 и 3. Найдите длину этого отрезка.

3808. Найдите расстояние между серединами непараллельных сторон разных оснований правильной треугольной призмы, все ребра которой равны 2.

3809. Пусть K , L и M — середины ребер соответственно AD , A_1B_1 и CC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в котором $AB = a$,

$AA_1 = b$, $AD = c$. Найдите отношение суммы квадратов сторон треугольника KLM к квадрату диагонали параллелепипеда.

3810. Даны скрещивающиеся прямые a и b и плоскость α , перпендикулярная прямой a и пересекающая ее в точке A . Докажите, что расстояние между прямыми a и b равно расстоянию от точки A до ортогональной проекции b' прямой b на плоскость α , а угол между прямыми b и b' дополняет до 90° угол между прямыми a и b .

3811. В правильной шестиугольной пирамиде, у которой боковые стороны — квадраты, проведите плоскость через сторону нижнего основания и противоположащую ей сторону верхнего основания. Найдите площадь построенного сечения, если сторона основания равна a .

3812. Даны три попарно перпендикулярные прямые. Четвертая прямая образует с данными прямыми углы α , β , γ соответственно. Докажите, что

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

3813. Докажите, что прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, перпендикулярна второй плоскости.

3814. Через точку, лежащую в одной из двух перпендикулярных плоскостей, проведена прямая, перпендикулярная второй плоскости. Докажите, что эта прямая лежит в первой плоскости.

3815. Высота треугольной пирамиды проходит через точку пересечения высот треугольника основания. Докажите, что противоположные ребра пирамиды попарно перпендикулярны.

3816. Верно ли, что высоты любого тетраэдра пересекаются в одной точке?

3817. Высоты, проведенные из вершин B и C тетраэдра $ABCD$, пересекаются. Докажите, что $AD \perp BC$.

3818. Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны a , b

и с. Найдите площадь его полной поверхности.

3819. Правильная треугольная пирамида рассечена плоскостью, перпендикулярной основанию и делящей две стороны основания пополам. Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если известно, что сторона основания равна 2, а высота пирамиды равна 4.

3820. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a . Пусть M — середина ребра $D_1 C_1$. Найдите периметр треугольника $A_1 D M$, а также расстояние от вершины D_1 до плоскости, проходящей через вершины этого треугольника.

3821. Можно ли расположить в пространстве четыре попарно перпендикулярные прямые?

3822. Точка M находится на расстояниях, равных 5 и 4, от двух параллельных прямых m и n и на расстоянии, равном 3, от плоскости, проходящей через эти прямые. Найдите расстояние между прямыми m и n .

3823. Все ребра треугольной пирамиды равны между собой. Найдите расстояние между медианой одной из ее граней и скрещающимся с этой медианой ребром пирамиды.

3824. Все плоские углы при вершине треугольной пирамиды — прямые. Докажите, что ортогональная проекция этой вершины на плоскость основания совпадает с точкой пересечения высот основания.

3825. Три отрезка, не лежащие в одной плоскости, имеют общую точку и делятся этой точкой пополам. Докажите, что концы этих отрезков служат вершинами параллелепипеда.

3826. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны a , b и c . Найдите углы между его диагоналями.

3827. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны a , b и c . Найдите угол между диагональю параллелепипеда и скрещающейся с ней диагональю грани со сторонами a и b .

3828. Расстояния от трех вершин параллелепипеда до противоположных граней равны 2, 3 и 4. Полная поверхность параллелепипеда равна 36. Найдите площади граней параллелепипеда.

3829. Каждое из боковых ребер пирамиды равно $\frac{269}{32}$. Основание пирамиды — треугольник со сторонами 13, 14, 15. Найдите объем пирамиды.

3830. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным a . Найдите расстояние между прямыми BD_1 и DC_1 и постройте их общий перпендикуляр.

3831. Существует ли четырехугольная пирамида, у которой две противоположные боковые грани перпендикулярны плоскости основания?

3832. Концы отрезка AB принадлежат граням двугранного угла, равного φ . Расстояния AA_1 и BB_1 от точек A и B до ребра двугранного угла равны a и b соответственно, $A_1 B_1 = c$. Найдите AB .

3833. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами a и b перегнули по диагонали BD так, что плоскости треугольников BAD и BCD стали взаимно перпендикулярны. Найдите AC .

3834. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a . Через одно из ребер основания проведена плоскость, перпендикулярная противоположному боковому ребру и делящая это ребро в отношении $m : n$, считая от вершины основания (рис. 158). Найдите полную поверхность пирамиды.

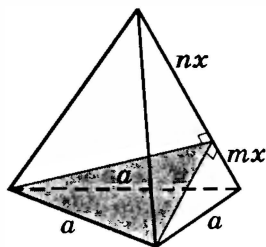


Рис. 158

3835. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведено сечение плоскостью, проходящей через середину M ребра AB , точку B_1 и точку K , лежащую на ребре AC и делящую его в отношении $AK : KC = 1 : 3$. Найдите площадь сечения, если известно, что сторона основания призмы равна a , а высота призмы равна $2a$.

3836. В прямом параллелепипеде $ABCA_1B_1C_1D_1$ с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 29$, $AD = 36$, $BD = 25$, $AA_1 = 48$. Найдите площадь сечения AB_1C_1D .

3837. Пусть проекция вершины A параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ на некоторую плоскость лежит внутри проекции на эту плоскость треугольника A_1BD . Докажите, что площадь проекции параллелепипеда в два раза больше площади проекции треугольника A_1BD .

3838. Дан единичный куб $ABCA_1B_1C_1D_1$, M — середина BB_1 . Найдите угол и расстояние между прямыми AB_1 и CM . В каком отношении общий перпендикуляр этих прямых делит отрезок CM ?

3839. Дан единичный куб $ABCA_1B_1C_1D_1$, M — середина BB_1 . Найдите угол и расстояние между прямыми A_1B и CM . В каком отношении общий перпендикуляр этих прямых делит отрезок CM ?

3840. Дан единичный куб $ABCA_1B_1C_1D_1$, M — середина BB_1 . Найдите угол и расстояние между прямыми AB_1 и DM . В каком отношении общий перпендикуляр этих прямых делит отрезок DM ?

3841. Через середину диагонали куба перпендикулярно ей проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения, если ребро куба равно a .

3842. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 и 8. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 6. Найдите расстояние между этим ребром и

скрещивающейся с ним диагональю основания, а также боковую поверхность пирамиды.

3843. Основанием пирамиды $SABCD$ является равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Плоскости граней SAB и SCD перпендикулярны плоскости основания пирамиды. Найдите высоту пирамиды, если высота грани SAD , проведенная из вершины S , равна $2a$.

3844. Известно, что в тетраэдре $ABCD$ ребро AB перпендикулярно ребру CD , а ребро BC перпендикулярно ребру AD . Докажите, что ребро AC перпендикулярно ребру BD .

3845. Докажите, что противоположные ребра тетраэдра $ABCD$ попарно перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

3846. Докажите, что все грани тетраэдра равны тогда и только тогда, когда отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, попарно перпендикулярны.

3847. Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник, сторона которого равна $2\sqrt{3}$. Основанием высоты, опущенной из вершины S , является точка O , лежащая внутри треугольника ABC . Расстояния от точки O до сторон AB , BC и CA находятся в отношении $2 : 1 : 3$. Площадь грани SAB равна $\frac{\sqrt{15}}{2}$. Найдите высоту пирамиды.

3848. Точка M равноудалена от трех прямых AB , BC и AC . Докажите, что ортогональная проекция точки M на плоскость ABC является центром вписанной окружности либо одной из невписанных окружностей треугольника ABC .

3849. Докажите, что если прямая p образует равные углы с тремя попарно пересекающимися прямыми плоскости, то прямая p перпендикулярна этой плоскости.

3850. В основании пирамиды $PABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 5$, $AD = DC = AC = 2$. Известно также, что $PB = 6$, а ребро PD является высотой пирамиды. Найдите PD .

3851. Дан единичный куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, M — середина BB_1 (рис. 159). Найдите угол и расстояние между прямыми AC_1 и DM . В каком отношении общий перпендикуляр этих прямых делит отрезок DM ?

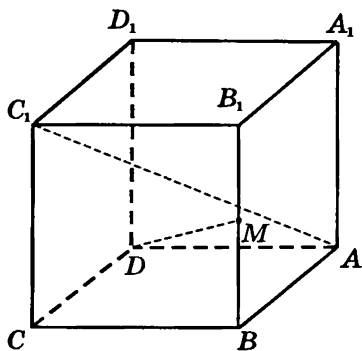


Рис. 159

3852. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром, равным 1, M — середина AB . Найдите угол и расстояние между прямыми AD и CM . В каком отношении общий перпендикуляр этих прямых делит отрезок CM ?

3853. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром, равным 1, M — середина AB , N — середина BC . Найдите угол и расстояние между прямыми CM и DN . В каком отношении общий перпендикуляр этих прямых делит отрезок DN ?

3854. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром, равным 1, M — середина AB , K — середина CD . Найдите угол и расстояние между прямыми CM и BK . В каком отношении общий перпендикуляр этих прямых делит отрезок CM ?

3855. На продолжении ребра SE за точку E правильной четырехугольной пирамиды $SEFGH$ с вершиной S взята

точка Q так, что $EQ = 5$. Найдите расстояние от точки Q до плоскости SFG , если $GH = 20$, $SH = 15$.

3856. Докажите, что прямая пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей, перпендикулярна третьей плоскости.

3857. В тетраэдре $ABCD$ известно, что $AD \perp BC$. Докажите, что высоты тетраэдра, проведенные из вершин B и C , пересекаются, причем точка их пересечения лежит на общем перпендикуляре скрещивающихся прямых AD и BC .

3858. В пирамиде $ABCD$ даны ребра: $AB = 7$, $BC = 8$, $CD = 4$. Найдите ребро DA , если известно, что прямые AC и BD перпендикулярны.

3859. Два ребра прямоугольного параллелепипеда равны 1 и 2. Плоскость, параллельная этим ребрам, делит параллелепипед на два неравных, но подобных между собой параллелепипеда. Найдите ребро, не параллельное данным.

3860. Дано изображение призмы $ABCA_1 B_1 C_1$. Постройте изображение точки M пересечения плоскостей $A_1 BC$, $AB_1 C$ и ABC_1 . Пусть высота призмы равна h . Найдите расстояние от точки M до оснований призмы.

3861. Основание четырехугольной пирамиды $PABCD$ — параллелограмм $ABCD$, M — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на BD . Известно, что $BP = DP$. Докажите, что расстояние от точки M до середины ребра AP равно половине ребра CP .

3862. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ равна a , точки O и O_1 — центры оснований ABC и $A_1 B_1 C_1$ соответственно. Проекция отрезка AO_1 на прямую $B_1 O$ равна $\frac{5a}{6}$. Найдите высоту призмы.

3863. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным a . Найдите расстояние между прямыми $A_1 D$ и $D_1 C$ и постройте их общий перпендикуляр.

3864. Через середину диагонали куба проведена плоскость, перпендикулярная этой диагонали. Найдите площадь полученного сечения, если ребро куба равно a .

3865. Основание пирамиды — треугольник со сторонами 10, 13, 13. Площади боковых граней соответственно равны 150, 195, 195. Найдите высоту пирамиды.

3866. В правильной четырехугольной призме проведены два параллельных сечения: одно проходит через середины двух смежных сторон основания и середину оси, другое делит ось в отношении 1 : 3. Зная, что площадь первого сечения равна 12, найдите площадь второго.

3867. Расстояния от вершин треугольника до некоторой плоскости равны 5, 6 и 7. Найдите расстояние от точки пересечения медиан этого треугольника до той же плоскости. Укажите все возможности.

3868. Пусть A, B, C и D — четыре точки в пространстве, для которых $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$. Докажите, что прямые AC и BD перпендикулярны.

3869. Докажите, что если ортогональная проекция одной из вершин треугольной пирамиды на плоскость противоположной грани совпадает с точкой пересечения высот этой грани, то это же будет иметь место для любой другой вершины пирамиды.

3870. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ — прямоугольник, $SA = 2$, $SB = 3$, $SC = 4$. Найдите SD .

3871. В треугольной пирамиде $SBCD$ угол BCD — прямой, $SB = 4$, $SC = 5$, $SD = 6$. Найдите расстояние от вершины S до точки A такой, что $ABCD$ — прямоугольник.

3872. В равнобедренной трапеции $PQRS$ ($QR \parallel PS$) известны стороны $QR = 1$, $PS = 4$. Точки P', Q', R', S' лежат по одну сторону от плоскости трапеции, причем прямые PP', QQ', RR', SS' перпендикулярны этой плоскости,

$PP' = 1$, $QQ' = 7$, $RR' = 2$, $SS' = 1$. Точки K' и L' лежат на прямых $P'R'$ и $Q'S'$ соответственно. Найдите отрезок $K'L'$, если $P'K' : K'R' = 3 : 2$, $Q'L' : L'S' = 2 : 3$.

3873. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$. Точка S — вершина пирамиды, $AB = 1$, $AS = 2$, BM — медиана треугольника ABC , AD — биссектриса треугольника SAB . Найдите отрезок DM .

3874. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$. Точка S — вершина пирамиды, $SA = 2\sqrt{3}$, $BC = 3$, BM — медиана основания пирамиды, AR — высота треугольника ASB . Найдите отрезок MR .

3875. Ребро куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ равно 12. Точка K лежит на продолжении ребра BC на расстоянии, равном 9, от вершины C (рис. 160). Точка L ребра AB удалена от A на расстояние, равное 5. Точка M делит отрезок A_1C_1 в отношении 1 : 3, считая от A_1 . Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точки K, L, M .

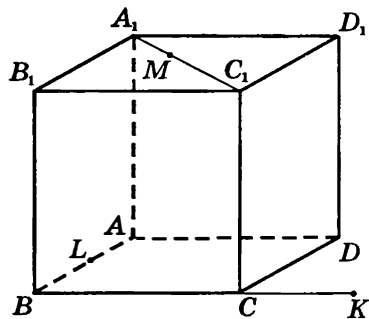


Рис. 160

3876. Докажите, что все грани тетраэдра равны тогда и только тогда, когда точка пересечения медиан и центр описанной сферы совпадают.

3877. В треугольной пирамиде боковые грани DBC и DCA взаимно перпендикулярны и представляют собой равные равнобедренные треугольники с основанием $CD = 2$ и боковой сторо-

ной, равной $\sqrt{19}$. Найдите ребро AB , а также площади тех сечений пирамиды, которые являются квадратами.

3878. Расстояния от подряд идущих вершин параллелограмма до некоторой плоскости равны 1, 3 и 5. Найдите расстояние от четвертой вершины до этой плоскости.

3879. На ребрах A_1B_1 и A_1D_1 единичного куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки K и M так, что $A_1K = A_1M = x$. Найдите x , если известно, что при повороте куба вокруг диагонали AC_1 на угол α точка K переходит в точку M .

3880. Дан куб $ABCD A_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a . Точка E — середина ребра AD . Вершины M и N правильно тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой ED_1 , а вершины P и Q — на прямой, проходящей через точку A_1 и пересекающей прямую BC в точке R . Найдите:

а) отношение $BR : BC$;

б) расстояние между серединами отрезков MN и PQ .

3881. Основание четырехугольной пирамиды — квадрат, а все боковые грани — прямоугольные треугольники, у которых вершины прямых углов лежат на основании пирамиды. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна 1, а один из двугранных углов при вершине равен 120° .

3882. На прямой l в пространстве последовательно расположены точки A , B и C так, что $AB = 18$ и $BC = 14$. Найдите расстояние между прямыми l и m , если расстояния от точек A , B и C до прямой m равны 12, 15 и 20 соответственно.

3883. Тетраэдр называется ортоцентрическим, если его высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Докажите, что тетраэдр $ABCD$ ортоцентрический тогда и только тогда, когда две пары его противоположных ребер перпендикулярны,

т. е. $AB \perp CD$ и $AD \perp BC$ (в этом случае ребра третьей пары также перпендикулярны, т. е. $AC \perp BD$).

3884. Противоположные ребра тетраэдра попарно перпендикулярны. Докажите, что общие перпендикуляры каждой пары противоположных ребер пересекаются в одной точке.

3885. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре общие перпендикуляры каждой пары противоположных ребер пересекаются в одной точке.

3886. Высота пирамиды $ABCD$, опущенная из вершины D , проходит через точку пересечения высот треугольника ABC . Кроме того, известно, что $DB = b$, $DC = c$, $\angle BDC = 90^\circ$. Найдите отношение площадей граней ADB и ADC .

3887. В основании пирамиды $SABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, у которого стороны AD и BC параллельны, сторона AB равна 4, сторона BC равна 8, а угол ABC равен 60° .

Ребро SB равно $8\sqrt{2}$. Найдите объем пирамиды, если известно, что через прямые AD и BC можно провести две плоскости, не совпадающие с основанием пирамиды и пересекающие пирамиду по равным четырехугольникам.

3888. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны a , b и c ($a < b < c$). Некоторое его сечение является квадратом. Найдите сторону этого квадрата.

3889. Прямая l , параллельная диагонали AC_1 единичного куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$, равноудалена от прямых BD , A_1D_1 и CB_1 . Найдите расстояния от прямой l до этих прямых.

3890. Дана треугольная пирамида $ABCD$ с вершиной D , грани которой ABD и ACD — прямоугольные треугольники, ребро AD перпендикулярно медиане AK основания ABC и $AD = AK$. Сечением пирамиды плоскостью, не проходящей через середины ребер AD и BC , является равнобедренная трапеция $EFGH$ с основаниями EF

и GH , причем точка E делит ребро BD пополам, а точка G лежит на ребре AC и $AG = 3GC$. Найдите отношение площади трапеции $EFGH$ к площади основания ABC .

3891. Из точки вне окружности проведены касательные и секущая, причем точки касания и точки пересечения секущей с окружностью являются вершинами некоторой трапеции. Найдите отношение оснований трапеции, если известно, что угол между касательными равен 60° .

3892. Докажите, что все грани тетраэдра равны тогда и только тогда, когда площади всех граней равны.

3893. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , апофема равна $\frac{3a}{2}$. Ортогональной проекцией пирамиды на плоскость, перпендикулярную одной из боковых граней, является равнобедренная трапеция. Найдите площадь этой трапеции.

3894. Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со сторонами, равными 2. Найдите периметр четырехугольника, зная, что одна из его сторон равна $\sqrt{5}$.

3895. В правильном тетраэдре точки M и N — середины противоположных ребер. Ортогональной проекцией тетраэдра на плоскость, параллельную прямой MN , является четырехугольник с площадью S , один из углов которого равен 60° . Найдите площадь поверхности тетраэдра.

3. УГОЛ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ. УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

3896. Докажите, что площадь ортогональной проекции плоского многоугольника на некоторую плоскость равна площади проецируемого многоугольника, умноженной на косинус

угла между плоскостью проекций и плоскостью проецируемого многоугольника.

3897. Боковые грани треугольной пирамиды образуют равные углы с плоскостью основания. Докажите, что высота пирамиды проходит либо через центр окружности, вписанной в треугольник основания, либо через центр одной из вневписанных окружностей этого треугольника.

3898. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) известно, что $AB = 4$, $\angle A = 60^\circ$. Найдите BC , AC .

3899. Какие углы образует диагональ куба с его гранями?

3900. Угол между плоскостями равен α . Найдите площадь ортогональной проекции правильного шестиугольника со стороной, равной 1, лежащего в одной из плоскостей, на другую плоскость.

3901. Нарисуйте изображение куба, полученное в результате ортогонального проецирования куба на плоскость, перпендикулярную: а) одному из ребер; б) диагонали одной из граней.

3902. Площадь треугольника ABC равна 2. Найдите площадь сечения пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через середины ребер AD , BD , CD (рис. 161).

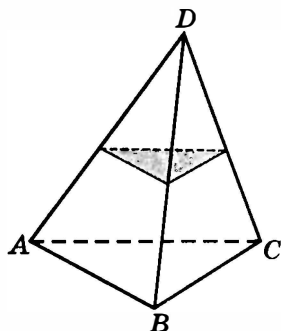


Рис. 161

3903. Обязательно ли будут параллельными две плоскости, перпендикулярные одной и той же плоскости?

3904. Пусть A — некоторая точка в пространстве, A_1 — проекция точки A на плоскость α , $AA_1 = a$. Через точку A проходит плоскость, образующая угол φ с плоскостью α и пересекающая плоскость α по прямой l . Найдите расстояние от точки A_1 до прямой l .

3905. В пирамиде $ABCD$ угол ABC равен α , ортогональная проекция точки D на плоскость ABC есть точка B . Найдите угол между плоскостями ABD и CBD .

3906. Все ребра пирамиды $ABCD$ равны между собой. Нарисуйте изображение пирамиды $ABCD$, полученное в результате ортогонального проектирования на плоскость: а) ABC ; б) перпендикулярную AB ; в) параллельную AB и CD .

3907. Докажите, что если боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы, то в основании лежит вписанный многоугольник, а высота пирамиды проходит через центр описанной окружности этого многоугольника.

3908. Прямая l образует угол, равный α , с плоскостью P . Найдите ортогональную проекцию на плоскость P отрезка, равного d и расположенного на прямой l .

3909. В пирамиде $ABCD$ грань ABC — правильный треугольник со стороной, равной a , $AD = BD = CD = b$. Найдите косинус угла, образованного прямыми AD , BD и CD с плоскостью ABC .

3910. Пусть прямая p перпендикулярна плоскости π . Докажите, что углы, образованные произвольной прямой l с плоскостью π и прямой p , дополняют друг друга до 90° .

3911. В одной из граней двугранного угла, равного φ , взята точка A на расстоянии, равном a , от ребра. Найдите расстояние от точки A до плоскости другой грани.

3912. Стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Найдите площадь ортогональной проекции треугольника на плоскость, которая образует с плоскостью треугольника угол, равный наименьшему углу этого треугольника.

3913. Найдите двугранные углы пирамиды $ABCD$, все ребра которой равны между собой.

3914. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4, проведена медиана к боковой стороне. Найдите основание треугольника, если медиана равна 3.

3915. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна 5. Найдите боковые стороны.

3916. Основание правильной треугольной пирамиды расположено в грани куба, одна из сторон основания совпадает с ребром куба, а вершина пирамиды лежит в противоположной грани куба. Найдите угол боковой грани пирамиды с плоскостью ее основания.

3917. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите углы между прямыми: а) AA_1 и BD_1 ; б) BD_1 и DC_1 ; в) AD_1 и DC_1 .

3918. Плоскость прямоугольного треугольника с катетами, равными 3 и 4, образует с плоскостью P угол, равный α . Гипотенуза этого треугольника лежит в плоскости P . Найдите угол между меньшим катетом и плоскостью P .

3919. Стороны прямоугольника равны 1 и 2. Меньшая сторона прямоугольника лежит в плоскости P , а диагональ прямоугольника образует с плоскостью P угол, равный α . Найдите угол между плоскостью прямоугольника и плоскостью P .

3920. Дан трехгранный угол. Рассмотрим три плоскости, содержащие его грани. Эти плоскости разбивают пространство на восемь трехгранных углов.

а) Найдите плоские углы всех образовавшихся трехгранных углов, если

плоские углы исходного трехгранного угла равны x , y и z .

б) Найдите двугранные углы всех образовавшихся трехгранных углов, если двугранные углы исходного трехгранного угла равны α , β и γ .

3921. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и образует с плоскостью основания угол, равный α . Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площадь его основания равна S .

3922. Рассмотрим всевозможные прямые, проходящие через точку A , не принадлежащую плоскости π , и образующие равные углы с этой плоскостью (углы, отличные от нуля). Найдите геометрическое место точек пересечения этих прямых с плоскостью π .

3923. Пусть A — некоторая точка в пространстве, не принадлежащая плоскости α . Рассмотрим всевозможные плоскости, проходящие через точку A и образующие один и тот же угол с плоскостью α . Докажите, что все прямые, по которым плоскости, проходящие через точку A , пересекаются с плоскостью α , касаются одной окружности.

3924. На плоскости отмечены три точки, служащие изображениями (параллельными проекциями) трех последовательных вершин правильного шестиугольника. Постройте изображения остальных вершин шестиугольника.

3925. Ребро BD пирамиды $ABCD$ перпендикулярно плоскости ADC . Докажите, что сечением этой пирамиды плоскостью, проходящей через точку D и середины ребер AB и BC , является треугольник, подобный треугольнику ABC . Чему равен коэффициент подобия?

3926. Все плоские углы трехгранного угла равны по 60° . Найдите углы, образованные ребрами этого трехгран-

ного угла с плоскостями противоположных граней.

3927. В основании пирамиды лежит многоугольник с периметром $2p$, двугранные углы при основании равны α , высота пирамиды h . Найдите ее объем.

3928. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c , и углом 30° (рис. 162). Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45° . Найдите объем пирамиды.

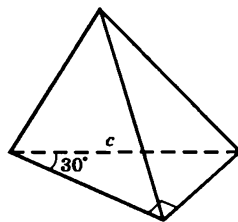


Рис. 162

3929. Высота прямой призмы 1 , ее основанием служит ромб со стороной 2 и острым углом 30° . Через сторону основания проведена секущая призма плоскость, наклоненная к плоскости основания под углом 60° . Найдите площадь сечения.

3930. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ грань $ABCD$ — квадрат со стороной 5 . Ребро AA_1 также равно 5 и образует с ребрами AB и AD углы, равные 60° . Найдите диагональ BD_1 .

3931. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб, сторона которого равна 60 . Плоскость диагонального сечения, проходящая через большую диагональ основания, перпендикулярна плоскости основания. Площадь этого сечения равна 7200 . Найдите меньшую диагональ основания, если боковое ребро равно 80 и образует с плоскостью основания угол 60° .

3932. На плоскости α даны три точки A , B и C , не лежащие на одной прямой. Пусть M — такая точка в пространстве, что прямые MA , MB и MC образуют равные углы с плоскостью α . Найдите геометрическое место точек M .

3933. Отрезки AD , BD и CD попарно перпендикулярны. Известно, что площадь треугольника ABC равна S , а площадь треугольника ABD равна Q . Найдите площадь ортогональной проекции треугольника ABD на плоскость ABC .

3934. Из точки M , расположенной внутри двугранного угла, равного φ , опущены перпендикуляры на его грани (имеются в виду лучи, выходящие из точки M). Докажите, что угол между этими перпендикулярами равен $180^\circ - \varphi$.

3935. Все плоские углы при вершине D пирамиды $ABCD$ равны 90° , $DA = 1$, $DB = DC = \sqrt{2}$. Найдите двугранные углы этой пирамиды.

3936. В плоскости одной из граней двугранного угла взята фигура F . Площадь ортогональной проекции этой фигуры на другую грань равна S , а площадь ее ортогональной проекции на биссекторную плоскость равна Q . Найдите площадь фигуры F .

3937. На плоскости нарисована линия, являющаяся изображением (параллельной проекцией на некоторую плоскость) окружности. Постройте изображение центра этой окружности.

3938. На плоскости даны изображение (параллельная проекция) плоского четырехугольника $ABCD$ и точки M , не лежащей в его плоскости. Постройте изображение прямой, по которой пересекаются плоскости ABM и CDM .

3939. Докажите, что сечением пирамиды $ABCD$ плоскостью, параллельной ребрам AC и BD , является па-

раллелограмм, причем для одной такой плоскости этот параллелограмм будет ромбом. Найдите сторону этого ромба, если $AC = a$, $BD = b$.

3940. Найдите двугранные углы трехгранного угла, плоские углы которого равны 90° , 90° и α .

3941. Все плоские углы трехгранного угла равны 90° . Найдите углы между биссектрисами плоских углов.

3942. Три последовательные стороны основания четырехугольной пирамиды равны 5, 7 и 8. Найдите четвертую сторону основания, если известно, что двугранные углы при основании равны.

3943. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с его ребрами углы α , β и γ . Докажите, что

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

3944. В прямоугольном параллелепипеде диагональ, равная d , образует с боковыми гранями углы β и γ . Найдите объем параллелепипеда.

3945. Высота правильной треугольной пирамиды в два раза больше радиуса окружности, описанной около ее основания. Объем пирамиды равен 36. Найдите сторону основания пирамиды.

3946. Высота правильной четырехугольной пирамиды в два раза меньше ее апофемы. Объем пирамиды равен 108. Найдите высоту пирамиды.

3947. Основание пирамиды — прямоугольник с диагональю, равной b , и углом в 60° между диагоналями. Каждое из боковых ребер образует с плоскостью основания угол 45° . Найдите объем пирамиды.

3948. На перпендикуляре к плоскости прямоугольника $ABCD$, проходящем через точку A , взята точка P , отличная от A . Докажите, что:

а) плоскость APB перпендикулярна плоскости APD ;

б) плоскость APB перпендикулярна плоскости BPC ;

в) плоскость APD перпендикулярна плоскости DPC .

3949. Основание призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равносторонний треугольник ABC со стороной, равной a . Ортогональная проекция вершины A_1 совпадает с центром основания ABC , а боковое ребро образует с плоскостью основания угол, равный 60° . Найдите боковую поверхность призмы.

3950. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с гипотенузой $AB = a$. На каком расстоянии от плоскости ABC находится точка M , если известно, что прямые MA , MB и MC образуют с плоскостью углы, равные α .

3951. Найдите сумму углов, которые произвольная прямая образует с плоскостью и прямой, перпендикулярной этой плоскости.

3952. Через стороны равностороннего треугольника проведены три плоскости, образующие угол, равный α , с плоскостью этого треугольника и пересекающиеся в точке, удаленной на расстояние, равное d , от плоскости треугольника. Найдите радиус окружности, вписанной в данный равносторонний треугольник.

3953. Найдите двугранные углы пирамиды $ABCD$, в которой $AB = BC = CA = a$, $AD = BD = CD = b$ (рис. 163).

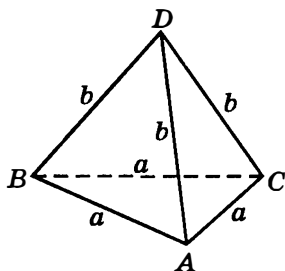


Рис. 163

3954. В пирамиде $ABCD$ двугранные углы с ребрами AB , BC и CA равны α_1 , α_2 и α_3 , а площади треугольников

ABD , BCD и CAD равны соответственно S_1 , S_2 и S_3 . Площадь треугольника ABC равна S . Докажите, что

$$S = S_1 \cos \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2 + S_3 \cos \alpha_3$$

(некоторые из углов α_1 , α_2 и α_3 могут быть тупыми).

3955. Площадь ортогональной проекции круга радиуса, равного 1, на плоскость α равна 1. Найдите длину ортогональной проекции этого круга на прямую, перпендикулярную плоскости α .

3956. Плоские углы при вершине D пирамиды $ABCD$ равны 90° . Обозначим через S_1 , S_2 , S_3 и Q площади граней ABD , BCD , CDA и ABC , через α , β и γ — двугранные углы при ребрах AB , BC и AC .

1) Выразите α , β и γ через S_1 , S_2 , S_3 и Q .

2) Докажите, что

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = Q^2.$$

3) Докажите, что

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

3957. Все ребра пирамиды $ABCD$ равны между собой. Нарисуйте изображение пирамиды $ABCD$, полученное в результате ортогонального проектирования на плоскость, параллельную AB и CD .

3958. В основании треугольной пирамиды лежит правильный треугольник. Высота пирамиды равна h . Все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α . Найдите площадь основания. (Укажите все возможности.)

3959. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковое ребро равно b . Найдите высоту пирамиды и двугранный угол между боковыми гранями.

3960. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 7, 8, 9. Боковые ребра пирамиды наклонены

к плоскости основания под углом 60° . Найдите высоту пирамиды.

3961. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Через прямую BD_1 проведена плоскость, параллельная прямой AC . Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания параллелепипеда, если $AB = a$, $BC = b$, $CC_1 = c$.

3962. В треугольной пирамиде $SABC$ высота SO проходит через точку O — центр круга, вписанного в основание ABC пирамиды. Известно, что $\angle SAC = 60^\circ$, $\angle SCA = 45^\circ$, а отношение площади треугольника AOB к площади треугольника ABC равно $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$.

Найдите угол BSC .

3963. В четырехугольной пирамиде $OABCD$ плоскости боковых граней OAB , OBC , OCD , OAD образуют с плоскостью основания углы, равные соответственно 60° , 90° , 45° , 90° . Основание $ABCD$ — равнобедренная трапеция, ребро AB равно 2, площадь основания равна 2. Найдите поверхность пирамиды.

3964. Через вершину O треугольной пирамиды $OABC$ проведено сечение, пересекающее ребра AB и AC в точках D и E . Грани OAB и OAC перпендикулярны основанию, объем пирамиды равен 16, ребро OA равно 4, ребро BC равно 4, площадь сечения равна 5. Найдите DE .

3965. Найдите сторону правильного треугольника, являющегося ортогональной проекцией треугольника со сторонами, равными $\sqrt{6}$, 3 и $\sqrt{14}$, на некоторую плоскость.

3966. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45° . Чему может быть равна высота пирамиды?

3967. Основанием пирамиды $SABC$ является прямоугольный треуголь-

ник ABC (C — вершина прямого угла). Все боковые грани пирамиды наклонены к ее основанию под одинаковым углом, равным $\arcsin \frac{5}{13}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если SO — высота пирамиды, $AO = 1$, $BO = 3\sqrt{2}$.

3968. Угол наклона всех боковых граней пирамиды $SABC$ одинаков и равен $\arctg \sqrt{2}$. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$); SO — высота пирамиды. Найдите боковую поверхность пирамиды, если $OB = \sqrt{5}$, а радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 1.

3969. В правильной треугольной пирамиде $SKLM$ площадь сечения, проходящего через боковое ребро SK и высоту SO , в два раза больше площади основания пирамиды. Боковое ребро равно $\sqrt{13}$. Найдите площадь боковой грани пирамиды.

3970. Через биссектрису прямого угла прямоугольного треугольника проведена плоскость, которая образует с плоскостью треугольника угол α . Какие углы эта плоскость образует с катетами треугольника?

3971. Каждая из боковых граней треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол в 60° . Стороны основания равны 10, 10, 12. Найдите объем пирамиды.

3972. Основание пирамиды — ромб с острым углом в 30° . Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом в 60° . Найдите объем пирамиды, если радиус вписанного в ромб круга равен r .

3973. В плоскости α проведены две перпендикулярные прямые. Прямая l образует с ними углы, равные 45° и 60° . Найдите угол прямой l с плоскостью α .

3974. Дано изображение (параллельная проекция на некоторую плоскость) треугольника и центра описанной около него окружности. Постройте изображение точки пересечения высот этого треугольника.

3975. Каждое из ребер треугольной пирамиды $ABCD$ равно 1. Точка P на ребре AB , точка Q на ребре BC и точка R на ребре CD взяты так, что $AP = \frac{1}{2}$,

$BQ = CR = \frac{1}{3}$. Плоскость PQR пересекает прямую AD в точке S . Найдите угол между прямыми SP и SQ .

3976. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной b ($a < b$). Известно, что ее боковые ребра равны, а боковые грани равновелики. Найдите боковое ребро пирамиды.

3977. Основание пирамиды — параллелограмм $ABCD$ с площадью m^2 . Известно, что BD перпендикулярно AD . Двугранные углы при ребрах AD и BC равны 45° , а при ребрах AB и CD — 60° . Найдите боковую поверхность и объем пирамиды.

3978. Косинус угла между скрещивающимися прямыми AB и CD равен $\frac{\sqrt{35}}{10}$. Точки E и F являются серединами отрезков AB и CD соответственно, а прямая EF перпендикулярна прямым AB и CD . Найдите угол ACB , если известно, что $AB = 2\sqrt{5}$, $CD = 2\sqrt{7}$, $EF = \sqrt{13}$.

3979. В пространстве взяты точки A, B, C и D , для которых $AD = BD = CD$, $\angle ADB = 90^\circ$, $\angle ADC = 50^\circ$, $\angle BDC = 140^\circ$. Найдите углы треугольника ABC .

3980. Все двугранные углы при основании пирамиды равны α , а углы, образуемые боковыми ребрами с плоскостью основания, равны β . Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = k \operatorname{tg} \beta$. Сколько сторон имеет основание пирамиды, если $k = 2$? Ка-

кие значения может принимать величина k ?

3981. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$) угол между прямыми AC_1 и A_1B равен α , $AA_1 = 2$ (рис. 164). Найдите AB .

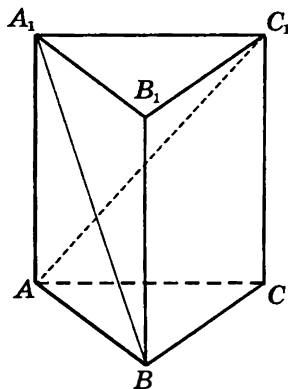


Рис. 164

3982. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S проведена высота SD . На отрезке SD взята точка K так, что $SK : KD = 1 : 2$. Известно, что двугранные углы между основанием и боковыми гранями равны $\frac{\pi}{6}$, а расстояние от точки K до бокового ребра равно $\frac{4}{\sqrt{13}}$. Найдите объем пирамиды.

3983. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S проведена высота SD . На отрезке SD взята точка K так, что $SK : KD = 1 : 3$. Известно, что боковые ребра образуют с основанием угол $\frac{\pi}{6}$, а расстояние от точки K до боковой грани равно $\frac{3}{\sqrt{7}}$. Найдите

объем пирамиды.

3984. Высота правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) в $\sqrt{3}$ раз больше ребра основания. Точка E — середина апофе-

мы, лежащей в грани ASB . Найдите угол между прямой DE и плоскостью ASC .

3985. Угол между скрещивающимися прямыми AB и CD равен $\arccos \frac{\sqrt{35}}{10}$. Точки E и F являются серединами отрезков AB и CD соответственно, а прямая EF перпендикулярна прямым AB и CD . Найдите угол ACB , если известно, что $AB = 2\sqrt{5}$, $CD = 2\sqrt{7}$ и $EF = \sqrt{13}$.

3986. Ортогональной проекцией равнобедренного прямоугольного треугольника на плоскость α является правильный треугольник. Найдите угол, образованный гипотенузой данного треугольника с плоскостью α .

3987. Пусть ABC — равносторонний треугольник. Через прямые AB , BC и AC проходят три плоскости, образующие угол, равный φ , с плоскостью ABC и пересекающиеся в точке D_1 . Кроме того, через эти же прямые проходят плоскости, образующие угол, равный 2φ , с плоскостью ABC и пересекающиеся в точке D_2 . Найдите φ , если известно, что точки D_1 и D_2 находятся на равных расстояниях от плоскости ABC .

3988. Нарисуйте изображение куба, полученное в результате ортогонального проецирования куба на плоскость, перпендикулярную диагонали куба.

3989. В правильной четырехугольной пирамиде $ABCDP$ угол между боковым ребром PA и плоскостью основания $ABCD$ равен углу между ребром PA и плоскостью PBC . Найдите этот угол.

3990. Через боковое ребро PC правильной треугольной пирамиды $ABCP$ проведена плоскость, параллельная

стороне AB основания. Боковое ребро PA образует с этой плоскостью угол, равный $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

3991. В пирамиде $ABCD$ двугранный угол при ребре AC равен 90° , $AB = BC = CD$, $BD = AC$. Найдите двугранный угол при ребре AD .

3992. Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 6, а высота равна $\frac{3}{\sqrt{7}}$. На ребрах AC , A_1C_1 и BB_1 расположены соответственно точки P , F и K так, что $AP = 1$, $A_1F = 3$ и $BK = KB_1$. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки P , F и K . Найдите площадь сечения и угол между плоскостью основания призмы и плоскостью сечения.

3993. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ пересечена плоскостью, проходящей через середины ребер AB , A_1C_1 и BB_1 . Постройте сечение призмы, найдите площадь сечения и вычислите угол между плоскостью основания ABC и плоскостью сечения, если сторона основания равна 4, а высота призмы равна $\frac{\sqrt{42}}{7}$.

3994. Длины ребер правильной треугольной пирамиды принимают два значения: 2 и 4. Найдите длину хорды описанной около этой пирамиды сферы, проходящей через середины двух ее противоположных ребер.

3995. Отрезок AB ($AB = 1$), являющийся хордой сферы радиуса 1, расположен под углом 60° к диаметру CD этой сферы. Расстояние от конца C диаметра до ближайшего к нему конца A хорды AB равно $\sqrt{2}$. Найдите BD .

3996. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно 3. Точка M — середина ребра AC , точка N лежит на ребре B_1C_1 , а точка P принадлежит грани AA_1B_1B и удалена от плоскости ABC на расстояние 1. Известно, что угол в 30° образуют: прямые PM и PN — с плоскостью AA_1B_1B , прямая PN — с плоскостью BB_1C_1C . Найдите объем призмы.

3997. Рассмотрим четыре угла между плоскостями граней правильного тетраэдра и некоторой фиксированной плоскостью.

а) Докажите, что косинусам этих углов можно приписать знаки так, что их сумма будет равна нулю.

б) Докажите, что сумма квадратов косинусов этих углов равна $\frac{4}{3}$.

3998. Площади граней треугольной пирамиды равны 3, 4, 5 и 6. Двугранные углы при меньшей по площади грани равны между собой. Найдите двугранный угол между гранями площади 5 и 6.

3999. Двугранный угол, образованный полуплоскостями α и β , равен $\frac{\pi}{3}$.

Внутри этого угла расположен треугольник ABC . Ортогональные проекции треугольника ABC на полуплоскости α и β есть треугольники AB_1C_1 и AB_2C_2 соответственно (B_1 и B_2 — проекции точки B ; C_1 и C_2 — проекции точки C). Известно, что $AB = 3\sqrt{25 - 4\sqrt{3}}$,

$AC = \sqrt{19 - 4\sqrt{3}}$, $AB_1 = 9\sqrt{2}$, $AB_2 = 6\sqrt{3}$, $AC_1 > AC_2$, $\angle B_1AC_1 = \angle B_2AC_2 = \pi/12$. Найдите BC .

4000. Внутри трехгранного угла, все плоские углы которого прямые, расположен многоугольник. Площади проекций на грани этого угла равны 3, 4 и 12. Найдите площадь этого многоугольника.

4. ЭЛЕМЕНТЫ ПРАВИЛЬНЫХ ПИРАМИД

4001. Докажите, что в любой правильной пирамиде все боковые ребра равны.

4002. Докажите, что в любой правильной пирамиде все боковые грани образуют равные углы с плоскостью основания.

4003. Докажите, что в любой правильной пирамиде углы между соседними боковыми гранями равны.

4004°. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a . Боковое ребро образует с плоскостью основания угол, равный 60° (рис. 165). Найдите высоту пирамиды.

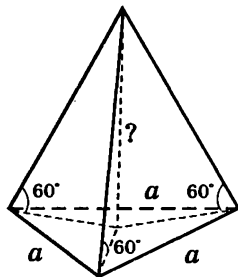


Рис. 165

4005°. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a . Боковое ребро образует с плоскостью основания угол, равный 60° . Найдите объем пирамиды.

4006. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a . Боковая грань образует с плоскостью основания угол, равный 45° . Найдите высоту пирамиды.

4007. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a . Боковая грань образует с плоскостью основания угол, равный 45° . Найдите объем пирамиды.

4008. Высота правильной шестиугольной пирамиды равна стороне ос-

нования. Найдите угол бокового ребра с плоскостью основания.

4009. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковая грань образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите высоту пирамиды.

4010. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковая грань образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите объем пирамиды.

4011°. Найдите высоту правильного тетраэдра с ребром, равным a .

4012. Найдите объем правильного тетраэдра с ребром, равным a .

4013. Найдите площадь полной поверхности правильного тетраэдра с ребром, равным a .

4014°. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны a . Найдите высоту пирамиды.

4015. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны a . Найдите объем пирамиды.

4016. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны. Найдите угол между противоположными боковыми ребрами.

4017. Боковая грань образует с плоскостью основания правильной шестиугольной пирамиды угол, равный 60° . Найдите угол бокового ребра с плоскостью основания.

4018. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол, равный 60° . Найдите угол боковой грани с плоскостью основания.

4019. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a . Боковое ребро образует с плоскостью основания угол, равный 60° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

4020°. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a . Боковая грань образует с плоскостью основания угол, равный 45° .

Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

4021°. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол, равный 45° . Найдите угол бокового ребра с плоскостью основания.

4022. Сторона основания и высота правильной шестиугольной пирамиды равны a . Найдите объем пирамиды.

4023. Высота правильной шестиугольной пирамиды равна стороне основания. Найдите угол между боковой гранью и плоскостью основания.

4024°. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a . Боковая грань образует с плоскостью основания угол, равный 60° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

4025. Боковая грань образует с плоскостью основания правильной треугольной пирамиды угол, равный 60° . Найдите угол бокового ребра с плоскостью основания.

4026. В правильном тетраэдре найдите угол между ребром и плоскостью грани, не содержащей это ребро.

4027. Найдите угол между гранями правильного тетраэдра.

4028. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны. Найдите угол между соседними боковыми гранями.

4029. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна $\sqrt{3}$, а угол боковой грани с плоскостью основания равен 60° . Найдите высоту пирамиды.

4030. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 8, апофема пирамиды равна 10. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проведенной через середину высоты параллельно плоскости основания.

4031. Угол боковой грани с плоскостью основания правильной треугольной пирамиды равен β . Найдите угол

бокового ребра с плоскостью основания.

4032. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна $\sqrt{3}$, а угол боковой грани с плоскостью основания равен 60° (рис. 166). Найдите объем пирамиды.

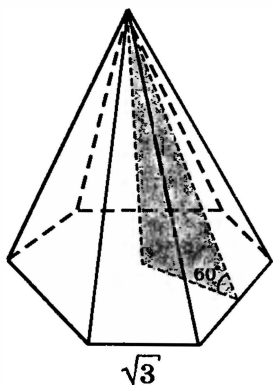


Рис. 166

4033. Угол бокового ребра с плоскостью основания правильной треугольной пирамиды равен α . Найдите угол боковой грани с плоскостью основания.

4034. Угол бокового ребра с плоскостью основания правильной четырехугольной пирамиды равен α . Найдите угол боковой грани с плоскостью основания.

4035. Угол боковой грани с плоскостью основания правильной четырехугольной пирамиды равен β . Найдите угол бокового ребра с плоскостью основания.

4036. Угол бокового ребра с плоскостью основания правильной шестиугольной пирамиды равен α . Найдите угол боковой грани с плоскостью основания.

4037. Угол боковой грани с плоскостью основания правильной шестиугольной пирамиды равен β . Найдите угол бокового ребра с плоскостью основания.

4038. Сторона основания и высота правильной шестиугольной пирами-

ды равны a . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

4039. Найдите площадь сечения, проведенного через высоту и одно из ребер правильного тетраэдра, если ребро тетраэдра равно a .

4040. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна $\sqrt{3}$, а угол боковой грани с плоскостью основания равен 60° . Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

4041. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна $\sqrt{3}$, а угол боковой грани с плоскостью основания равен 60° . Найдите площадь сечения, проведенного через вершину пирамиды, и меньшую диагональ основания.

4042. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a . Найдите боковую поверхность и объем пирамиды, если ее диагональное сечение равновелико основанию.

4043. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны a . Найдите расстояние между стороной основания и противоположной боковой гранью.

4044. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны a . Найдите радиус описанной сферы.

4045. Вычислите объем правильного тетраэдра, если радиус окружности, описанной около его грани, равен R .

4046. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно высоте основания, а площадь сечения, проведенного через это боковое ребро и высоту основания, равна Q . Найдите объем призмы.

4047. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол, равный 45° . Найдите угол между противоположными боковыми гранями.

4048. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны. Найдите угол между противоположными боковыми гранями.

4049. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны. Найдите угол между боковой гранью и плоскостью основания.

4050. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде высота равна 2, а стороны оснований равны 3 и 5. Найдите диагональ усеченной пирамиды.

4051. Высота правильной треугольной пирамиды вдвое больше стороны основания. Найдите: а) угол между боковым ребром и плоскостью основания; б) угол между боковой гранью и плоскостью основания.

4052. Высота правильной четырехугольной пирамиды вдвое больше стороны основания. Найдите: а) угол между боковым ребром и плоскостью основания; б) угол между боковой гранью и плоскостью основания.

4053. Высота правильной треугольной пирамиды образует с боковой гранью угол, косинус которого равен $\frac{3}{5}$. Найдите: а) угол боковой грани с плоскостью основания; б) угол бокового ребра с плоскостью основания.

4054. Апофема правильной четырехугольной пирамиды вдвое больше стороны основания. Найдите: а) угол бокового ребра с плоскостью основания; б) угол боковой грани с плоскостью основания.

4055. Апофема правильной треугольной пирамиды вдвое больше стороны основания. Найдите: а) угол боковой грани с плоскостью основания; б) угол бокового ребра с плоскостью основания.

4056. Противоположные боковые грани правильной четырехугольной пирамиды взаимно перпендикулярны. Найдите: а) угол бокового ребра с плоскостью основания; б) угол боковой грани с плоскостью основания.

4057. Докажите, что в правильной треугольной пирамиде противоположные ребра попарно перпендикулярны.

4058. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a . Боковое ребро образует с плоскостью основания угол, равный 60° . Найдите расстояние между противоположными ребрами пирамиды.

4059. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол, равный 60° (рис. 167). Найдите угол между боковыми гранями пирамиды.

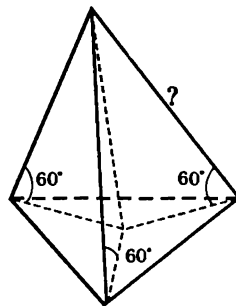


Рис. 167

4060. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол, равный 45° . Найдите угол между соседними боковыми гранями.

4061. Сторона основания и высота правильной шестиугольной пирамиды равны a . Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

4062. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковая грань образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите расстояние между противоположными ребрами.

4063. Боковая грань образует с плоскостью основания правильной треугольной пирамиды угол, равный 60° . Найдите угол между боковыми гранями.

4064. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны a . Найдите расстояние между диагональю основания и скрещивающимся с ней боковым ребром.

4065. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна $\sqrt{3}$, а угол боковой грани с плоскостью основания равен 60° . Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

4066. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды вдвое больше стороны основания. Найдите угол боковой грани с плоскостью основания.

4067. Боковые грани правильной треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны. Найдите угол бокового ребра с плоскостью основания.

4068. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45° . Найдите радиус описанной сферы.

4069. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 8, а высота равна 3. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через одну из сторон основания и середину противоположного бокового ребра.

4070. Все ребра правильной треугольной призмы равны a . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через ребро основания и середину не параллельного ему ребра другого основания.

4071. Через вершину правильной четырехугольной пирамиды и середины двух соседних сторон основания проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения, если сторона основания пирамиды равна a , а боковое ребро равно $2a$.

4072. Угол бокового ребра с плоскостью основания правильной треугольной пирамиды равен α . Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

4073. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен φ . Найдите угол бокового ребра с плоскостью основания пирамиды.

4074. Угол боковой грани с плоскостью основания правильной треуголь-

ной пирамиды равен β . Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

4075. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен φ . Найдите угол боковой грани с плоскостью основания пирамиды.

4076. Угол бокового ребра с плоскостью основания правильной четырехугольной пирамиды равен α . Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

4077. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен φ . Найдите угол бокового ребра с плоскостью основания пирамиды.

4078. Угол боковой грани с плоскостью основания правильной четырехугольной пирамиды равен β . Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

4079. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен φ . Найдите угол боковой грани с плоскостью основания пирамиды.

4080. Угол бокового ребра с плоскостью основания правильной шестиугольной пирамиды равен α . Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

4081. Плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды равен φ . Найдите угол бокового ребра с плоскостью основания пирамиды.

4082. Угол боковой грани с плоскостью основания правильной шестиугольной пирамиды равен β . Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

4083. Плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды равен φ . Найдите угол боковой грани с плоскостью основания пирамиды.

4084. Найдите боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, если сторона основания равна 1, а боковая грань равновелика диагональному сечению, проведенному через большую диагональ основания.

4085. Плоские углы при вершине правильной n -угольной пирамиды равны α . Найдите двугранные углы при основании пирамиды.

4086. Имеются две правильные треугольные пирамиды с общим основанием (рис. 168). Все плоские углы при вершине одной из пирамид равны 60° , а у другой они равны 90° . Найдите отношение высот этих пирамид.

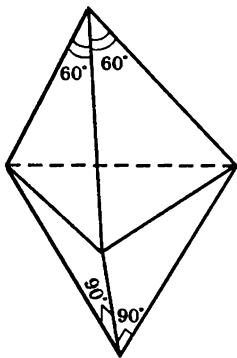


Рис. 168

4087. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a . Боковое ребро образует с плоскостью основания угол, равный 60° . Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

4088. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a . Боковая грань образует с плоскостью основания угол, равный 45° . Найдите расстояние между боковым ребром и скрещивающейся с ним диагональю основания.

4089. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a . Боковая грань образует с плоскостью основания угол, равный 45° . Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

4090. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковая грань образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

4091. Найдите расстояние между противоположными ребрами правильного тетраэдра с ребром, равным a .

4092. Сторона основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирами-

ды $SABCD$ равна a , боковое ребро равно b . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через прямую BD параллельно прямой AS .

4093. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , высота пирамиды равна $2a$. Найдите расстояние между противоположными ребрами.

4094. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , высота пирамиды равна $2a$. Найдите расстояние между диагональю основания и скрещивающимся с ней боковым ребром.

4095. Высота правильной треугольной пирамиды равна a и образует с боковой гранью угол, косинус которого равен $\frac{3}{5}$. Найдите расстояние между

противоположными ребрами.

4096. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , апофема пирамиды равна $2a$. Найдите расстояние между диагональю основания и скрещивающимся с ней боковым ребром.

4097. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , апофема пирамиды равна $2a$. Найдите расстояние между противоположными ребрами.

4098. Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна a , а противоположные боковые грани пирамиды взаимно перпендикулярны. Найдите расстояние между диагональю основания и скрещивающимся с ней боковым ребром.

4099. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a . Боковое ребро образует с плоскостью основания угол, равный 60° . Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

4100. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a . Боковая грань образует с плоскостью основания угол, равный 45° . Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

4101. Высота правильной шестиугольной пирамиды равна стороне основания (рис. 169). Найдите угол между соседними боковыми гранями.

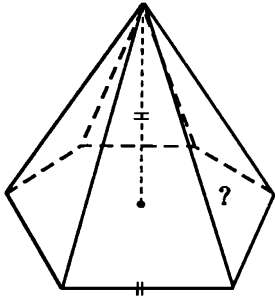


Рис. 169

4102. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковая грань образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

4103. Найдите радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра с ребром, равным a .

4104. Найдите радиус сферы, вписанной в правильный тетраэдр с ребром, равным a .

4105. Боковая грань образует с плоскостью основания правильной шестиугольной пирамиды угол, равный 60° . Найдите угол между соседними боковыми гранями.

4106. Высота правильной треугольной пирамиды равна $6\sqrt{6}$, боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45° . Найдите расстояние от центра основания пирамиды до боковой грани.

4107. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , боковая грань образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите радиус вписанной сферы.

4108. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 8, апофема пирамиды равна 10. Найдите расстояние между диагональю основания и скрещивающимся с ней боковым ребром.

4109. Основание пирамиды совпадает с одной из граней куба, а вершина — с центром противоположной грани. Найдите угол между соседними боковыми гранями пирамиды.

4110. Через середину ребра правильного тетраэдра проведена плоскость, перпендикулярная соседнему ребру. Найдите площадь полученного сечения, если ребро тетраэдра равно a .

4111. Через вершину D правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром, равным a , и середины ребер AB и AC проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения.

4112. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковое ребро равно b . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины двух ребер основания и середину одного из боковых ребер.

4113. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны a . Через сторону основания и середину одного из противоположных боковых ребер проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения.

4114. Через диагональ B_1D_1 грани $A_1B_1C_1D_1$ и середину ребра DC правильной четырехугольной призмы $ABCA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость. Найдите площадь сечения призмы этой плоскостью, если $AB = a$, $CC_1 = 2a$.

4115. Угол бокового ребра с плоскостью основания правильной треугольной пирамиды равен α . Найдите угол между боковыми гранями.

4116. Угол между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды равен γ . Найдите угол бокового ребра с плоскостью основания.

4117. Угол боковой грани с плоскостью основания правильной треугольной пирамиды равен β . Найдите угол между боковыми гранями.

4118. Угол между боковыми гранями правильной треугольной пирами-

ды равен γ . Найдите угол боковой грани с плоскостью основания.

4119. Угол между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды равен γ . Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

4120. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен ϕ . Найдите угол между боковыми гранями пирамиды.

4121. Угол бокового ребра с плоскостью основания правильной четырехугольной пирамиды равен α . Найдите угол между соседними боковыми гранями.

4122. Угол между соседними боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен γ . Найдите угол бокового ребра с плоскостью основания.

4123. Угол боковой грани с плоскостью основания правильной четырехугольной пирамиды равен β . Найдите угол между соседними боковыми гранями.

4124. Угол между соседними боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен γ . Найдите угол боковой грани с плоскостью основания.

4125. Угол между соседними боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен γ . Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

4126. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен ϕ . Найдите угол между соседними боковыми гранями пирамиды.

4127. Угол бокового ребра с плоскостью основания правильной шестиугольной пирамиды равен α . Найдите угол между соседними боковыми гранями.

4128. Угол между соседними боковыми гранями правильной шестиугольной пирамиды равен γ . Найдите угол бокового ребра с плоскостью основания.

4129. Угол боковой грани с плоскостью основания правильной шестиугольной пирамиды равен β . Найдите угол между соседними боковыми гранями.

4130. Угол между соседними боковыми гранями правильной шестиугольной пирамиды равен γ . Найдите угол боковой грани с плоскостью основания.

4131. Угол между соседними боковыми гранями правильной шестиугольной пирамиды равен γ . Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

4132. Плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды равен ϕ . Найдите угол между соседними боковыми гранями пирамиды.

4133. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ через середины сторон AB и AD основания проведена плоскость, параллельная боковому ребру SA (рис. 170). Найдите площадь сечения, зная сторону основания a и боковое ребро b .

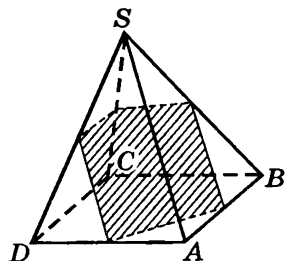


Рис. 170

4134. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ вписан куб. Все четыре вершины одной из граней куба лежат на основании $ABCD$ пирамиды. Все четыре вершины противоположной грани куба лежат на апофемах пирамиды. Известно, что $SA = AB = a$, т. е. боковое ребро пирамиды равно a и равно стороне ее основания. Чему равен объем куба?

4135. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды со сторо-

ной основания, равной a , и плоскими углами при вершине, равными углам боковых ребер с плоскостью основания.

4136. В правильную четырехугольную пирамиду вписана сфера, которая касается основания и всех боковых граней. Сфера делит высоту пирамиды в отношении $9 : 7$, считая от вершины пирамиды. Найдите объем пирамиды, если сторона основания пирамиды равна a .

4137. Высота правильной треугольной пирамиды вдвое больше стороны основания. Найдите угол между боковыми гранями.

4138. Высота правильной четырехугольной пирамиды вдвое больше стороны основания. Найдите угол между соседними боковыми гранями.

4139. Высота правильной треугольной пирамиды образует с боковой гранью угол, косинус которого равен $\frac{3}{5}$. Найдите угол между боковыми гранями.

4140. Апофема правильной четырехугольной пирамиды вдвое больше стороны основания. Найдите угол между соседними боковыми гранями.

4141. Апофема правильной треугольной пирамиды вдвое больше стороны основания. Найдите угол между боковыми гранями.

4142. Противоположные боковые грани правильной четырехугольной пирамиды взаимно перпендикулярны. Найдите угол между соседними боковыми гранями.

4143. Через середину ребра правильной треугольной пирамиды проведено сечение, параллельное двум ее скрещивающимся ребрам. Найдите площадь этого сечения, если сторона основания пирамиды равна a , а боковое ребро равно b .

4144. Покажите, что в кубе можно выбрать четыре вершины, являющиеся вершинами правильного тетраэдра,

причем сделать это можно двумя способами.

4145. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковое ребро равно b . Найдите радиус описанного шара.

4146. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , боковое ребро равно b . Найдите радиус описанного шара.

4147. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a , боковое ребро равно b . Найдите радиус описанного шара.

4148. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и углом между соседними боковыми гранями, равным γ .

4149. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с высотой, равной h , и углом между соседними боковыми гранями, равным γ .

4150. Сторона основания и высота правильной шестиугольной пирамиды равны a . Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

4151. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны a . Найдите радиус вписанной сферы.

4152. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна $\sqrt{3}$, а угол боковой грани с плоскостью основания равен 60° . Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

4153. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45° . Найдите радиус вписанной сферы.

4154. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , боковая грань образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите радиус описанной сферы.

4155. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , а расстояние между противоположными

ребрами равно $\frac{3a}{8}$. Найдите радиус описанной сферы.

4156. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , а расстояние между диагональю основания и скрещивающимся с ней боковым ребром равно $\frac{a}{4}$. Найдите радиус описанной сферы.

4157. В правильной треугольной пирамиде $PABC$ с вершиной P сторона основания равна 2 (рис. 171). Через сторону основания BC проведено сечение, которое пересекает ребро PA в точке M , причем $PM : MA = 1 : 3$, а площадь сечения равна 3. Найдите высоту пирамиды.

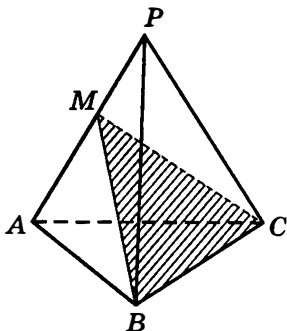


Рис. 171

4158. Найдите объем параллелепипеда, все грани которого — равные ромбы со стороной, равной a , и острым углом 60° .

4159. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида. Радиус шара равен 1. Плоский угол при вершине пирамиды равен 45° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

4160. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , высота пирамиды равна $2a$. Найдите радиусы описанной и вписанной сфер.

4161. Высота правильной треугольной пирамиды равна a и образует с бо-

ковой гранью угол, косинус которого равен $\frac{3}{5}$. Найдите радиусы описанной и вписанной сфер.

4162. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , апофема пирамиды равна $2a$. Найдите радиусы описанной и вписанной сфер.

4163. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , апофема пирамиды равна $2a$. Найдите радиусы описанной и вписанной сфер.

4164. Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна a , а противоположные боковые грани пирамиды взаимно перпендикулярны. Найдите радиусы описанной и вписанной сфер.

4165. Докажите, что пирамида с равными боковыми ребрами и с равными двугранными углами при основании является правильной.

4166. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковое ребро равно b . Найдите радиус вписанного шара.

4167. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , боковое ребро равно b . Найдите радиус вписанного шара.

4168. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a , боковое ребро равно b . Найдите радиус вписанного шара.

4169. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковое ребро равно b . Найдите радиус шара, касающегося всех ребер пирамиды.

4170. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , боковое ребро равно b . Найдите радиус шара, касающегося всех ребер пирамиды.

4171. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a , боковое ребро равно b . Найдите радиус шара, касающегося всех ребер пирамиды.

4172. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковое ребро равно b . Найдите радиус шара, касающегося сторон основания и продолжений боковых ребер пирамиды.

4173. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , боковое ребро равно b . Найдите радиус шара, касающегося сторон основания и боковых ребер пирамиды.

4174. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a , боковое ребро равно b . Найдите радиус шара, касающегося сторон основания и продолжений боковых ребер пирамиды.

4175. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковое ребро равно b . Найдите радиус шара, касающегося плоскости основания и боковых ребер пирамиды.

4176. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , боковое ребро равно b . Найдите радиус шара, касающегося плоскости основания и боковых ребер пирамиды.

4177. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a , боковое ребро равно b . Найдите радиус шара, касающегося плоскости основания и боковых ребер пирамиды.

4178. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно b , а плоский угол при вершине равен α (рис. 172). Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

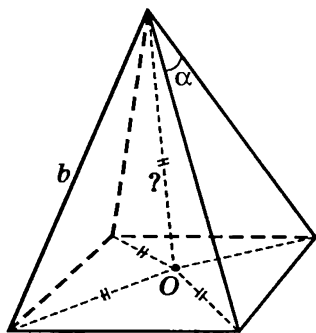


Рис. 172

4179. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с радиусом вписанной сферы, равным r , и плоским углом при вершине, равным ϕ .

4180. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , а расстояние между диагональю основания и скрещивающимся с ней боковым ребром равно $\frac{a}{4}$. Найдите радиус вписанной сферы.

4181. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $ABCDP$ (P — вершина) равна $4\sqrt{2}$, а угол между соседними боковыми гранями равен 120° . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ BD основания параллельно боковому ребру CP .

4182. Правильную четырехугольную пирамиду пересекает плоскость, проходящая через вершину основания перпендикулярно противоположному боковому ребру. Площадь полученного сечения в два раза меньше площади основания пирамиды. Найдите отношение высоты пирамиды к боковому ребру.

4183. Правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ с вершиной S пересекает плоскость, проходящая через середины ребер SB и SC и перпендикулярная грани SAD . Площадь основания пирамиды восемь раз больше площади полученного сечения. Найдите угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

4184. На гранях правильного тетраэдра с ребром, равным a , как на основаниях построены правильные тетраэдры. Докажите, что новые вершины построенных тетраэдров являются вершинами правильного тетраэдра. Найдите его ребро.

4185. Площадь основания правильной n -угольной пирамиды равна S , а площадь боковой грани равна Q . Найдите двугранные углы при основании этой пирамиды.

4186. Найдите ребро куба, одна грань которого лежит в плоскости основания правильной треугольной пирамиды, а четыре оставшиеся вершины — на ее боковой поверхности, если стороны основания пирамиды равны a , а высота пирамиды равна h .

4187. Через сторону основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, отсекающая от противоположной грани треугольник с площадью a^2 . Найдите боковую поверхность пирамиды, которая отсечена проведенной плоскостью от данной пирамиды, если боковая поверхность данной пирамиды равна b^2 .

4188. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковое ребро образует с плоскостью основания угол α . Найдите радиус описанного шара.

4189. Сторона основания и высота правильной четырехугольной пирамиды равны a . Найдите радиус вписанного шара.

4190. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , а расстояние между противоположными ребрами равно $\frac{3a}{8}$. Найдите радиус вписанной сферы.

4191. Вершины пирамиды $KLMN$ расположены в точках пересечения медиан граней некоторой правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и боковым ребром b . Найдите полную поверхность пирамиды $KLMN$.

4192. Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер правильного тетраэдра с ребром, равным a .

4193. Все грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной, равной a , и острым углом 60° . Найдите высоту параллелепипеда.

4194. Двугранный угол при основании правильной n -угольной пирамиды равен β . Найдите двугранный угол между соседними боковыми гранями.

4195. На продолжении ребра SK правильной четырехугольной пирамиды $SKLMN$ с вершиной S взята точка A так, что расстояние от точки A до плоскости SMN равно 24. Найдите KA , если $SL = 2\sqrt{41}$, а $MN = 16$.

4196. На продолжении ребра SD правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S взята точка N так, что $DN = 11$. Найдите расстояние от точки N до плоскости SAB , если $AB = 6$, а $SB = 5$.

4197. Высота правильной треугольной пирамиды вдвое больше стороны основания. Найдите угол между апофемой и соседней боковой гранью.

4198. Высота правильной четырехугольной пирамиды вдвое больше стороны основания. Найдите угол между апофемой и соседней боковой гранью.

4199. Высота правильной треугольной пирамиды образует с боковой гранью угол, косинус которого равен $\frac{3}{5}$. Найдите угол между апофемой и соседней боковой гранью.

4200. Апофема правильной четырехугольной пирамиды вдвое больше стороны основания. Найдите угол между апофемой и соседней боковой гранью.

4201. Апофема правильной треугольной пирамиды вдвое больше стороны основания. Найдите угол между апофемой и соседней боковой гранью.

4202. Противоположные боковые грани правильной четырехугольной пирамиды взаимно перпендикулярны. Найдите угол между апофемой и соседней боковой гранью.

4203. На гранях правильного тетраэдра с ребром, равным a , как на основаниях построены равные правильные пирамиды. Плоские углы в этих пирамидах при вершинах, противолежащих граням тетраэдра, прямые. Рассмотрите многогранник, образованный тетраэдром и построенными

пирамидами (рис. 173). Сколько граней у этого многогранника? Как он называется?

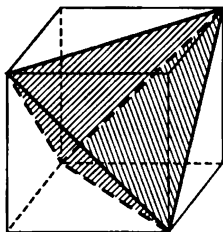


Рис. 173

4204. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро SA и диагональ BD основания образуют равные углы плоскостью боковой грани SBC . Найдите угол между ребром SA и плоскостью грани SBC .

4205. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол, равный 60° . Найдите угол апофемы с плоскостью соседней грани.

4206. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол, равный 45° . Найдите угол между апофемой пирамиды и плоскостью соседней грани.

4207. Высота правильной шестиугольной пирамиды равна стороне основания. Найдите угол между апофемой и плоскостью соседней боковой грани.

4208. Боковая грань образует с плоскостью основания правильной треугольной пирамиды угол, равный 60° . Найдите угол между апофемой и плоскостью соседней боковой грани.

4209. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны. Найдите угол между апофемой и плоскостью соседней боковой грани.

4210. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол, равный 45° . Найдите угол между апофемой пирамиды и соседней боковой гранью.

4211. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите угол апофемы с соседней боковой гранью.

4212. Расстояние между противоположными ребрами правильной треугольной пирамиды равно $\frac{3}{8}$ ее бокового ребра. Найдите угол апофемы с соседней боковой гранью.

4213. Расстояние между диагональю основания и скрещивающимся с ней боковым ребром правильной четырехугольной пирамиды равно четверти стороны основания. Найдите угол апофемы с соседней боковой гранью.

4214. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , угол апофемы с соседней боковой гранью равен 45° . Найдите радиусы вписанной и описанной сфер.

4215. Дан правильный тетраэдр с ребром, равным a . Найдите объем многогранника, полученного в пересечении этого тетраэдра со своим образом при симметрии относительно середины высоты.

4216. Два правильных тетраэдра $ABCD$ и $MNPQ$ расположены так, что плоскости BCD и NPQ совпадают, вершина M лежит на высоте AO первого тетраэдра, а плоскость MNP проходит через центр грани ABC и середину ребра BD . Найдите отношение ребер тетраэдров.

5. СФЕРА. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ К СФЕРЕ. КАСАЮЩИЕСЯ СФЕРЫ. ВПИСАННАЯ И ОПИСАННАЯ СФЕРЫ

4217. Докажите, что около пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда около основания этой пирамиды можно описать окружность.

4218. Найдите площадь сечения шара радиуса 3 плоскостью, удаленной от его центра на расстояние, равное 2.

4219. Найдите ребро куба, вписанного в сферу радиуса R .

4220. В шаре проведены диаметр AB и две равные хорды AM и AN , каждая под углом α к диаметру. Найдите угол между хордами, если отрезок MN виден из центра шара под углом β .

4221. Докажите, что если около параллелепипеда можно описать сферу, то этот параллелепипед — прямоугольный.

4222. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 1. Найдите боковое ребро призмы, если известно, что в нее можно вписать сферу.

4223. Найдите радиус шара, описанного около правильной n -угольной призмы с высотой h и стороной основания a .

4224. Внутренняя точка A шара радиуса r соединена с поверхностью шара тремя отрезками, равными l и проведенными под углом α друг к другу. Найдите расстояние точки A от центра шара.

4225. Даны плоскость α и перпендикулярная ей прямая l . Найдите геометрическое место центров шаров радиуса r , касающихся одновременно плоскости α и прямой l .

4226. Через точку A , расположенную вне сферы, проведены две прямые. Одна из них касается сферы в точке B , а вторая пересекает ее в точках C и D (рис. 174). Докажите, что

$$AB^2 = AC \cdot AD.$$

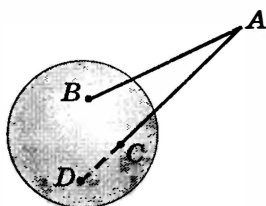


Рис. 174

4227. Известно, что около некоторой призмы можно описать сферу. Докажите, что основание призмы — многоугольник, около которого можно описать окружность. Найдите радиус этой окружности, если высота призмы равна h , а радиус описанной около нее сферы равен R .

4228. Внутри единичного куба расположены восемь равных шаров. Каждый шар вписан в один из трехгранных углов куба и касается трех шаров, соответствующих соседним вершинам куба. Найдите радиусы шаров.

4229. Три сферы попарно касаются внешним образом, а также касаются некоторой плоскости в вершинах прямоугольного треугольника с катетом, равным 1, и противолежащим углом в 30° . Найдите радиусы сфер.

4230. Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной 6. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 4. Найдите радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

4231. Поверхность шара радиуса r проходит через вершину правильной шестиугольной пирамиды. Ребра пирамиды пересекают поверхность шара на расстоянии l от вершины. Найдите угол между соседними ребрами, выходящими из вершины пирамиды.

4232. Даны два шара радиусов 2 и 3 с центрами A и B соответственно, $AB = 7$. Плоскость, касающаяся шаров, пересекает прямую AB в точке M . Найдите AM .

4233. Найдите геометрическое место всех шаров данного радиуса, касающихся граней данного двугранного угла.

4234. Основанием пирамиды служит многоугольник, около которого можно описать окружность. Докажите, что около этой пирамиды можно описать сферу. Найдите радиус этой сферы, если радиус окружности, описанной около основания пирамиды,

равен r , высота равна h , а основание высоты совпадает с вершиной основания пирамиды.

4235. Радиус сферы, касающейся всех ребер правильного тетраэдра, равен 1. Найдите ребро тетраэдра.

4236. Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны и равны a , b и c . Найдите радиус описанной сферы.

4237. Основание пирамиды $ABCD$ — треугольник ABC со сторонами $AC = 6$, $BC = 8$, $AB = 10$. Все боковые ребра равны $5\sqrt{2}$. Найдите:

а) радиус сферы, описанной около пирамиды $ABCD$;

б) расстояние между прямыми DM и AC и прямыми DM и BC , где DM — высота пирамиды $ABCD$.

4238. Основание пирамиды — квадрат со стороной, равной a , высота пирамиды проходит через середину одной из сторон основания и равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Найдите радиус описанной сферы.

4239. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами a и $2a$. Высота пирамиды проходит через середину меньшей стороны основания и равна a . Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

4240. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной a , и острым углом 30° . Высота пирамиды проходит через середину наименьшей из сторон основания и равна a . Найдите радиус описанной сферы.

4241. В треугольной пирамиде $SABC$ две равные боковые грани ASB и CSB перпендикулярны плоскости основания, а грань ASC наклонена к плоскости основания под углом β . Найдите радиус шара, описанного около пирамиды, если радиус окружности, описанной около основания, равен r и $\angle ABC = \alpha$.

4242. В треугольной пирамиде $SABC$ известно, что $AB = AC = 10$, $BC = 16$. Высота пирамиды, опущенная из вершины S , проходит через вершину B и равна 4. Найдите полную поверхность пирамиды и радиус шара, вписанного в пирамиду.

4243. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , высота пирамиды равна $2a$. Найдите радиусы описанной и вписанной сфер.

4244. Стороны треугольника равны a , b и c . Три шара попарно касаются друг друга и плоскости треугольника в его вершинах. Найдите радиусы шаров.

4245. Докажите, что в любую треугольную пирамиду можно вписать единственную сферу.

4246. Плоскость проходит на расстоянии a от центра единичной сферы. Найдите ребро куба, одна грань которого лежит в этой плоскости, а вершины противоположной грани находятся на сфере.

4247. В треугольной пирамиде $ABCD$ известно, что $AB = a$ и $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$. Найдите радиус сферы, описанной около этой пирамиды.

4248. Через центр сферы радиуса R проведены три попарно перпендикулярные плоскости. Найдите радиус сферы, касающейся всех этих плоскостей и данной сферы.

4249. Два шара касаются друг друга и граней трехгранного угла, все плоские углы которого прямые. Найдите отношение радиусов этих шаров.

4250. Докажите, что если в четырехгранный угол можно вписать сферу, то суммы противоположных плоских углов этого четырехгранного угла равны.

4251. Дан трехгранный угол $OABC$ с вершиной O , в котором $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$. Пусть вписанная в него сфера касается грани BOC в точке K . Найдите угол BOK .

4252. Докажите, что если суммы противоположных плоских углов четырехгранного угла (рис. 175) равны, то в него можно вписать сферу.

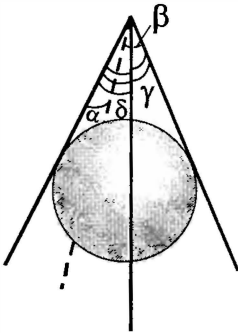


Рис. 175

4253. Внутри правильного тетраэдра с ребром a расположены четыре равных шара. Каждый шар касается трех других и трех граней тетраэдра. Найдите радиусы шаров.

4254. Два противоположных ребра треугольной пирамиды равны a , два других противоположных ребра равны b , два оставшихся — c . Найдите радиус описанной сферы.

4255. Три шара радиуса R попарно касаются между собой и некоторой плоскости. Найдите радиус шара, касающегося данных и той же плоскости.

4256. Через центр сферы радиуса R проведена плоскость. Три равных шара касаются сферы, проведенной плоскости и между собой. Найдите радиусы шаров.

4257. Два шара одного радиуса и два — другого расположены так, что каждый шар касается трех других и одной плоскости. Найдите отношение радиуса большего шара к радиусу меньшего.

4258. Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной, равной a . Высота пирамиды проходит через середину одной из сторон основа-

ния и равна $\frac{3a}{2}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

4259. Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a . Точки M и K — середины ребер AB и CD соответственно. Найдите радиус сферы, проходящей через точки M , K , A_1 и C_1 .

4260. Около шара описан прямой параллелепипед, у которого диагонали основания равны a и b . Найдите полную поверхность параллелепипеда.

4261. Шар радиуса R касается плоскости α . Рассмотрим всевозможные шары радиуса r , касающиеся данного шара и плоскости α . Найдите геометрические места центров этих шаров и точек их касания с плоскостью и данным шаром.

4262. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ S — вершина, SO — высота, $SA = 4$, $AB = 2$. Через точки S , A , B проведена сфера так, что прямая SO лежит в касательной плоскости к сфере. Найдите радиус сферы.

4263. Внутри сферы расположены четыре шара радиуса r . Каждый из этих шаров касается трех других и поверхности сферы. Найдите радиус сферы.

4264. На сфере радиуса R взята точка M и из нее проведены три равные между собой хорды MP , MQ и MT , причем $\angle PMQ = \angle QMT = \angle TMP = \alpha$. Найдите эти хорды.

4265. Дан правильный тетраэдр $PABC$ с ребром, равным a . Через точки C , E , M , P , где E — середина AB , а M — середина AC , проведена сфера. Найдите ее радиус.

4266. Шар радиуса r касается всех боковых граней треугольной пирамиды в серединах сторон ее основания. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром шара, делится пополам точкой пересечения с основанием пирамиды. Найдите объем пирамиды.

4267. Основание пирамиды — ромб со стороной 2 и острым углом 45° . Шар радиуса $\sqrt{2}$ касается каждой боковой грани в точке, лежащей на стороне основания пирамиды. Докажите, что высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба, и найдите объем пирамиды.

4268. Дана правильная треугольная пирамида $PABC$ (P — вершина) со стороной основания a и боковым ребром b ($b < a$). Сфера лежит над плоскостью основания ABC , касается этой плоскости в точке A и, кроме того, касается бокового ребра PB . Найдите радиус этой сферы.

4269. Четыре сферы радиуса 1 попарно касаются. Найдите радиус сферы, касающейся всех четырех сфер.

4270. Высота пирамиды равна 5, а основанием служит треугольник со сторонами 7, 8 и 9. Некоторая сфера касается плоскостей всех боковых граней пирамиды в точках, лежащих на сторонах основания. Найдите радиус сферы.

4271. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром $a\sqrt{2}$. Сфера проходит через точку A и касается боковых ребер SB и SC в их серединах. Найдите радиус этой сферы.

4272. Даны четыре точки A, B, C, D , не лежащие в одной плоскости. Сфера касается прямых AB и AD в точке A и прямых BC и CD в точке C . Найдите площадь поверхности сферы, если известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$.

4273. Ребро правильного тетраэдра равно $\sqrt{2}$. Найдите радиус шара, поверхность которого касается всех ребер тетраэдра.

4274. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , двугранный угол при основании равен 60° . Найдите радиус сферы, касающейся двух соседних боковых ребер,

противоположной боковой грани и основания.

4275. Два равных касающихся шара вписаны в двугранный угол, равный α . Первый шар касается первой грани двугранного угла в точке A , а второй шар касается второй грани в точке B . Какая часть отрезка AB находится вне шаров?

4276. Ребро AC треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина) перпендикулярно грани SAB . Шар касается грани ASC в точке S , а грани ABC — в точке B . Найдите радиус шара, если $AC = 1$, $\angle ACB = \angle BCS = 60^\circ$.

4277. Ребро куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ равно a . Точки M и N лежат на отрезках BD и CC_1 соответственно (рис. 176). Прямая MN образует угол 45° с плоскостью $ABCD$ и угол 30° с плоскостью BB_1C_1C . Найдите: а) отрезок MN ; б) радиус шара с центром на отрезке MN , касающегося плоскостей $ABCD$ и BB_1C_1C .

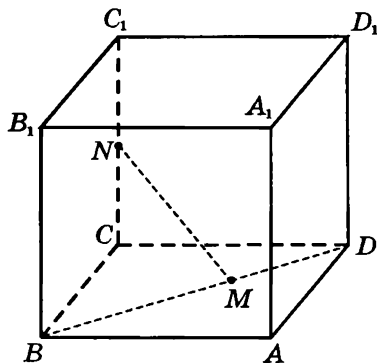


Рис. 176

4278. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна h . Точка D расположена на ребре AB . Прямая C_1D образует угол 30° с плоскостью AA_1C_1C и угол $\arcsin \frac{3}{4}$ с плоскостью ABC . Найдите: а) сторону основания призмы; б) радиус шара с центром на отрезке C_1D , касающегося плоскостей ABC и AA_1C_1C .

4279. В правильной треугольной пирамиде расположен шар радиуса 1. В точке, делящей пополам высоту пирамиды, он касается внешним образом полушара. Полушар опирается на круг, вписанный в основание пирамиды, шар касается боковых граней пирамиды. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды и угол между боковыми гранями пирамиды.

4280. Три шара радиуса r лежат на нижнем основании правильной треугольной призмы, причем каждый из них касается двух других шаров и двух боковых граней призмы. На этих шарах лежит четвертый шар, который касается всех боковых граней и верхнего основания призмы. Найдите высоту призмы.

4281. Центры четырех сфер радиуса r ($r < 1$) расположены в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами, равными 2, и в середине его гипотенузы. Найдите радиус сферы, касающейся этих четырех шаров.

4282. В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SC равно ребру AB и наклонено к плоскости основания ABC под углом 60° . Известно, что вершины A , B , C и середины боковых ребер пирамиды расположены на сфере радиуса 1. Докажите, что центр этой сферы лежит на ребре AB , и найдите высоту пирамиды.

4283. В треугольной пирамиде противоположные ребра попарно равны. Докажите, что центры описанной и вписанной сфер совпадают.

4284. Сфера радиуса r касается всех ребер треугольной пирамиды. Центр этой сферы лежит на высоте пирамиды. Докажите, что пирамида правильная, и найдите ее высоту, если известно, что центр сферы удален от вершины пирамиды на расстояние $r\sqrt{3}$.

4285. На сфере радиуса 11 расположены точки A , A_1 , B , B_1 , C и C_1 . Прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 взаимно перпенди-

кулярны и пересекаются в точке M , отстоящей от центра сферы на расстоянии $\sqrt{59}$. Найдите отрезок AA_1 , если известно, что $BB_1 = 18$, а точка M делит отрезок CC_1 в отношении $(8 + \sqrt{2}) : (8 - \sqrt{2})$.

4286. В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ ребро равно 1. Одна сфера радиуса $\frac{1}{4}$ касается плоскости ABC в точке A ; другая сфера касается плоскости $A_1B_1C_1$ в точке E_1 , лежащей на отрезке B_1C_1 , причем $B_1E_1 : E_1C_1 = 2 : 1$. Известно, что эти сферы касаются друг друга внешним образом и точка их касания лежит внутри куба. Найдите расстояние от точки касания сфер до точки D .

4287. Высота пирамиды равна 2, основание пирамиды есть ромб, площадь которого равна 8, а острый угол равен $\frac{\pi}{6}$. Шар касается плоскости каж-

дой боковой грани пирамиды в точке, лежащей на стороне основания пирамиды. Докажите, что прямая, соединяющая вершину пирамиды с центром шара, проходит через точку пересечения диагоналей основания пирамиды. Найдите объем шара.

4288. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ с острым углом при вершине A . Высота ромба равна 4, точка пересечения его диагоналей является ортогональной проекцией вершины S на плоскость основания. Сфера радиуса 2 касается плоскостей всех граней пирамиды. Найдите объем пирамиды, если расстояние от центра сферы до прямой AC равно $\frac{2\sqrt{2}}{3}AB$.

4289. Три шара радиусов 1, 2 и 5 расположены так, что каждый из них касается двух других шаров и двух данных плоскостей. Найдите расстояние между точками касания первого из этих шаров с плоскостями.

4290. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$ с углом BAD , равным $2 \arccos \frac{1}{3}$. Сфера касается всех звеньев ломаной $ABCC_1 A_1$ и пересекает ребро BB_1 в точках B_1 и M . Найдите объем призмы и радиус сферы, если $B_1 M = 1$.

4291. В треугольной пирамиде $ABCD$ известно, что $DC = 9$, $DB = AD$, а ребро AC перпендикулярно грани ABD . Сфера радиуса 2 касается грани ABC , ребра DC , а также грани DAB в точке пересечения ее медиан. Найдите объем пирамиды.

4292. В трехгранный угол, все плоские углы которого равны α , помещена сфера так, что она касается всех ребер трехгранного угла. Грани трехгранного угла пересекают сферу по окружностям радиуса r . Найдите радиус сферы.

4293. Основанием треугольной пирамиды $ABCD$ является треугольник ABC , в котором $\angle A = \frac{\pi}{2}$, $\angle C = \frac{\pi}{6}$, $BC = 2\sqrt{2}$. Ребра AD , BD , CD равны между собой. Сфера радиуса 1 касается ребер AD , BD , продолжения ребра CD за точку D и плоскости ABC . Найдите отрезок касательной, проведенной из точки A к сфере.

4294. Основанием пирамиды является треугольник ABC , в котором $\angle A = \frac{2\pi}{3}$, $AB = AC = 1$. Вершина D пирамиды равноудалена от точек A и B . Сфера касается ребра CD , продолжений ребер AD , BD за точку D и плоскости ABC . Точка касания с плоскостью основания пирамиды и ортогональная проекция вершины D на эту плоскость лежат на окружности, описанной вокруг треугольника ABC . Найдите ребра AD , BD , CD .

4295. Сфера радиуса R делит каждое из ребер SA , SC , AB и BC треугольной пирамиды $SABC$ на три равные части и проходит через середины ребер

AC и SB . Найдите высоту пирамиды, опущенную из вершины S .

4296. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Сфера касается ребер AD , DD_1 , CD и прямой BC_1 . Найдите радиус сферы, если ребро куба равно 1.

4297. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро равно 1. Одна сфера радиуса $\frac{1}{3}$ касается плоскости ABC в точке B ; другая сфера касается плоскости $A_1 B_1 C_1$ в точке E_1 , лежащей на отрезке $C_1 D_1$, причем $C_1 E_1 : E_1 D_1 = 1 : 2$. Известно, что эти сферы касаются друг друга внешним образом и точка их касания лежит внутри куба. Найдите расстояние от точки касания сфер до точки C .

4298. Основание четырехугольной пирамиды $SABCD$ — прямоугольник $ABCD$. Известно, что $AS = 7$, $BS = 2$, $CS = 6$. Найдите ребро DS .

4299. Два противоположных ребра треугольной пирамиды равны a , два других противоположных ребра равны b , два оставшихся — c . Найдите радиусы описанной и вписанной сфер. Докажите, что их центры совпадают.

4300. Дана пирамида $ABCD$. Сфера касается плоскостей DAB , DMC и DBC в точках K , L и M соответственно. При этом точка K находится на стороне AB , точка L — на стороне AC , точка M — на стороне BC . Известно, что радиус сферы равен 3, $\angle ADB = 90^\circ$, $\angle BDC = 105^\circ$, $\angle ADC = 75^\circ$. Найдите объем пирамиды.

4301. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро равно a и равно диагонали основания $ABCD$. Через точку A параллельно прямой BD проведена плоскость P , образующая с прямой AD угол, равный $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}$. Найдите площадь сечения

пирамиды плоскостью P и радиус шара, касающегося плоскости P и четырех прямых, которым принадлежат боковые ребра пирамиды.

4302. В куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ со стороной 1 вписана сфера. Точка E расположена на ребре CC_1 , причем $C_1E = \frac{1}{8}$.

Из точки E проведена касательная к сфере, пересекающая грань куба AA_1D_1D в точке K так, что $\angle KEC = \arccos \frac{1}{7}$. Найдите KE .

4303. Сфера радиуса 4 с центром в точке Q касается трех параллельных прямых в точках F , G и H (рис. 177). Известно, что площадь треугольника QGH равна $4\sqrt{2}$, а площадь треугольника FGH больше 16. Найдите угол GFH .

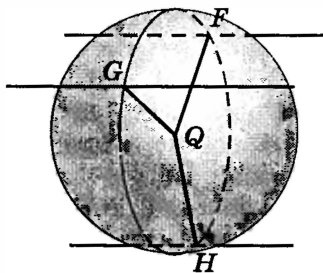


Рис. 177

4304. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Точка F взята на ребре AD , а точка N взята на ребре BD так, что $DN : NB = 1 : 2$. Через точки F , N и точку пересечения медиан треугольника ABC проведена плоскость, параллельная плоскости ADB и пересекающая ребра CA и CD в точках L и K соответственно. Известно, что $\frac{CH}{HB} = \left(\frac{AF}{FD}\right)^2$

и что радиус шара, вписанного в пирамиду $CHLK$, равен R . Найдите отношение площади треугольника ABC к сумме площадей всех граней пирамиды $ABCD$, если длина перпендикуляра, опущенного из вершины D на плоскость ABC , равна h .

4305. Сторона правильного треугольника равна 11. Центры трех шаров находятся в вершинах этого тре-

угольника. Сколько существует различных плоскостей, касающихся одновременно трех шаров, если их радиусы равны: а) 7, 7, 7; б) 1, 1, 1; в) x, x, x .

4306. Четырехугольная пирамида $SABCD$ вписана в сферу. Основание этой пирамиды — прямоугольник $ABCD$. Известно, что $AS = 7$, $BS = 2$, $CS = 6$, $\angle SAD = \angle SBD = \angle SCD$. Найдите ребро DS .

4307. Вокруг пирамиды $ABCD$ описана сфера. Вторая сфера радиуса 1 касается первой внутренним образом в точке D , а также касается плоскости ABC . Известно, $AD = 3$, $\cos \angle BAC = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Найдите объем пирамиды $ABCD$.

4308. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равны $2 + \sqrt{2}$. Сфера касается плоскости $ABCD$, а также боковых ребер SA , SB , SC и SD в точках A_1 , B_1 , C_1 и D_1 соответственно. На SA взята точка E . Плоскость EB_1D_1 пересекает ребро SC в точке F . Площадь ортогональной проекции четырехугольника EB_1FD_1 на плоскость $ABCD$ равна $\frac{4}{3}$. Найдите SE .

4309. Четырехугольная пирамида $SABCD$ вписана в сферу, центр которой лежит в плоскости основания $ABCD$. Диагонали AC и BD основания пересекаются в точке H , причем SH — высота пирамиды. Найдите ребра CS и CD , если $CH = 4$, $AS = 3$.

4310. Две сферы радиуса R касаются друг друга. Через точку M проведены две прямые, касающиеся данных сфер. Первая прямая касается сфер в точках A и B , вторая — в точках C и D , точки A и C лежат на одной сфере. Известно, что $\angle BMD = 60^\circ$, $AB = 3CD$ и $MB > MA$. Найдите CD .

4311. Сфера касается плоскости основания и всех боковых ребер правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ (S — вершина). Найдите объем пирамиды, если радиус сферы равен R , а $\angle SAB = \alpha$.

Плоскость проходит через точку S , касается указанной сферы и пересекает прямые BE и AD соответственно в точках M и N ($EM > BM$, $AN > DN$). Найдите:

а) отношение $DN : AD$, если $BM = DN$;

б) отношение $DN : AD$, если $BM : BE = 3 : 22$.

4312. В куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной 1 вписана сфера. Точка F расположена на продолжении ребра BB_1 за точку B_1 , причем $FB_1 = \frac{1}{6}$. Из точки F

проведена касательная к сфере, пересекающая грань куба $CC_1 D_1 D$ в точке E так, что $\angle EFB_1 = \arccos \frac{2}{7}$. Найдите EF .

4313. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) точка P — середина апофемы SD , лежащей в грани SBC . На ребре AB взята точка M так, что $MB : AB = 2 : 7$. Сфера, центр которой лежит на прямой MP , проходит через точки A , C и пересекает прямую BC в точке Q так, что $CQ = m$. Найдите объем пирамиды $SABC$, если известно, что радиус сферы равен $\frac{m}{\sqrt{3}}$.

4314. Основание H высоты SH треугольной пирамиды $SABC$ принадлежит грани ABC , $SH = \sqrt{\frac{5}{21}}$, $SA = 1$, $SB = 2$, $\angle ASB = 120^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $SABC$.

4315. Основанием пирамиды $SABCD$ является трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такими, что $BC : AD = 2 : 5$. Диагонали трапеции пересекаются в точке E , а центр O вписанной в пирамиду сферы лежит на отрезке SE и делит его в отношении $SO : OE = 7 : 2$. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если площадь боковой грани SBC равна 8.

4316. (Прямая Эйлера ортоцентрического тетраэдра.) Высоты тетраэдра

пересекаются в одной точке (такой тетраэдр называется ортоцентрическим). Докажите, что точка пересечения медиан, высот и центр описанной сферы лежат на одной прямой.

4317. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Скрещивающиеся ребра AC и BD этой пирамиды перпендикулярны. Также перпендикулярны скрещивающиеся ребра AD и BC , а $AB = CD$. Все ребра этой пирамиды касаются шара радиуса r . Найдите площадь грани ABC .

4318. Сфера касается ребер AS , BS , CS и AC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K , L , M и N соответственно. Найдите KL , если $MN = 7$, $NK = 5$, $LN = 2\sqrt{29}$ и $KL = LM$.

4319. Сфера касается ребер AS , CS , AB и BC треугольной пирамиды $SABC$ в точках P , Q , R и T соответственно. Найдите QT , если $QT = 7$, $PQ = PR = 8$, $PT = \sqrt{82}$ и QT на 7 больше, чем RT .

4320. Даны треугольник ABC , в котором $AB = 3$, $AC = 4$, и два шара радиусов 2 и 3 с центрами в точках B и C . Через точку A проходит прямая, касающаяся первого шара в точке M , а второго — в точке K . Найдите MK , если а) $BC = 2$; б) $BC = 5$; в) $BC = 6$.

4321. Сторона правильного треугольника равна 11. Центры трех шаров находятся в вершинах этого треугольника. Сколько существует различных плоскостей, касающихся одновременно трех шаров, если радиусы шаров равны 3, 4, 6?

4322. В шаре радиуса 7 через точку S проведены три равные хорды AA_1 , BB_1 и CC_1 так, что $AS = 8$, $A_1S = 3$, $BS > B_1S$, $CS > C_1S$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $SABC$.

4323. В треугольной пирамиде $AKLM$ выполнено $AK = AL = AM$, $KL = LM = MK$, $\operatorname{tg} \angle AKM = \frac{7}{\sqrt{3}}$. Сфера

радиуса $2\sqrt{3}$ касается луча LA , касается плоскости AKM и касается плоскости KLM в точке, лежащей на луче LM .

Найдите наименьшее возможное значение длины отрезка LM .

4324. Сфера с центром в точке O проходит через вершины A , B и C треугольной пирамиды $ABCD$ и пересекает прямые AD , BD и CD в точках K , L и M соответственно. Известно, что $AD = 10$, $BC : BD = 3 : 2$ и $AB : CD = 4\sqrt{3} : 11$. Проекциями точки O на плоскости ABD , BCD и CAD являются середины ребер AB , BC и AC соответственно. Расстояние между серединами ребер AB и CD равно 13. Найдите периметр треугольника KLM .

4325. Дана треугольная пирамида $ABCD$. На ребре AC взята точка F так, что $CF : FA = 2 : 9$; на ребре CD взята точка M так, что AM — биссектриса угла DAC . Через точки F , M и точку пересечения медиан треугольника DAB проведена плоскость, пересекающая ребро DB в точке H . Известно, что $\frac{CA}{AD} = \frac{DH}{HB} + 1$. Известно также, что отношение площади треугольника ADB к сумме площадей всех граней пирамиды $ABCD$ равно p , а перпендикуляр, опущенный из вершины C на плоскость ABD , равен h . Через точку H проведена плоскость, параллельная плоскости ACB и пересекающая ребра CD и DA в точках K и L соответственно. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду $DKLH$.

4326. Сфера радиуса 13 касается граней $ABCD$, AA_1D_1D и AA_1B_1B куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$. Вторая сфера радиуса 5 касается граней $ABCD$, AA_1D_1D и CC_1D_1D куба и касается первой сферы. На ребре BC взята точка F , на продолжении ребра DC за точку C — точка E так, что $CE = CD$. Плоскость C_1EF пересекает первую сферу по окружности, радиус которой в 2,6 раза больше радиуса окружности, по которой эта плоскость пересекает вторую сферу. Найдите отношение $BF : FC$.

4327. Сфера радиуса $\frac{3}{8}$ вписана в

четырёхугольную пирамиду $SABCD$, у которой основанием служит ромб $ABCD$ такой, что $\angle BAD = 60^\circ$; высота пирамиды, равная 1, проходит через точку K пересечения диагоналей ромба. Докажите, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания AB и AD в некоторых точках M и N таких, что $MN = \frac{4\sqrt{3}}{5}$,

касающаяся сферы в точке, удаленной на равные расстояния от точек M и N , и пересекающая продолжение отрезка SK за точку K в некоторой точке E . Найдите длину отрезка SE .

4328. На гранях двугранного угла с ребром AD лежат точки B и C . Отрезок DE параллелен плоскости треугольника ABC . В пирамиду $BCDE$ вписан шар. Отношение расстояния от его центра до прямой DE к расстоянию от прямой DE до плоскости ABC равно k . Пусть точка B' — проекция точки B на плоскость CDE . Известно, что $\operatorname{tg} \angle B'DE : \operatorname{tg} \angle BDE = l$. Через середину отрезка AD проведена плоскость P , параллельная плоскости ABC . Найдите площадь сечения плоскостью P многогранника $ABCDE$, составленного из треугольных пирамид $ABCD$ и $BCDE$, если известно, что площадь грани ABC равна S , а сумма площадей всех граней пирамиды $BCDE$ равна σ .

4329. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$ и $SA = SB = SC = \sqrt{7}$. В трехгранный угол при вершине C вписана сфера S_1 . Сфера S_2 , радиус которой втрое больше, чем у сферы S_1 , касается сферы S_1 , плоскостей SAC и ABC . При этом отрезок прямой SB , заключенный внутри сферы S_2 , равен

$\frac{6}{\sqrt{7}}$. Найдите радиус сферы S_2 .

4330. На плоскости α , проходящей через центр шара радиуса R , задана окружность с центром O_1 и радиусом r_1 , расположенная внутри шара. Все точки этой окружности соединены прямыми с точкой A , принадлежащей шару и удаленной от плоскости α на расстояние R . Множество отличных от A точек пересечения этих прямых с поверхностью шара является окружностью радиуса r_2 , плоскость которой образует угол φ с плоскостью α . Найдите расстояние между точками A и O_1 .

6. КРУГЛЫЕ ТЕЛА

4331. Высота конуса равна h , а образующая равна l . Найдите радиус основания и площадь осевого сечения.

4332. Определите вид тела, полученного в результате вращения квадрата вокруг его диагонали.

4333. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, если образующая конуса в два раза больше его высоты.

4334. В правильную четырехугольную пирамиду вписан конус (рис. 178). Найдите отношение площади полной поверхности конуса к площади его боковой поверхности, если сторона основания пирамиды равна 4, а угол между высотой пирамиды и плоскостью боковой грани равен 30° .

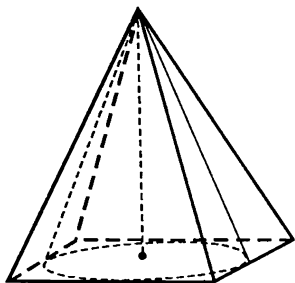


Рис. 178

4335. Найдите радиус сферы, описанной около конуса с радиусом основания r и высотой h .

4336. Боковая поверхность конуса вдвое больше площади его основания. Найдите угол в развертке боковой поверхности конуса.

4337. Два равных конуса имеют общую высоту. Плоскости их оснований параллельны. Докажите, что объем общей части конусов равен четверти объема каждого из них.

4338. Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 2. Через вершину конуса проведено сечение, образующее угол α с плоскостью основания. Найдите площадь сечения.

4339. Найдите площадь осевого сечения тела, полученного при вращении правильного треугольника со стороной a вокруг прямой, проходящей через его центр параллельно одной из сторон.

4340. Радиус основания цилиндра равен r . Плоскость пересекает боковую поверхность цилиндра, не пересекает его оснований и образует угол α с плоскостью основания. Найдите площадь сечения цилиндра этой плоскостью.

4341. Найдите радиус сферы, вписанной в конус с радиусом основания r и высотой h .

4342. Докажите, что объем конуса равен третьей части произведения боковой поверхности на расстояние от центра основания до образующей.

4343. В полушар радиуса R вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании полушара, а другие четыре вершины расположены на его сферической поверхности. Найдите объем куба.

4344. Найдите объем конуса, у которого площадь боковой поверхности

равна $15\sqrt[3]{\pi}$, а расстояние от центра основания до образующей равно $\frac{2,4}{\sqrt[3]{\pi}}$.

4345. Высота конуса равна 20, радиус основания равен 25. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину, если его расстояние от центра основания конуса равно 12.

4346. Квадрат со стороной, равной a , вращается вокруг прямой l , параллельной его плоскости. Расстояние от прямой l до плоскости квадрата равно h , причем ортогональная проекция прямой l на плоскость квадрата проходит через середины его противоположных сторон. Опишите тело вращения. Найдите площадь осевого сечения.

4347. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник со стороной, равной 4. Шар касается плоскости основания конуса в точке M и боковой поверхности конуса. Найдите радиус шара, если расстояние от точки M до оси конуса равно: а) 1; б) 3.

4348. Осевым сечением цилиндра является единичный квадрат. Найдите радиус наименьшей сферы, проходящей через центр квадрата и касающейся боковой поверхности цилиндра.

4349. Найдите ребро куба, одна грань которого принадлежит основанию конуса, а остальные расположены на его боковой поверхности, если радиус основания конуса равен r , а высота равна h .

4350. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник со стороной, равной 1. Найдите радиус сферы, касающейся оси конуса, его основания и боковой поверхности.

4351. Из круга вырезан сектор, представляющий собой четверть круга. Из этого сектора и из оставшейся части круга изготовлены боковые поверхности двух конусов. Найдите отношение высот этих конусов.

4352. Осевым сечением конуса является правильный треугольник со

стороной, равной a . Через ось конуса проведены две перпендикулярные плоскости, которые делят конус на четыре части. Найдите радиус сферы, вписанной в одну из этих частей.

4353. Две противоположные вершины единичного куба совпадают с центрами оснований цилиндра, а остальные вершины расположены на боковой поверхности цилиндра (рис. 179). Найдите высоту и радиус основания цилиндра.

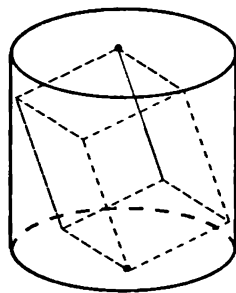


Рис. 179

4354. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, вписанного в единичный куб так, что ось цилиндра лежит на диагонали куба, а каждое основание касается трех граней куба в их центрах.

4355. Площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса под углом 30° к его оси, равна площади осевого сечения. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

4356. Четыре сферы радиуса 1 попарно касаются. Найдите высоту цилиндра, содержащего эти сферы так, что три из них касаются одного основания и боковой поверхности, а четвертая — другого основания цилиндра.

4357. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, если известно, что на его поверхности можно провести три попарно перпендикулярные образующие.

4358. Два противоположных ребра единичного куба лежат на основаниях цилиндра, а остальные вершины — на боковой поверхности цилиндра. Одна из граней куба образует с основаниями цилиндра угол α ($\alpha < 90^\circ$). Найдите высоту цилиндра.

4359. Конус и цилиндр имеют равные основания и равные высоты. Их основания лежат в одной плоскости и касаются друг друга. Две сферы радиусов, равных радиусам оснований конуса и цилиндра, касаются между собой, боковых поверхностей конуса и цилиндра, а также плоскости, содержащей другое основание цилиндра и вершину конуса. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

4360. Высота цилиндра равна h . В каждое основание вписан правильный треугольник со стороной, равной a , причем один из этих треугольников повернут относительно своего центра на угол, равный 60° . Найдите объем многогранника, вершинами которого являются все вершины этих треугольников.

4361. Конус с вершиной S вписан в треугольную пирамиду $SPQR$ так, что окружность основания конуса вписана в основание PQR пирамиды. Известно, что $\angle PSR = 90^\circ$, $\angle SQR = 45^\circ$, $\angle PSQ = 105^\circ$. Найдите отношение площади боковой поверхности конуса к площади основания PQR .

4362. Через ребро BC треугольной пирамиды $PABC$ и точку M — середину ребра PA — проведено сечение BCM . Вершина конуса совпадает с вершиной P пирамиды, а окружность основания вписана в треугольник BCM , касаясь стороны BC в ее середине. Точки касания окружности с отрезками BM и CM являются точками пересечения медиан граней APB и APC . Высота конуса в два раза больше радиуса основания. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади основания пирамиды.

4363. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 60° . Внутри конуса расположены три сферы радиуса 1. Каждая сфера касается двух других, основания конуса и его боковой поверхности. Найдите радиус основания конуса.

4364. Вершины A и B призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежат на оси цилиндра, а остальные вершины — на боковой поверхности цилиндра. Найдите в этой призме двугранный угол с ребром AB .

4365. Основания трех равных конусов расположены в одной плоскости и касаются друг друга. Осевым сечением каждого конуса является правильный треугольник со стороной, равной a . Найдите радиус шара, касающегося боковой поверхности каждого конуса и плоскости, в которой расположены их основания.

4366. Плоское сечение SAB , проходящее через вершину S конуса, имеет площадь 60. Точки A и B , лежащие на окружности основания конуса, делят ее длину в отношении 1 : 5. Найдите объем конуса, если угол SAB равен $\arccos \frac{2}{\sqrt{29}}$.

4367. На высоте конуса как на диаметре построена сфера. Площадь части поверхности сферы, лежащей вне конуса, равна площади основания конуса. Найдите угол в осевом сечении конуса.

4368. Вершины A , B и D_1 куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ лежат на боковой поверхности цилиндра, ось которого параллельна прямой DC_1 . Найдите радиус основания цилиндра, если ребро куба равно a .

4369. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ описана около шара радиуса R . Точки M и N — середины ребер BB_1 и CC_1 . В шар вписан цилиндр так, что его основание лежит в плоскости AMN . Найдите объем цилиндра.

4370. Три конуса, радиусы основания которых равны R и составляют $\frac{3}{4}$ высоты, расположены по одну сторону от плоскости α , а их основания лежат в этой плоскости. Окружности оснований каждого из этих двух конусов касаются. Найдите радиус шара, лежащего между конусами и касающегося как плоскости α , так и всех трех конусов.

4371. Цилиндр описан около шара радиуса R . Точка P расположена внутри цилиндра на его оси и удалена на $\frac{3R}{4}$ от нижнего основания. Через эту точку проведена плоскость α , имеющая с окружностью основания только одну общую точку. В шар вписан конус, основание которого лежит в плоскости α , а вершина расположена выше этой плоскости. Найдите объем конуса.

4372. В правильной пирамиде $PABC$ сторона основания ABC равна a , боковое ребро равно $2a$. Точки P , B и C лежат на боковой поверхности конуса, имеющего вершину в точке A . Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

4373. Вершина A правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ совпадает с вершиной конуса, вершины B и C лежат на боковой поверхности этого конуса, а вершины B_1 и C_1 — на окружности его основания. Найдите отношение объемов конуса и призмы, если $AB_1 : AB = 5 : 1$.

4374. Вершина A основания $ABCD$ правильной пирамиды $PABCD$ совпадает с вершиной конуса, вершины B , D лежат на его боковой поверхности, вершина P — на окружности основания этого конуса, а вершина C — в плоскости его основания. Найдите отношение объема конуса к объему пирамиды.

4375. Четыре сферы радиуса 1 попарно касаются друг друга. Найдите

высоту конуса, содержащего эти сферы так, что все они касаются боковой поверхности и три из них — основания конуса.

4376. В конус помещены пять равных шаров. Четыре из них лежат на основании конуса, причем каждый из этих четырех шаров касается двух других, лежащих на основании, и боковой поверхности конуса. Пятый шар касается боковой поверхности и остальных четырех шаров. Найдите объем конуса, если радиус каждого шара равен R .

4377. На плоскости изображены окружность и две точки A и B_1 , причем точка A лежит внутри окружности (рис. 180). Известно, что окружность является окружностью основания некоторого конуса, точка A лежит на основании этого конуса параллельно его основанию. Постройте проекцию (изображение) точки, в которой отрезок AB пересекает боковую поверхность конуса.

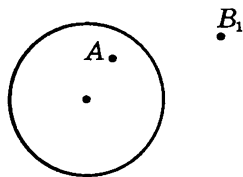


Рис. 180

4378. Внутри цилиндра лежат два шара радиуса r и один шар радиуса $\frac{3r}{2}$

так, что каждый шар касается двух других и боковой поверхности цилиндра, причем первые два равных шара касаются нижнего основания, а третий шар касается верхнего основания цилиндра. Найдите радиус основания цилиндра, если его высота равна $4r$.

4379. Радиус основания цилиндра равен r , а высота равна $5r$. Около цилиндра описан параллелепипед, отно-

шение объема которого к объему цилиндра равно $\frac{5}{\pi}$. Найдите отрезок большей диагонали параллелепипеда, лежащий внутри цилиндра.

4380. Два равных конуса с общей вершиной касаются друг друга и некоторой плоскости α . Пусть l — прямая, по которой пересекаются основания конусов. Найдите угол между прямой l и плоскостью α , если высота каждого конуса равна 2, а радиус основания равен 1.

4381. Правильная четырехугольная пирамида вращается вокруг прямой, проходящей через ее вершину параллельно плоскости основания. Найдите площадь осевого сечения получившегося тела вращения, если сторона основания пирамиды равна a , а высота равна h .

4382. Основания цилиндра и конуса имеют радиус R , лежат в плоскости α и касаются друг друга. Высота каждого из них равна $2R$. Сфера радиуса R касается боковых поверхностей цилиндра и конуса, а также плоскости α . Найдите радиус сферы, касающейся данной сферы, боковых поверхностей цилиндра и конуса, а также плоскости α .

4383. Вершины двух конусов с общим основанием радиуса R и высотами, равными H и h , расположены по разные стороны от основания. Найдите угол и расстояние между двумя образующими этих конусов, если известно, что их концы на окружности основания ограничивают четверть окружности.

4384. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ сторона основания равна a , боковое ребро равно $\frac{5a}{2}$.

Одно основание цилиндра лежит в плоскости PAB , другое вписано в сечение пирамиды. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

4385. Высота цилиндра равна $3r$. Внутри цилиндра расположены три

сферы радиуса r так, что каждая сфера касается двух других и боковой поверхности цилиндра. Две сферы касаются нижнего основания цилиндра, а третья сфера — верхнего основания. Найдите радиус основания цилиндра.

4386. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ каждое ребро равно a . Вершины A и A_1 лежат на боковой поверхности цилиндра, плоскость BCC_1 касается этой поверхности. Ось цилиндра параллельна прямой B_1C . Найдите радиус основания цилиндра.

4387. Две противоположные боковые грани четырехугольной пирамиды $SABCD$ перпендикулярны основанию, высота пирамиды равна $\sqrt{5}$. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AD = BC$), описанная около окружности и такая, что $AB = 6$, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$. Найдите расстояние от точки D до плоскости SAB .

Внутри пирамиды расположен конус так, что окружность его основания вписана в треугольник SCD , а вершина принадлежит грани SAB . Найдите объем конуса.

4388. Три шара, среди которых имеется два одинаковых, касаются плоскости P и, кроме того, попарно касаются друг друга. Вершина конуса принадлежит плоскости P , а ось конуса перпендикулярна этой плоскости. Все три шара лежат вне конуса, причем каждый из них касается некоторой образующей конуса. Найдите косинус угла между образующей конуса и плоскостью P , если известно, что в треугольнике с вершинами в точках касания шаров с плоскостью один из углов равен 150° .

4389. Внутри конуса, касаясь основания, лежат три шара радиусов 4, 4 и 5. Каждый из них касается двух других шаров и некоторой образующей конуса. Найдите радиус основания конуса, если известно, что угол между

плоскостью основания и образующей равен $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4}$.

4390. Точка F лежит на ребре AD правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина), $AF : AD = 1 : 10$. Цилиндр касается боковой поверхностью плоскостей SAB и SAD , одно из оснований цилиндра проходит через точку F , второе основание имеет общую точку с ребром SD . Боковая поверхность цилиндра имеет с высотой SH пирамиды общую точку O , причем $SO = OH$. Найдите отношение объемов цилиндра и пирамиды.

4391. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основанием является трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$), $BC = \frac{4}{5}AD$,

$\angle ASD = \angle CDS = \frac{\pi}{2}$. Все вершины пирамиды лежат на окружностях оснований цилиндра, высота которого равна 2, а радиус основания равен $\frac{5}{3}$. Найдите объем пирамиды.

4392. Два равных конуса имеют общую вершину и касаются по общей образующей. Угол в осевом сечении каждого из конусов равен 60° . Найдите угол между двумя плоскостями, каждая из которых касается конусов, но не проходит через общую образующую.

4393. На плоскости лежат три равных конуса с общей вершиной. Каждый из них касается двух рядом лежащих. Найдите угол при вершине каждого конуса.

4394. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) равна 10. Точки E и F расположены на ребрах DC и BC соответственно, причем $CE = 6$, $CF = 9$. Известно, что для данной пирамиды существует единственный конус, вершина которого совпадает с точкой E , центр основания лежит на прямой SA , а отрезок EF является од-

ной из образующих. Найдите объем этого конуса.

4395. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) известно, что $AB = 4$, высота SO пирамиды равна $\sqrt{\frac{11}{3}}$. Точка D лежит на отрезке SO , причем $SD : DO = 2 : 9$. Цилиндр, ось которого параллельна прямой SA , расположен так, что точка D — центр его верхнего основания, а точка O лежит на окружности нижнего основания. Найдите площадь части верхнего основания цилиндра, лежащей внутри пирамиды.

4396. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребро AB вдвое больше высоты пирамиды. По одну сторону от плоскости грани $ABCD$ расположен цилиндр, окружность основания которого проходит через центр этой грани. Ортогональные проекции цилиндра на плоскости SCD и SBC — прямоугольники с общей вершиной в точке C . Найдите отношение объемов цилиндра и пирамиды.

4397. Внутри единичного куба находятся 8 равных шаров, каждый из которых касается трех соседних граней куба и трех других шаров. Найдите радиус шара, касающегося всех данных 8 шаров.

4398. В правильной четырехугольной призме $ABCA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро равно $\sqrt{14}$, сторона основания $ABCD$ призмы равна 6. Окружность основания конуса вписана в треугольник BC_1D , а вершина конуса лежит в плоскости ABC_1 . Найдите объем конуса.

4399. Окружность основания цилиндра вписана в боковую грань SAB правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина), центр другого основания цилиндра лежит в плоскости SBC . Найдите объем цилиндра, если $AB = 6$, $SB = 5$.

4400. Все вершины правильной пирамиды $PABCD$ лежат на боковой по-

верхности цилиндра, ось которого перпендикулярна плоскости PAB (рис. 181). Найдите радиус основания цилиндра, если $AB = a$.

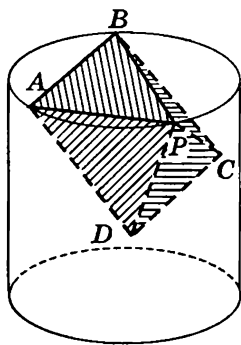


Рис. 181

4401. На сфере, радиус которой равен 2, расположены три окружности радиуса 1, каждая из которых касается двух других. Найдите радиус окружности меньшей, чем данная, которая также расположена на данной сфере и касается каждой из данных окружностей.

4402. Даны правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ и цилиндр, центр симметрии которого лежит на прямой SO (SO — высота пирамиды). Точка F — середина ребра SD , точка E принадлежит апофеме ST , лежащей в грани BSC , причем $TE = 3ES$. Прямоугольник, являющийся одним из осевых сечений цилиндра, расположен так, что две его вершины лежат на прямой AB , а одна из двух других вершин лежит на прямой EF . Найдите объем цилиндра, если $SO = 3$, $AB = 1$.

4403. Два конуса имеют общую вершину, и образующая первого конуса является высотой второго. Угол при вершине осевого сечения первого конуса равен $\arccos \frac{1}{3}$, а второго — 120° .

Найдите угол между образующими, по которым пересекаются боковые поверхности конусов.

4404. Три равных конуса с углом α ($\alpha \leq 120^\circ$) при вершине осевого сече-

ния имеют общую вершину и касаются друг друга внешним образом по образующим k, l, m . Найдите угол между l и k .

4405. Два равных конуса с общей вершиной лежат на плоскости α . Угол между высотой и образующей каждого конуса равен γ , угол между высотами конусов равен β , причем $\beta + \gamma < 90^\circ$. Найдите угол между образующей, по которой один из конусов касается плоскости α , и плоскостью основания другого конуса.

4406. Одна вершина правильного тетраэдра расположена на оси цилиндра, а другие вершины — на боковой поверхности этого цилиндра. Найдите ребро тетраэдра, если радиус основания цилиндра равен R .

4407. Два равных конуса с общей вершиной D расположены по разные стороны от плоскости α и касаются этой плоскости по образующим DE и DF соответственно. Известно, что угол DEF равен ϕ , а угол между прямой пересечения оснований конусов и плоскостью α равен β . Найдите угол между высотой и образующей каждого конуса.

4408. Можно ли точку в пространстве закрыть четырьмя шарами?

7. ОБЪЕМ. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

4409. На боковых ребрах PA, PB, PC (или на их продолжениях) треугольной пирамиды $PABC$ взяты точки M, N, K соответственно. Докажите, что отношение объемов пирамид $PMNK$ и $PABC$ равно $\frac{PM}{PA} \cdot \frac{PN}{PB} \cdot \frac{PK}{PC}$.

4410. Известно, что в некоторую пирамиду можно вписать шар. Докажите, что объем этой пирамиды равен $\frac{1}{3}$ произведения радиуса этого шара на полную поверхность пирамиды.

4411. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды со сторо-

ной основания, равной a , и высотой, равной h .

4412. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и высотой, равной h .

4413. Найдите объем правильной треугольной призмы, все ребра которой равны 1.

4414. Найдите объем правильной треугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и высотой, равной h .

4415. Найдите объем правильной треугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и боковым ребром, равным b .

4416. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и боковым ребром, равным b .

4417. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и боковым ребром, равным b .

4418. Найдите объем правильной треугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и углом бокового ребра с плоскостью основания, равным α .

4419. Найдите объем правильной треугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и углом боковой грани с плоскостью основания, равным β .

4420. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и углом бокового ребра с плоскостью основания, равным α .

4421. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с высотой, равной h , и углом бокового ребра с плоскостью основания, равным α .

4422. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и углом бокового ребра с плоскостью основания, равным α .

4423. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды со сторо-

ной основания, равной a , и углом боковой грани с плоскостью основания, равным β .

4424. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и углом боковой грани с плоскостью основания, равным β .

4425. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с высотой, равной h , и углом боковой грани с плоскостью основания, равным β .

4426. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и углом бокового ребра с плоскостью основания, равным α .

4427. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и углом боковой грани с плоскостью основания, равным β .

4428. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и углом боковой грани с плоскостью основания, равным β .

4429. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и углом боковой грани с плоскостью основания, равным β .

4430. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и высотой, равной h .

4431. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и высотой, равной h .

4432. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и высотой, равной h .

4433. Стороны основания прямого параллелепипеда равны a и b и образуют угол в 30° . Боковая поверхность равна S . Найдите объем параллелепипеда.

4434. Основание призмы — квадрат со стороной, равной a . Одна из бо-

ковых граней — также квадрат, другая — ромб с углом 60° (рис. 182). Найдите полную поверхность призмы.

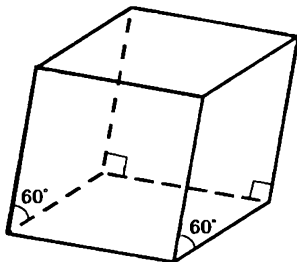


Рис. 182

4435. Высота пирамиды, в основании которой лежит правильный шестиугольник, равна 8. На расстоянии, равном 3, от вершины проведена плоскость, параллельная основанию. Площадь полученного сечения равна 4. Найдите объем пирамиды.

4436. Найдите объем параллелепипеда, две грани которого — ромбы со стороной 1 и острым углом 60° , а остальные грани — квадраты.

4437. Объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен V . Найдите объем пирамиды $ABCC_1$.

4438. Найдите объем правильной треугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и площадью боковой грани, равной Q .

4439. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и площадью боковой грани равной Q .

4440. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и площадью боковой грани, равной Q .

4441. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и углом бокового ребра с плоскостью основания, равным α .

4442. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с высо-

той, равной h , и углом бокового ребра с плоскостью основания, равным α .

4443. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и углом бокового ребра с плоскостью основания, равным α .

4444. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с высотой, равной h , и углом бокового ребра с плоскостью основания, равным α .

4445. Пусть p , q и r — площади трех граней прямоугольного параллелепипеда. Найдите его объем.

4446. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует углы, равные 60° и 30° , с двумя из его ребер. Найдите объем параллелепипеда.

4447. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды, сторона основания которой равна 1, а боковое ребро равно 2.

4448. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с высотой, равной h , и углом боковой грани с плоскостью основания, равным β .

4449. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если его диагональ равна d , а ребра, исходящие из одной вершины, относятся, как $m : n : p$.

4450. Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом, равным α . Найдите объем призмы, если ее большая диагональ равна l и образует с плоскостью основания угол, равный β .

4451. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат со стороной $2\sqrt{3}$. Диагональ боковой грани образует с плоскостью соседней боковой грани угол, равный 30° . Найдите объем параллелепипеда.

4452. Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α . Большая диагональ призмы равна d и составляет с плоскостью основания угол β . Найдите объем призмы.

4453. Развертка боковой поверхности цилиндра есть квадрат со стороной, равной $2\sqrt[3]{\pi}$. Найдите объем цилиндра.

4454. Основания трапеции равны 8 и 2. Углы, прилежащие к большому основанию, равны по 45° . Найдите объем тела, образованного вращением трапеции вокруг большего основания.

4455. На боковом ребре пирамиды взяты две точки, делящие ребро на три равные части. Через них проведены плоскости, параллельные основанию. Найдите объем части пирамиды, заключенной между этими плоскостями, если объем всей пирамиды равен 1.

4456. Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны и равны a , b и c . Найдите объем пирамиды.

4457. Найдите объем правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ образует с плоскостью боковой грани угол 30° , а сторона основания равна a .

4458. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами 1 и 4 и острым углом 60° (рис. 183). Большая диагональ параллелепипеда равна 5. Найдите его объем.

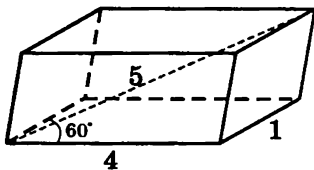


Рис. 183

4459. Найдите объем октаэдра (правильного восьмигранника), ребро которого равно a .

4460. Основанием параллелепипеда служит квадрат. Одна из вершин верхнего основания равноудалена от всех вершин нижнего основания и находится на расстоянии, равном b , от этого основания. Сторона основания

равна a . Найдите полную поверхность параллелепипеда.

4461. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны a и b . Диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости боковой грани, содержащей сторону основания, равную b , под углом 30° . Найдите объем параллелепипеда.

4462. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны a и b . Диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом 60° . Найдите боковую поверхность параллелепипеда.

4463. Найдите объем наклонной треугольной призмы, основанием которой служит равносторонний треугольник со стороной, равной a , если боковое ребро призмы равно стороне основания и наклонено к плоскости основания под углом 60° .

4464. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a . Найдите объем пирамиды, если известно, что ее боковая поверхность в 10 раз больше площади основания.

4465. В основании прямой призмы лежит равносторонний треугольник. Плоскость, проходящая через одну из сторон нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания, наклонена к плоскости нижнего основания под углом, равным φ . Площадь полученного сечения равна Q . Найдите объем призмы.

4466. Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и 2. Найдите его объем.

4467. В вершинах A , B и C равностороннего треугольника ABC со стороной, равной 1, восстановлены к его плоскости перпендикуляры и на них взяты точки A_1 , B_1 и C_1 , находящиеся по одну сторону от плоскости ABC , причем $AA_1 = 4$, $BB_1 = 5$ и $CC_1 = 6$. Найдите объем многогранника $ABCA_1B_1C_1$.

4468. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит ее объем на две равные части. В каком отношении эта плоскость делит боковые ребра пирамиды?

4469. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с радиусом вписанной сферы, равным r , и углом боковой грани с плоскостью основания, равным β .

4470. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с радиусом вписанной сферы, равным r , и углом боковой грани с плоскостью основания, равным β .

4471. Объем пирамиды $ABCD$ равен 1. На ребрах AD , BD , CD взяты соответственно точки K , L и M , причем $2AK = KD$, $BL = 2LD$ и $2CM = 3MD$. Найдите объем многогранника $ABCKLM$.

4472. Найдите объем наклонной треугольной призмы, у которой площадь одной из боковых граней равна S , а расстояние от плоскости этой грани до противоположащего ребра равно d .

4473. В прямом параллелепипеде стороны основания равны a и b , острый угол между ними равен 60° . Большая диагональ основания равна меньшей диагонали параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.

4474. Основание наклонной призмы — параллелограмм со сторонами 3 и 6 и острым углом 45° . Боковое ребро призмы равно 4 и наклонено к плоскости основания под углом 30° . Найдите объем призмы.

4475. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна d и составляет с боковым ребром призмы угол 30° . Найдите объем призмы.

4476. В правильной треугольной призме плоскость, проходящая через сторону одного основания и противоположную ей вершину другого основания, образует с плоскостью основания угол, равный 45° . Площадь сечения равна S . Найдите объем призмы.

4477. В наклонном параллелепипеде проекция бокового ребра на плоскость основания равна 5, а высота равна 12. Сечение, перпендикулярное боковому ребру, есть ромб с площадью, равной 24, и диагональю, равной 8. Найдите боковую поверхность и объем параллелепипеда.

4478. В основании призмы лежит трапеция. Найдите объем призмы, если площади параллельных боковых граней равны S_1 и S_2 , а расстояние между ними равно h .

4479. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, один из углов которого равен 30° . Площадь основания равна 4. Площади двух боковых граней параллелепипеда равны 6 и 12. Найдите объем параллелепипеда.

4480. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм с углом 120° и сторонами, равными 3 и 4. Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Найдите объем параллелепипеда.

4481. Ромб, меньшая диагональ которого равна его стороне, равной 1, вращается около прямой, проходящей через конец большей диагонали перпендикулярно этой диагонали (рис. 184). Найдите объем полученного тела вращения.

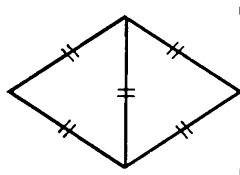


Рис. 184

4482. Металлический шар радиуса, равной $\sqrt[3]{16}$, перелит в конус, боковая поверхность которого в три раза больше площади основания. Найдите высоту конуса.

4483. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует с двумя из его граней углы, равные α и β (рис. 185). Найдите объем параллелепипеда.

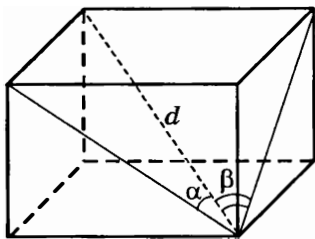


Рис. 185

4484. Каркас куба изготовлен из деревянных брусев, сечением которых является квадрат со стороной 1. Ребро куба равно 8. Найдите объем каркаса.

4485. Площадь основания пирамиды равна 3, объем пирамиды также равен 3. Проведены две плоскости, параллельные основанию пирамиды. Площади получившихся сечений равны 1 и 2. Найдите объем части пирамиды, расположенной между плоскостями.

4486. Объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен V . Найдите объем пирамиды $ACB_1 D_1$.

4487. Объем параллелепипеда равен V . Найдите объем многогранника, вершинами которого являются центры граней данного параллелепипеда.

4488. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и плоским углом при вершине пирамиды, равным φ .

4489. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — единичный куб. Найдите объем общей части треугольных пирамид $ACB_1 D_1$ и $A_1 C_1 B D$.

4490. Докажите, что объем треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние между плоскостью этой грани и противоположащим ей боковым ребром.

4491. Найдите отношение объемов параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и тетраэдра $ACB_1 D_1$.

4492. Ребро PA пирамиды $PABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC и равно 1. В треугольнике ABC угол при вершине A — прямой, а каждый из катетов AB и AC равен 2. Точки M и N — середины AC и BC соответственно. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду $PMNC$.

4493. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Плоскость, проведенная через одну из сторон нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания, образует с плоскостью основания угол, равный 45° . Полученное сечение имеет площадь, равную Q . Найдите боковую поверхность параллелепипеда.

4494. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием 6 и высотой 9. Каждое боковое ребро равно 13. Найдите объем пирамиды.

4495. В треугольной пирамиде боковые ребра взаимно перпендикулярны и равны $\sqrt{70}$, $\sqrt{99}$ и $\sqrt{126}$. Найдите объем и площадь основания пирамиды.

4496. Основание прямого параллелепипеда — ромб, площадь которого равна Q . Площади диагональных сечений равны S_1 и S_2 . Найдите объем параллелепипеда.

4497. Основание наклонной призмы — правильный треугольник со стороной, равной a . Одна из боковых граней призмы перпендикулярна плоскости основания и представляет собой ромб, диагональ которого равна b . Найдите объем призмы.

4498. Основание пирамиды — равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого равен 8. Каждое из боковых ребер пирамиды равно 9. Найдите объем пирамиды.

4499. В шаре радиуса r проведены диаметр AB и три равные хорды AC ,

AD и AF под углом α друг к другу. Найдите объем тела, ограниченного плоскостями треугольников ACD , ADF , ACF , BCD , BDF и BCF .

4500°. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ вписан куб (рис. 186). Все четыре вершины одной из граней куба лежат на основании $ABCD$ пирамиды. Вершины противоположной грани куба лежат на боковых ребрах пирамиды. Известно, что $SA = AB = a$, т. е. боковое ребро пирамиды равно a и равно стороне ее основания. Чему равен объем куба?

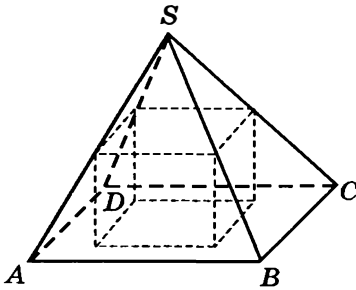


Рис. 186

4501. В правильную треугольную пирамиду $SABC$ вписана правильная треугольная призма $LMNL_1M_1N_1$. Все три вершины основания LMN призмы лежат на боковых ребрах пирамиды. Известно, что $LL_1 = LM$, т. е. высота призмы равна стороне ее основания. Кроме того, $SA = AB = a$, т. е. каждое ребро пирамиды равно a . Чему равен объем призмы?

4502. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4, площади боковых граней равны 9, 10 и 17. Найдите объем призмы.

4503. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $AB = CD = 13$, $BC = 11$, $AD = 21$. Площадь диагонального сечения призмы равна 180. Найдите площадь полной поверхности призмы.

4504. Основанием параллелепипеда служит ромб со стороной, равной a ,

и острым углом в 30° . Диагональ одной боковой грани перпендикулярна плоскости основания, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол в 60° . Найдите полную поверхность и объем параллелепипеда.

4505°. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , а высота, опущенная из вершины основания на противоположную ей боковую грань, равна b . Найдите объем пирамиды.

4506. Основания параллелепипеда — квадраты со стороной b , а все боковые грани — ромбы. Одна из вершин верхнего основания одинаково удалена от всех вершин нижнего основания. Найдите объем параллелепипеда.

4507. Каждое ребро наклонной треугольной призмы равно 2. Одно из боковых ребер образует со смежными сторонами основания углы, равные 60° . Найдите объем и площадь полной поверхности призмы.

4508. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, боковые ребра которой наклонены к плоскости основания под углом, равным α , и удалены от середины противоположной стороны основания на расстояние, равное l .

4509. Около шара радиуса, равного 1, описан конус, высота которого вдвое больше диаметра шара. Найдите отношение полной поверхности конуса к поверхности шара.

4510. Внутри шара проведены две параллельные плоскости по одну сторону от центра на расстоянии 3 друг от друга. Эти плоскости дают в сечении два малых круга, радиусы которых соответственно равны 9 и 12. Найдите объем шара.

4511°. Около правильного тетраэдра описан цилиндр так, что два противоположных ребра тетраэдра являются диаметрами оснований цилиндра. Найдите отношение объема цилиндра к объему тетраэдра.

4512. Двугранный угол при боковом ребре правильной треугольной пи-

рамы равен 2α . Высота пирамиды равна h . Найдите объем конуса, описанного около пирамиды.

4513. В правильную четырехугольную пирамиду вписана сфера, которая касается основания и всех боковых граней. Сфера делит высоту пирамиды в отношении $1 : 3$, считая от вершины пирамиды. Найдите объем пирамиды, если апофема пирамиды равна a .

4514. Высота пирамиды равна 3, площадь основания равна 9. Найдите объем призмы, одно основание которой принадлежит основанию пирамиды, а противоположное основание является сечением пирамиды плоскостью, проходящей на расстоянии, равном 1, от вершины.

4515. В вершинах единичного квадрата восстановлены к его плоскости перпендикуляры и на них по одну сторону от плоскости квадрата взяты точки на расстояниях 2, 4, 6 и 5 от этой плоскости (в порядке обхода). Найдите объем многогранника, вершинами которого являются указанные точки и вершины квадрата.

4516°. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, площади диагональных сечений которого равны $\sqrt{13}$, $2\sqrt{10}$ и $3\sqrt{5}$.

4517. На ребре единичного правильного тетраэдра взята точка, которая делит это ребро в отношении $1 : 2$. Через эту точку проведены две плоскости, параллельные двум граням тетраэдра. Эти плоскости отсекают от тетраэдра две треугольные пирамиды. Найдите объем оставшейся части тетраэдра.

4518. Центр шара единичного радиуса расположен на ребре двугранного угла, равного α . Найдите радиус шара, объем которого равен объему части данного шара, находящейся внутри двугранного угла.

4519. Найдите объем треугольной пирамиды, пять ребер которой равны 2, а шестое равно $\sqrt{6}$.

4520. Найдите объем правильной треугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и радиусом описанной сферы, равным R .

4521. Найдите объем правильной треугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и радиусом вписанной сферы, равным r .

4522. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и радиусом описанной сферы, равным R .

4523. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и площадью боковой грани, равной Q .

4524. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с высотой, равной h , и радиусом описанной сферы, равным R .

4525. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с высотой, равной h , и радиусом вписанной сферы, равным r .

4526. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с высотой, равной h , и площадью боковой грани, равной Q .

4527. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и радиусом описанной сферы, равным R .

4528. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и радиусом вписанной сферы, равным r .

4529. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и радиусом описанной сферы, равным R .

4530. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и площадью боковой грани, равной Q .

4531. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с высотой, равной h , и радиусом описанной сферы, равным R .

4532. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с высо-

той, равной h , и радиусом вписанной сферы, равным r .

4533. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с высотой, равной h , и площадью боковой грани, равной Q .

4534. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и радиусом описанной сферы, равным R .

4535. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и радиусом вписанной сферы, равным r .

4536. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и радиусом описанной сферы, равным R .

4537. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и площадью боковой грани, равной Q .

4538. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с высотой, равной h , и радиусом описанной сферы, равным R .

4539. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с высотой, равной h , и радиусом вписанной сферы, равным r .

4540. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с высотой, равной h , и площадью боковой грани, равной Q .

4541. Найдите объем правильной треугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и углом между боковыми гранями, равным γ .

4542. Найдите объем правильной треугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и плоским углом при вершине пирамиды, равным φ .

4543. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и углом боковой грани с плоскостью основания, равным β .

4544. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и углом между боковыми гранями, равным γ .

4545. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с высотой, равной h , и углом между боковыми гранями, равным γ .

4546. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с высотой, равной h , и плоским углом при вершине пирамиды, равным φ .

4547. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с радиусом описанной сферы, равным R , и углом бокового ребра с плоскостью основания, равным α .

4548. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с радиусом описанной сферы, равным R , и углом боковой грани с плоскостью основания, равным β .

4549. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с радиусом вписанной сферы, равным r , и углом боковой грани с плоскостью основания, равным β .

4550. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и плоским углом при вершине, равным φ .

4551. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и углом между соседними боковыми гранями, равным γ .

4552. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и плоским углом при вершине, равным φ .

4553. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с высотой, равной h , и плоским углом при вершине, равным φ .

4554. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с радиусом описанной сферы, равным R , и углом бокового ребра с плоскостью основания, равным α .

4555. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с площадью боковой грани, равной Q , и углом бокового ребра с плоскостью основания, равным α .

4556. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с площадью боковой грани, равной Q , и углом боковой грани с плоскостью основания, равным β .

4557. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и углом между соседними боковыми гранями, равным γ .

4558. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания, равной a , и плоским углом при вершине, равным ϕ .

4559. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и углом между соседними боковыми гранями, равным ϕ .

4560. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с боковым ребром, равным b , и плоским углом при вершине, равным γ .

4561. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с высотой, равной h , и углом между соседними боковыми гранями, равным γ .

4562. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с высотой, равной h , и плоским углом при вершине, равным ϕ .

4563. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с радиусом описанной сферы, равным R , и углом бокового ребра с плоскостью основания, равным α .

4564. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с площадью боковой грани, равной Q , и углом бокового ребра с плоскостью основания, равным α .

4565. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с площадью боковой грани, равной Q , и углом боковой грани с плоскостью основания, равным β .

4566. Ребро CD пирамиды $ABCD$ равно 1 и перпендикулярно плоскости ABC . Известно также, что $AB = 2$, $BC = 3$ и $\angle ABC = 90^\circ$. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду $ABCD$.

4567. Объем тетраэдра $ABCD$ равен V . На ребрах CD , DB и AB взяты точки K , L и M соответственно (рис. 187), причем $2CK = CD$, $3DL = DB$, $5BM = 2AB$. Найдите объем тетраэдра $KLMD$.

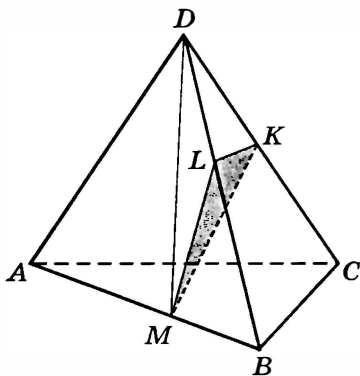


Рис. 187

4568. На ребрах AB , BC и AD тетраэдра $ABCD$ объема V взяты соответственно точки K , L и N , причем $2AK = AB$, $3BL = BC$, $5DN = AD$. Найдите объем тетраэдра $NKLB$.

4569. На ребрах BC , CD и AD тетраэдра $ABCD$ объема V взяты соответственно точки L , M и N , причем $3BL = BC$, $4CM = CD$ и $5DN = AD$. Найдите объем тетраэдра $NMLB$.

4570. На ребрах AB , CD и AD тетраэдра $ABCD$ объема V взяты соответственно точки K , M и N , причем $2AK = AB$, $4CM = CD$ и $5DN = AD$. Найдите объем тетраэдра $KNMB$.

4571. На ребрах AB , BC и CD тетраэдра $ABCD$ объема V взяты соответственно точки K , L и M , причем $2AK = AB$, $3BL = BC$ и $4CN = CD$. Найдите объем тетраэдра $KLMB$.

4572. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной, равной a . Отрезок MN параллелен одной из сторон шестиугольника, равен его стороне и расположен на расстоянии, равном h , от его плоскости. Найдите объем многогранника $ABCDEFMN$.

4573. В конус вписан шар. Отношение объемов конуса и шара равно 2. Найдите отношение полной поверхности конуса к поверхности шара.

4574. Докажите, что из боковых граней четырехугольной пирамиды, основанием которой служит параллелограмм, можно составить треугольную пирамиду, причем ее объем вдвое меньше объема исходной четырехугольной пирамиды.

4575. Высота PO правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ равна 4, а сторона основания $ABCD$ равна 6. Точки M и K — середины отрезков BC и CD . Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду $PMKC$.

4576. На ребре DC треугольной пирамиды $ABCD$ взята такая точка N , что $CN = 2DN$, а на продолжениях ребер CA и CB за точки A и B соответственно — точки K и M , причем $AC = 2AK$ и $MB = 2BC$. В каком отношении плоскость, проходящая через точки M , N , K , делит объем пирамиды $ABCD$?

4577. Основание пирамиды — параллелограмм со сторонами, равными 10 и 18, и площадью, равной 90. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 6. Найдите боковую поверхность пирамиды.

4578. Сфера радиуса $\sqrt{5}$ с центром в точке O касается всех сторон треугольника ABC . Точка касания N делит сторону AB пополам. Точка касания M делит сторону AC так, что $AM = \frac{1}{2}MC$. Найдите объем пирамиды $OABC$, если известно, что $AN = NB = 1$.

4579. Плоскость проходит через вершину A основания треугольной пирамиды $SABC$, делит пополам медиану SK треугольника SAB , а медиану SL треугольника SAC пересекает в точке D такой, что $SD : DL = 1 : 2$. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды?

4580. Правильная треугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через вершину основания и середины двух боковых ребер. Найдите отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания, если известно, что секущая плоскость перпендикулярна одной из боковых граней (укажите, к какой именно).

4581. Основанием пирамиды служит прямоугольник, площадь которого равна S . Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углами, равными 30° и 60° . Найдите объем пирамиды.

4582. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β . Найдите объем пирамиды, если радиус окружности, описанной около треугольника основания, равен R , а высота пирамиды проходит через точку, лежащую внутри треугольника.

4583. Точка K расположена на ребре AD тетраэдра $ABCD$, точка N — на продолжении ребра AB за точку B , а точка M — на продолжении ребра AC за точку C , причем $AK : KD = 3 : 1$, $BN = AB$ и $CM : AC = 1 : 3$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K , M , N . В каком отношении эта плоскость делит объем тетраэдра?

4584. Точка M расположена на ребре CD тетраэдра $ABCD$, точка N — на продолжении ребра AC за точку A , а точка K — на продолжении ребра CB за точку B , причем $DM : MC = 1 : 3$, $AN : AC = 1 : 4$ и $BK : BC = 1 : 3$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K , M , N . В каком отношении эта плоскость делит объем тетраэдра?

4585. Точка M расположена на ребре AD тетраэдра $ABCD$, точка N — на продолжении ребра AC за точку C , а точка K — на продолжении ребра AB за точку B , причем $DM : AM = 1 : 2$,

$CN = 3AC$ и $BK : AB = 1 : 2$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K, M, N . В каком отношении эта плоскость делит объем тетраэдра?

4586. Точка N расположена на ребре BD тетраэдра $ABCD$, точка M — на продолжении ребра AC за точку C , а точка K — на продолжении ребра AB за точку B (рис. 188), причем $BN : ND = 2 : 1$, $AC = 3MC$ и $BK = AB$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K, M, N . В каком отношении эта плоскость делит объем тетраэдра?

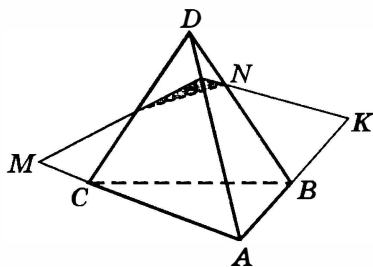


Рис. 188

4587. Известно, что в заданную призму можно вписать сферу. Найдите площадь ее боковой поверхности, если площадь основания равна S .

4588. Внутри куба с ребром, равным 10, рассматриваются следующие множества точек:

- а) точки, удаленные на расстояние, не превышающее 1, от трех граней куба;
- б) точки, удаленные на расстояние, не превышающее 1, от двух граней куба;
- в) точки, удаленные на расстояние, не превышающее 1, от одной грани куба.

Найдите объем тел, состоящих из этих точек.

4589. Найдите высоту треугольной пирамиды, боковые ребра которой попарно перпендикулярны и равны 2, 3 и 4.

4590. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с радиусом

вписанной сферы, равным r , и углом бокового ребра с плоскостью основания, равным α .

4591. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с площадью боковой грани, равной Q , и углом бокового ребра с плоскостью основания, равным α .

4592. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с площадью боковой грани, равной Q , и углом боковой грани с плоскостью основания, равным β .

4593. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с площадью боковой грани, равной Q , и углом между боковыми гранями, равным γ .

4594. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с площадью боковой грани, равной Q , и плоским углом при вершине, равным φ .

4595. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с радиусом описанной сферы, равным R , и углом боковой грани с плоскостью основания, равным β .

4596. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с радиусом описанной сферы, равным R , и углом между соседними боковыми гранями, равным γ .

4597. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с радиусом описанной сферы, равным R , и плоским углом при вершине, равным φ .

4598. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с радиусом вписанной сферы, равным r , и углом бокового ребра с плоскостью основания, равным α .

4599. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с радиусом вписанной сферы, равным r , и углом между соседними боковыми гранями, равным γ .

4600. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с радиусом вписанной сферы, равным r , и плоским углом при вершине, равным φ .

4601. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с площадью боковой грани, равной Q , и углом между соседними боковыми гранями, равным γ .

4602. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с площадью боковой грани, равной Q , и плоским углом при вершине, равным ϕ .

4603. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с радиусом описанной сферы, равным R , и углом боковой грани с плоскостью основания, равным β .

4604. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с радиусом описанной сферы, равным R , и углом между соседними боковыми гранями, равным γ .

4605. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с радиусом описанной сферы, равным R , и плоским углом при вершине, равным ϕ .

4606. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с радиусом вписанной сферы, равным r , и углом бокового ребра с плоскостью основания, равным α .

4607. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с радиусом вписанной сферы, равным r , и углом между соседними боковыми гранями, равным γ .

4608. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с площадью боковой грани, равной Q , и углом между соседними боковыми гранями, равным γ .

4609. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды с площадью боковой грани, равной Q , и плоским углом при вершине, равным ϕ .

4610. В каком отношении делит объем куба плоскость, перпендикулярная его диагонали и делящая диагональ в отношении: а) $2 : 1$; б) $3 : 1$?

4611. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$, $BC = 3$. Отрезок KM параллелен AB и расположен на рассто-

янии 1 от плоскости $ABCD$ и $KM = 5$ (рис. 189). Найдите объем многогранника $ABCDKM$.

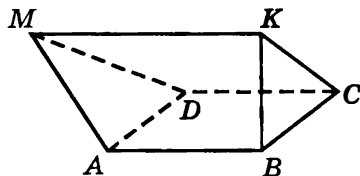


Рис. 189

4612. Пусть P и Q — площади двух граней тетраэдра, a — длина общего ребра, α — двугранный угол между этими гранями, V — объем тетраэдра.

Докажите, что $V = \frac{2}{3} \frac{PQ \sin \alpha}{a}$.

4613. Объем треугольной пирамиды 1. Найдите объем пирамиды с вершинами в точках пересечения медиан граней данной пирамиды.

4614. На диагонали единичного куба взяты точки M и N , а на скрещающейся с ней диагонали грани — точки P и Q . Известно, что $MN = \frac{1}{2}$, а $PQ = \frac{1}{3}$.

Найдите объем тетраэдра $MNPQ$.

4615. Объем тетраэдра $ABCD$ равен V . На ребре AB взяты точки M и N , а на ребре CD — точки P и Q . Известно, что $MN = \alpha \cdot AB$, $PQ = \beta \cdot CD$. Найдите объем тетраэдра $MNPQ$.

4616. Даны прямоугольник $ABCD$ и прямая MN , параллельная AB и удаленная от плоскости прямоугольника на расстояние, равное h . Известно, что $AB = a$, $BC = b$, $MN = c$. Найдите объем многогранника $ABCDMN$.

4617. В треугольной пирамиде $SABC$ на ребре SB взята точка M , делящая отрезок SB в отношении $3 : 5$, считая от точки S . Через точки A и M параллельно медиане BD треугольника ABC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

4618. Противоположные ребра тетраэдра попарно равны. Основание тет-

раэдра — треугольник со сторонами a , b , c . Найдите объем тетраэдра.

4619. Основание пирамиды — квадрат. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом 45° . Среднее по величине боковое ребро равно l . Найдите объем и полную поверхность пирамиды.

4620. В четырехугольной пирамиде $OABCD$ основанием является трапеция $ABCD$, а боковые грани OAD и OBC перпендикулярны основанию. Площадь грани OAB равна 9, площадь грани OCD равна 20, ребро AB равно 3, ребро CD равно 5. Найдите объем пирамиды.

4621. В треугольной пирамиде $OABC$ боковые грани OAC и OAB перпендикулярны основанию. Через вершину O под углом 45° к основанию проведено сечение, пересекающее ребро AB в точке D и ребро AC в точке E , причем DE параллельно BC . Площадь сечения ODE равна 1, площадь грани OBC равна 6, ребро BC равно 4. Найдите объем пирамиды.

4622. Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC , сторона которого равна $\sqrt{3}$. Основанием высоты, опущенной из вершины S , является точка O , лежащая внутри треугольника ABC . Расстояние от точки O до стороны AC равно 1. Синус угла OBA относится к синусу угла OBC , как 2 : 1. Площадь грани SAB равна $\frac{\sqrt{5}}{6}$. Найдите объем пирамиды.

4623. В шаре радиуса, равного $\sqrt{3}$, просверлено цилиндрическое отверстие; ось цилиндра проходит через центр шара, а диаметр основания цилиндра равен радиусу шара. Найдите объем оставшейся части шара.

4624. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с радиусом описанной сферы, равным R , и углом между боковыми гранями, равным γ .

4625. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с радиусом описанной сферы, равным R , и плоским углом при вершине, равным φ .

4626. На ребрах AA_1 и CC_1 куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ отмечены соответственно точки E и F такие, что $AE = 2A_1E$, $CF = 2C_1F$. Через точки B , E и F проведена плоскость, делящая куб на две части. Найдите отношение объема части, содержащей точку B_1 , к объему всего куба.

4627. Основание пирамиды $PABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Точка N — середина ребра AP , точка K — середина медианы PL треугольника BPC , точка M лежит на ребре PB , причем $PM = 5MB$. В каком отношении плоскость, проходящая через точки M , N , K , делит объем пирамиды $PABCD$?

4628. Основание пирамиды $PABCD$ — параллелограмм $ABCD$. На ребрах AB и PC взяты соответственно точки K и M , причем $AK : KB = CM : MP = 1 : 2$. В каком отношении плоскость, проходящая через точки K и M параллельно прямой BD , делит объем пирамиды $PABCD$?

4629. Если поверхность тетраэдра $ABCD$ разрезать вдоль ребер AD , BD и CD , то его разверткой на плоскость ABC будет квадрат со стороной, равной a . Найдите объем тетраэдра.

4630. Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$ (P — вершина) со стороной основания a и боковым ребром a . Сфера с центром в точке O проходит через точку A и касается ребер PB и PD в их серединах. Найдите объем пирамиды $OPCD$.

4631. Основание пирамиды — треугольник со сторонами, равными 6, 5 и 5. Боковые грани пирамиды образуют с плоскостью ее основания двугранные углы, равные 45° . Найдите объем пирамиды.

4632. Даны четыре точки K, L, M, N , не лежащие в одной плоскости. Сфера касается плоскостей KLM и KLN в точках M и N соответственно. Найдите площадь поверхности сферы, если известно, что $ML = 1$, $KM = 2$, $\angle MNL = 60^\circ$, $\angle KML = 90^\circ$.

4633. Основание пирамиды $PABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Точка K — середина ребра AP , точка N расположена на ребре CP , причем $CN : NP = 1 : 3$, точка M расположена на продолжении ребра BC за точку B , причем $BM = 2BC$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки K, M, N . В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

4634. Основание пирамиды $PABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Точка M расположена на ребре PC , причем $PM : MC = 1 : 2$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M параллельно прямым AP и BD . В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

4635. Основание пирамиды $PABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Точки M и K расположены на ребрах AB и CP соответственно (рис. 190), причем $AM : MB = 1 : 3$ и $PK : KC = 2 : 3$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M и K параллельно прямой BD . В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

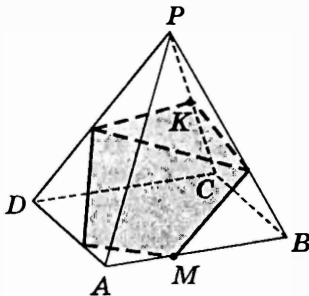


Рис. 190

4636. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с радиусом вписанной сферы, равным r , и углом между боковыми гранями, равным γ .

4637. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с радиусом вписанной сферы, равным r , и плоским углом при вершине, равным ϕ .

4638. Объем пирамиды равен 1. Две плоскости, параллельные AB и CD , делят ребро BC на три равные части. Найдите объем части пирамиды, расположенной между этими плоскостями.

4639. В правильной четырехугольной пирамиде $SBCDE$ с вершиной S боковое ребро равно b , а двугранный угол между боковыми гранями равен α . Найдите объем пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ BD основания и середину бокового ребра SC .

4640. В правильной треугольной пирамиде отношение бокового ребра к стороне основания равно $\frac{\sqrt{5}}{2}$, а радиус

шара, вписанного в эту пирамиду, равен 1. Найдите объем пирамиды.

4641. Две грани треугольной пирамиды — равносторонние треугольники со стороной, равной a . Две другие грани — равнобедренные прямоугольные треугольники. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.

4642. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На лучах $C_1 C$, $C_1 B_1$ и $C_1 D_1$ отложены отрезки $C_1 M$, $C_1 N$ и $C_1 K$, равные соответственно $\frac{5}{2} CC_1$,

$\frac{5}{2} C_1 B_1$, $\frac{5}{2} C_1 D_1$. В каком отношении плоскость, проходящая через точки M, N, K , делит объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$?

4643. На скрещивающихся прямых l и m взяты отрезки AB и CD соответственно. Докажите, что объем пирамиды $ABCD$ не зависит от положе-

ния отрезков AB и CD на этих прямых. Найдите этот объем, если $AB = a$, $CD = b$, а угол и расстояние между прямыми l и m равны соответственно α и c .

4644. Докажите, что плоскость, пересекающая боковую поверхность правильной $2n$ -угольной призмы, но не пересекающая ее оснований, делит ось призмы, ее боковую поверхность и объем в одном и том же отношении.

4645. На ребрах AB , BC , CD и AD тетраэдра $ABCD$ объема V взяты соответственно точки K , L , M и N , причем $2AK = AB$, $3BL = BC$, $4CM = CD$ и $5DN = AD$. Найдите объем тетраэдра $KLMN$.

4646. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC , у которого $AB = 3$, $AC = 2$, $\angle BAC = 45^\circ$. Через точки E , F и G , лежащие на A_1B_1 , A_1C_1 и AB соответственно, проведено сечение, причем $A_1E = 2$, $A_1F = 1$, $AG = 1$. Найдите объем той части призмы, которая содержит ребро BB_1 , если $BB_1 = 4$.

4647. Радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, равен r , а двугранный угол при боковом ребре равен α . Найдите объем пирамиды, вершины которой находятся в центре вписанного шара и точках его касания с боковыми гранями исходной пирамиды.

4648. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$, точки M и N — середины ребер SC и SD соответственно. Прямые SA , BN и CN попарно перпендикулярны. Найдите объем пирамиды, если $SA = a$, $BM = b$, $CN = c$.

4649. Докажите, что плоскость, проходящая через середины двух противоположных ребер любой треугольной пирамиды, делит ее объем пополам.

4650. Точки M и N — середины ребер AA_1 и CC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Прямые A_1C , B_1M и

BN попарно перпендикулярны. Найдите объем параллелепипеда, если известно, что $A_1C = a$, $B_1M = b$, $BN = c$.

4651. В треугольной пирамиде два противоположных ребра равны 12 и 4, а остальные ребра равны 7. В пирамиду вписана сфера. Найдите расстояние от центра этой сферы до ребра, равного 12.

4652. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) $AB = 3\sqrt{2}$, высота пирамиды равна 8. Сечения пирамиды двумя параллельными плоскостями, одна из которых проходит через точку A , а другая — через точки B и D , имеют равные площади. В каком отношении делят ребро SC плоскости сечений? Найдите расстояние между плоскостями сечений и объемы многогранников, на которые пирамида разбивается этими плоскостями.

4653. Точки M , N , K — середины ребер AB , BC , DD_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

1) Проведите сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки M , N , K .

2) В каком отношении эта плоскость делит ребро CC_1 и диагональ DB_1 ?

3) В каком отношении эта плоскость делит объем параллелепипеда?

4654. Объем пирамиды $ABCD$ равен 5. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке M . При этом $DM : MC = 2 : 3$. Найдите площадь сечения пирамиды указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины A равно 1.

4655. На ребрах BC и DC треугольной пирамиды $ABCD$ взяты соответственно точки N и K , причем $CN = 2BN$, $DK : KC = 3 : 2$. Известно, что M — точка пересечения медиан треугольника ABD . В каком отношении плоскость, проходящая через точки M , N , K , делит объем пирамиды $ABCD$?

4656. В пирамиде $ABCD$ через середины K и N ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро AB в точке M , а ребро CD — в точке L . Площадь четырехугольника $KLMN$ равна 16, а отношение отрезка AM к отрезку MB равно 0,5. Вычислите расстояние от вершины A до плоскости $KLMN$, если объем многогранника $NACLK$ равен 8.

4657. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром b . Первая сфера с центром в точке O_1 касается плоскостей SAB и SAC в точках B и C , а вторая сфера с центром в точке O_2 касается плоскостей SAC и SBC в точках A и B . Найдите объем пирамиды SO_1BO_2 .

4658. Точки K , M и N расположены соответственно на ребрах BC , CD и AD тетраэдра $ABCD$ (рис. 191), причем $BK:KC = 2:3$, $CM:MD = 1:2$ и $AN:ND = 3:1$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K , M , N . В каком отношении эта плоскость делит объем тетраэдра?

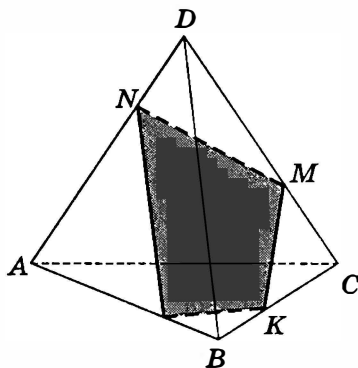


Рис. 191

4659. В правильной пирамиде $SABC$ (S — вершина) точка E — середина апофемы, лежащей в грани SBC , а точки F , L и M лежат на ребрах AB , AC и SC соответственно, причем $AL =$

$= \frac{1}{10} AC$. Известно, что $EFLM$ — равно-

бедренная трапеция с основанием EF , равным $\sqrt{7}$. Найдите объем пирамиды.

4660. На ребре SB пирамиды $SABC$ выбраны точки D и E так, что $SD = DE = 1$, $BE = 2$. Сечения пирамиды плоскостями, перпендикулярными ребру SB и проходящими через точки D и E , имеют площади 5 и 16 соответственно, причем первое из этих сечений — треугольник, одна из вершин которого делит ребро SA в отношении $2:1$, считая от вершины S . Найдите объем пирамиды.

4661. На продолжении за точку A_1 ребра AA_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (ABC — основание) взята точка M . Через точку M и точку K — середину ребра BC — проведена плоскость α , пересекающая ребро AC в точке K_1 так, что $\angle KK_1M = \arctg \sqrt{55}$. Известно, что сечение призмы плоскостью α — пятиугольник $KK_1K_2K_3K_4$, у которого $K_1K_2 = \frac{7}{2}$,

$KK_1 = \frac{\sqrt{14}}{2}$, $K_2K_3 = \frac{3\sqrt{14}}{8}$. Найдите

объем призмы.

4662. В треугольной пирамиде $ABCD$ суммы трех плоских углов при каждой из вершин B и C равны 180° и $AD = BC$. Найдите объем пирамиды, если площадь грани BCD равна 100, а расстояние от центра описанного шара до плоскости основания ABC равно 3.

4663. В основании пирамиды $PQRST$ лежит четырехугольник $QRST$, у которого стороны QT и RS параллельны, сторона ST равна 4, сторона RS равна 2, а угол RST равен 60° . Ребро PS равно $4\sqrt{2}$. Найдите объем

пирамиды, если известно, что через прямые QT и RS можно провести две плоскости, не совпадающие с основанием пирамиды и пересекающие пирамиду по равным четырехугольникам.

4664. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$, точка пересечения диагоналей которого есть ортогональная проекция вершины S на плоскость $ABCD$. Точки E и F выбраны на ребрах BS и BC соответственно так, что $BE = \frac{1}{4}BS$, $BF = \frac{1}{3}BC$. Точки P и Q расположены на прямых AE и SF так, что прямая PQ перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 3, $PQ = 12$. Найдите объем пирамиды.

4665. Треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с нижним основанием ABC и боковыми ребрами AA_1 , BB_1 и CC_1 рассечена плоскостью, проходящей через точки E , F , C , где E — середина ребра AA_1 , точка F лежит на ребре BB_1 , причем $\frac{BF}{FB_1} = \frac{1}{2}$. Найдите объем части призмы $ABCA_1B_1C_1$, заключенной между секущей плоскостью и нижним основанием призмы, если известно, что объем призмы равен V .

4666. Основанием пирамиды $SABCD$ является трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такими, что $BC : AD = 2 : 3$. Диагонали трапеции пересекаются в точке E , а центр O вписанной в пирамиду сферы лежит на отрезке SE и делит его в отношении $SO : OE = 5 : 2$. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если площадь боковой грани SBC равна 12.

4667. На ребре AC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка K так, что $AK = \frac{1}{4}$, $CK = \frac{3}{4}$. Через точку K проведена плоскость, образующая с плоскостью ABC угол $\arctg \frac{7}{6}$ и пересекающая призму на два многогранника, площади поверхностей которых равны. Найдите объем призмы, если известно, что около одного из этих многогранников можно описать сферу, а около другого — нет.

4668. В треугольной пирамиде $ABCD$ известно, что $CD = a$, а перпендикуляр, опущенный из середины ребра AB на CD , равен b и образует равные углы α с гранями ACD и BCD . Найдите объем пирамиды.

4669. Объем тетраэдра $ABCD$ равен V . На ребрах AB , BC , CD и DA взяты соответственно точки K , L , M и N , причем $AK = \frac{1}{3}AB$, $BL = \frac{1}{4}BC$, $CM = \frac{1}{5}CD$, $DN = \frac{1}{6}DA$. Найдите объем тетраэдра $KLMN$.

4670. В пирамиде $ABCD$ прямая, пересекающая ребра AC и BD и перпендикулярная им, проходит через середину ребра BD . Грань ADB равновелика грани BDC , а площадь грани ADC в два раза больше площади грани BDC . Внутри пирамиды есть точка M , сумма расстояний от которой до вершин B и D равна сумме расстояний до всех граней пирамиды. Найдите расстояние от точки M до вершины B , если $AC = \sqrt{6}$, а $BD = 1$.

4671. В пирамиде $ABCD$ грани ADC и BDC равновелики, а сумма площадей граней ADB и ABC в три раза больше площади грани ADC . Радиус шара, вписанного в пирамиду, в восемь раз меньше суммы расстояний от центра шара до вершин A и B . Найдите двугранный угол, образованный гранями ADB и ABC .

4672. Объем правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен V . Точка N — центр грани BB_1C_1C . Вторая призма симметрична призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно прямой AN , и объем общей части этих призм равен $\frac{2V}{5}$. Найдите отношение $AA_1 : AB$, если известно, что $AA_1 < \sqrt{3}AB$.

4673. В пирамиде $ABCD$ проведено сечение $KMLN$ так, что точка K лежит на ребре AD , точка M — на ребре DC , точка N — на ребре AB , точка L — на

ребре BC , O — точка пересечения диагоналей KL и MN четырехугольника $KMLN$. Сечение $KMLN$ делит пирамиду на две части. Найдите отношение объемов этих частей, если известны следующие соотношения между длинами отрезков:

$$4OL = 3OK, 25ON = 24OM, \\ DK \cdot NA - KA \cdot BN = KA \cdot NA.$$

4674. Все высоты пирамиды $ABCD$, грани которой являются остроугольными треугольниками, равны между собой. Известно, что $AB = 9$, $BC = 13$, а угол ADC равен 60° . Найдите ребро BD .

4675. Отрезок PQ параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $KLMN$, причем $KL = 1$, $PQ = 3$. Все стороны прямоугольника $KLMN$ и отрезки KP , LP , NQ , MQ , PQ касаются некоторого шара. Найдите объем этого шара.

4676. Отрезок EF параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $ABCD$, причем $EF = 3$, $BC = 5$. Все стороны прямоугольника $ABCD$ и отрезки AE , BE , CF , DF , EF касаются некоторого шара. Найдите площадь поверхности этого шара.

4677. Объем пирамиды $SABC$ равен V . Через точки M и N , лежащие на ребрах AS и AB соответственно, и внутреннюю точку P грани ABC проведена плоскость, пересекающая прямую CS в точке L (рис. 192). Пусть D и E — точ-

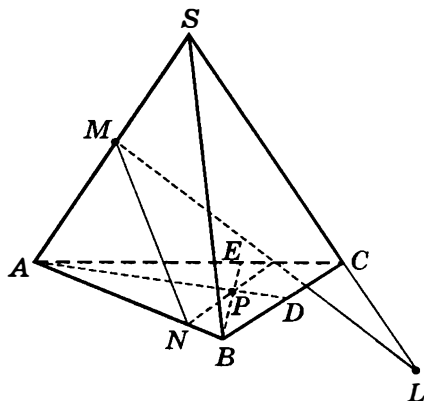


Рис. 192

ки пересечения прямых AP и BP с ребрами BC и AC соответственно. Известно, что $AN = NC$, $AM = MS$, $AP = 3PD$ и $BP = 2PE$. Найдите объем пирамиды $ACLN$.

8. ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ. МЕТОД КООРДИНАТ

4678. Через точку $M(-2; 0; 3)$ проведите плоскость, параллельную плоскости $2x - y - 3z + 5 = 0$.

4679. Найдите угол между прямой, проходящей через точки $A(-3; 0; 1)$ и $B(2; 1; -1)$, и прямой, проходящей через точки $C(-2; 2; 0)$ и $D(1; 3; 2)$.

4680. Даны точки $A(-3; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$, $C(-2; 2; 0)$ и $D(1; 3; 2)$. Найдите угол между прямыми AB и CD .

4681. Даны точки $A(2; -1; 0)$, $B(3; 2; 1)$, $C(1; 2; 2)$ и $D(-3; 0; 4)$. Найдите угол между прямыми AB и CD .

4682. Найдите острый угол между плоскостями $2x - y - 3z + 5 = 0$ и $x + y - 2 = 0$.

4683. Через середину отрезка с концами в точках $P(-1; 2; 5)$ и $Q(3; -4; 1)$ проведите плоскость, перпендикулярную прямой, проходящей через точки $A(0; -2; -1)$ и $B(3; 2; -1)$.

4684. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 2, 3 и 4. Найдите угол между его диагоналями.

4685. Высота AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ вдвое больше каждой из сторон основания. Найдите угол между прямыми BD_1 и AM , где M — точка пересечения диагоналей грани DCC_1D_1 .

4686. Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Докажите, что вектор $\vec{c}$ перпендикулярен вектору $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$.

4687. Даны три некомпланарных вектора. Существует ли четвертый вектор, перпендикулярный трем данным?

4688. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в котором $AB = 4$, $AD = 2$, $AA_1 = 6$. Точка N — середина ребра CD , точка M расположена на ребре CC_1 , причем $C_1 M : CM = 1 : 2$, K — точка пересечения диагоналей грани $AA_1 D_1 D$. Найдите угол между прямыми KM и $A_1 N$.

4689. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в котором $AB = 4$, $AD = 6$, $AA_1 = 2$. Точки F и K расположены на ребрах AD и $B_1 C_1$ соответственно, причем $AF : FD = C_1 K : KB_1 = 1 : 2$, P — точка пересечения диагоналей грани $ABCD$. Найдите угол между прямыми PK и $B_1 F$.

4690. Дан тетраэдр $ABCD$. Все плоские углы при вершине D — прямые; $DA = 1$, $DB = 2$, $DC = 3$. Найдите медиану тетраэдра, проведенную из вершины D .

4691. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На отрезках AB_1 и BC_1 взяты точки P и Q , причем $AP : PB_1 = C_1 Q : QB = 2 : 1$. Докажите, что отрезок PQ перпендикулярен прямым AB_1 и $C_1 B$, найдите его длину, если ребро куба равно a .

4692. Проведите плоскость через точки $A(-3; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$ и $C(-2; 2; 0)$.

4693. Даны точки $A(1; 0; 1)$, $B(-2; 2; 1)$, $C(2; 0; 3)$. Найдите уравнение плоскости ABC .

4694. Даны точки $A(1; 0; 1)$, $B(-2; 2; 1)$, $C(2; 0; 3)$ и $D(0; 4; -2)$. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC .

4695. Даны точки $A(1; 0; 1)$, $B(-2; 2; 1)$, $C(2; 0; 3)$ и $D(0; 4; -2)$. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC .

4696. Даны точки $A(1; 0; 1)$, $B(-2; 2; 1)$, $C(2; 0; 3)$ и $D(0; 4; -2)$. Найдите острый угол между плоскостями ABC и BCD .

4697. Даны точки $M(2; -5; 0)$, $N(3; 0; 4)$, $K(-2; 2; 0)$. Найдите уравнение плоскости MNK .

4698. Даны точки $M(2; -5; 0)$, $N(3; 0; 4)$, $K(-2; 2; 0)$ и $L(3; 2; 1)$. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку L параллельно плоскости MNK .

4699. Даны точки $M(2; -5; 0)$, $N(3; 0; 4)$, $K(-2; 2; 0)$ и $L(3; 2; 1)$. Найдите расстояние от точки L до плоскости MNK .

4700. Даны точки $M(2; -5; 0)$, $N(3; 0; 4)$, $K(-2; 2; 0)$ и $L(3; 2; 1)$. Найдите острый угол между плоскостями MNK и NKL .

4701. Даны точки $A(-3; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$, $C(-2; 2; 0)$. Найдите уравнение плоскости ABC .

4702. Даны точки $A(-3; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$, $C(-2; 2; 0)$ и $D(1; 3; 2)$. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC .

4703. Даны точки $A(-3; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$, $C(-2; 2; 0)$ и $D(1; 3; 2)$. Найдите острый угол между плоскостями ABC и BCD .

4704. Даны точки $A(-3; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$, $C(-2; 2; 0)$ и $D(1; 3; 2)$. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC .

4705. Даны точки $A(-3; 0; 1)$ и $D(1; 3; 2)$. Найдите параметрические уравнения прямой AD .

4706. Даны точки $A(2; -1; 0)$, $B(3; 2; 1)$, $C(1; 2; 2)$. Найдите уравнение плоскости ABC .

4707. Даны точки $A(2; -1; 0)$, $B(3; 2; 1)$, $C(1; 2; 2)$ и $D(-3; 0; 4)$. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC .

4708. Даны точки $A(2; -1; 0)$, $B(3; 2; 1)$, $C(1; 2; 2)$ и $D(-3; 0; 4)$. Найдите острый угол между плоскостями ABC и BCD .

4709. Даны точки $A(2; -1; 0)$, $B(3; 2; 1)$, $C(1; 2; 2)$ и $D(-3; 0; 4)$. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC .

4710. Даны точки $A(2; -1; 0)$ и $D(-3; 0; 4)$. Найдите параметрические уравнения прямой AD .

4711. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны a , b и c . Найдите угол между скрещивающимися диагоналями двух граней с общим ребром a .

4712. В тетраэдре $ABCD$ известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$, $AD = DB = 2$, $DC = 4$. Найдите медиану тетраэдра, проведенную из вершины D .

4713. (Формула Лейбница.) Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC , O — произвольная точка пространства. Докажите, что

$$OM^2 = \frac{1}{3}(OA^2 + OB^2 + OC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + AC^2).$$

4714. Непересекающиеся диагонали двух смежных граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами α и β . Найдите угол между этими диагоналями.

4715. Дан тетраэдр $ABCD$, в котором $AB = BD = 3$, $AC = CD = 5$, $AD = BC = 4$. Найдите AM , где M — точка пересечения медиан грани BCD .

4716. Известно, что $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — некопланарные векторы. Докажите, что векторы $\vec{m} = -3\vec{a} + 4\vec{b} - 7\vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$ и $\vec{p} = -2\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ компланарны.

4717. Известно, что $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — некопланарные векторы. Докажите, что векторы $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ и $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}$ также некопланарны.

4718. Докажите, что для любых четырех точек пространства верно равенство $\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$.

4719. Составьте параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-2; 0; 3)$ перпендикулярно плоскости, проходящей через точки $A(-3; 0; 1)$, $P(-1; 2; 5)$ и $Q(3; -4; 1)$.

4720. Найдите расстояние от точки $D(1; 3; 2)$ до плоскости, проходящей через точки $A(-3; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$ и $C(-2; 2; 0)$.

4721. Составьте параметрические уравнения прямой пересечения плоскостей $2x - y - 3z + 5 = 0$ и $x + y - 2 = 0$.

4722. Даны точки $A(1; 0; 1)$, $B(-2; 2; 1)$, $C(2; 0; 3)$ и $D(0; 4; -2)$. Найдите угол между прямой AB и плоскостью BCD .

4723. Даны точки $M(2; -5; 0)$, $N(3; 0; 4)$, $K(-2; 2; 0)$ и $L(3; 2; 1)$. Найдите угол между прямой MN и плоскостью NKL .

4724. В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$, где AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 — параллельные ребра, плоскость P проходит через диагональ A_1C_1 грани куба и середину ребра DD_1 . Найдите расстояние от середины ребра CD до плоскости P , если ребро куба равно 4.

4725. В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$, где AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 — параллельные ребра, плоскость P проходит через противоположные вершины A_1 , C и середину ребра D_1C_1 . Найдите расстояние от вершины D_1 до плоскости P , если ребро куба равно 6.

4726. Основанием пирамиды $HPQR$ является равносторонний треугольник PQR , сторона которого равна $2\sqrt{2}$. Боковое ребро HR перпендикулярно плоскости основания и равно 1. Найдите угол и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку H и середину ребра QR , а другая проходит через точку R и середину ребра PQ .

4727. Основанием пирамиды $HPQR$ является равнобедренный прямоугольный треугольник PQR , гипотенуза PQ которого равна $2\sqrt{2}$. Боковое ребро HR перпендикулярно плоскости основания и равно 1. Найдите угол и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых

проходит через точку H и середину ребра PR , а другая проходит через точку R и середину ребра PQ .

4728°. Каждое ребро треугольной пирамиды $PABC$ равно 1; BD — высота треугольника ABC . Равносторонний треугольник BDE лежит в плоскости, образующей угол φ с ребром AC , причем точки P и E лежат по одной сторону от плоскости ABC . Найдите расстояние между точками P и E .

4729. Найдите угол между прямой пересечения плоскостей $2x - y - 3z + 5 = 0$ и $x + y - 2 = 0$ и плоскостью, проходящей через точки $M(-2; 0; 3)$, $N(0; 2; 2)$ и $K(3; -3; 1)$.

4730. На диагоналях D_1A , A_1B , B_1C , C_1D граней куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты соответственно точки M , N , P , Q , причем $D_1M : D_1A = BN : BA_1 = B_1P : B_1C = DQ : DC_1 = \mu$, а прямые MN и PQ взаимно перпендикулярны. Найдите μ .

4731. Через прямую

$$\frac{x-1}{2} = -\frac{y}{3} = 3-z$$

проведите плоскость, параллельную прямой пересечения плоскостей $4x + 5z - 3 = 0$ и $2x + y + 2z = 0$.

4732. Найдите расстояние между прямой, проходящей через точки $A(-3; 0; 1)$ и $B(2; 1; -1)$, и прямой, проходящей через точки $C(-2; 2; 0)$ и $D(1; 3; 2)$.

4733. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = 3$, $BC = 2$, $CC_1 = 4$. На ребре AB взята точка M , причем $AM : MB = 1 : 2$; K — точка пересечения диагоналей грани $CC_1 D_1 D$. Найдите угол и расстояние между прямыми $D_1 M$ и $B_1 K$.

4734. Даны точки $A(1; 0; 1)$, $B(-2; 2; 1)$, $C(2; 0; 3)$ и $D(0; 4; -2)$. Найдите расстояние между прямыми AB и CD .

4735. Даны точки $M(2; -5; 0)$, $N(3; 0; 4)$, $K(-2; 2; 0)$ и $L(3; 2; 1)$. Най-

дите расстояние между прямыми MN и KL .

4736. Даны точки $A(-3; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$, $C(-2; 2; 0)$ и $D(1; 3; 2)$. Найдите расстояние между прямыми AB и CD .

4737. Даны точки $A(2; -1; 0)$, $B(3; 2; 1)$, $C(1; 2; 2)$ и $D(-3; 0; 4)$. Найдите расстояние между прямыми AB и CD .

4738. Найдите расстояния между скрещивающимися медианами двух граней правильного тетраэдра со стороны a .

4739. Через точку $M(-2; 0; 3)$ проведите прямую, пересекающую прямые

$$\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 3, \\ z = -2 + t \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 2x - 2y - z - 4 = 0, \\ x + 3y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

4740. Даны точки $A(1; 0; 1)$, $B(-2; 2; 1)$, $C(2; 0; 3)$ и $D(0; 4; -2)$. Найдите параметрические уравнения прямой, проходящей через начало координат и пересекающей прямые AB и CD .

4741. Даны точки $M(2; -5; 0)$, $N(3; 0; 4)$, $K(-2; 2; 0)$ и $L(3; 2; 1)$. Найдите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $P(1; 0; 1)$ и пересекающей прямые

$$\begin{cases} x - y - z - 2 = 0, \\ 2x + y = 0, \\ z = -2 + t \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 0. \end{cases}$$

4742. В правильной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона основания равна

4а, боковое ребро равно a . Точки D и E — середины ребер A_1B_1 и NC . Отрезок MN с концами на прямых AC и BB_1 пересекает прямую DE и перпендикулярен ей. Найдите длину этого отрезка.

4743. На ребрах AA_1 , AB , B_1C_1 и BC единичного куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ взяты точки K , L , M и N соответственно так, что $AL = \frac{2}{3}$, $B_1M = \frac{1}{4}$, $CN = \frac{3}{10}$. Определите, какое из ребер, AB или AD , пересекает плоскость, параллельную отрезку ML и содержащую отрезок KN . В каком отношении это ребро делится плоскостью?

4744. Найдите угол между двумя скрещивающимися медианами двух граней правильного тетраэдра (рис. 193, а, б).

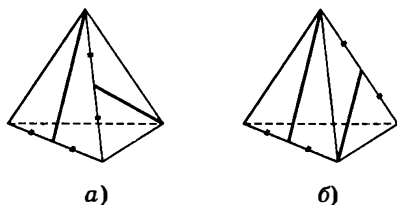


Рис. 193

9. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА И ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

4745. Докажите, что общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых есть наименьшее из расстояний между точками этих прямых.

4746. Докажите, что угол наклона с плоскостью есть наименьший из углов, образованных этой наклонной с прямыми плоскости.

4747. Докажите, что сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего.

4748. Докажите, что сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360° .

4749. Дан куб с ребром 1. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки до его вершин не меньше $4\sqrt{3}$.

4750. Сфера радиуса 2 пересечена плоскостью, удаленной от центра на расстояние, равное 1. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности сферы между двумя наиболее удаленными точками сечения.

4751. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного куба между его противоположными вершинами.

4752. Докажите, что плоский угол выпуклого четырехгранного угла меньше суммы трех остальных.

4753. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, основания которых являются квадратами, а каждая из боковых граней имеет периметр 6. Найдите среди них параллелепипед с наибольшим объемом и вычислите этот объем.

4754. Найдите высоту и радиус основания цилиндра наибольшего объема, вписанного в сферу радиуса R .

4755. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен 4, а основания являются квадратами. Найдите среди них параллелепипед с наименьшим периметром боковой грани и вычислите этот периметр.

4756. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен $\frac{1}{2}$, а одна из боковых граней является квадратом. Найдите среди них параллелепипед с наименьшим периметром основания и вычислите этот периметр.

4757. Найдите наибольший возможный объем цилиндра, вписанного

в конус, высота которого равна 27 и радиус основания равен 9.

4758. Найдите наибольший объем конуса с образующей, равной a .

4759. Найдите радиус основания цилиндра наибольшего объема, вписанного в конус, радиус основания которого равен 3.

4760. Из куска металла, имеющего форму треугольной пирамиды, боковые грани которой образуют равные двугранные углы с плоскостью основания, а высота проходит внутри пирамиды, выточен круговой конус максимального объема с той же вершиной. Найдите объем сточенного металла, если стороны основания пирамиды равны 13, 14 и 15, а высота равна 24.

4761. В каких пределах может изменяться плоский угол трехгранного угла, если два других плоских угла соответственно равны: а) 70° и 100° ; б) 130° и 150° ?

4762. Радиус основания и высота цилиндра равны соответственно r и h . Найдите длину кратчайшего по боковой поверхности цилиндра между диаметрально противоположными точками разных оснований.

4763. Пусть a , b и c — стороны параллелепипеда, d — одна из его диагоналей. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3} d^2.$$

4764. В пространстве рассматриваются два отрезка AB и CD , не лежащие в одной плоскости. Пусть M и K — середины этих отрезков. Докажите, что

$$MK < \frac{1}{2} (AD + BC).$$

4765. Докажите, что площадь любой грани тетраэдра меньше суммы площадей трех остальных его граней.

4766. Периметр равнобедренного треугольника равен P . Каковы должны быть длины его сторон, чтобы объем фигуры, полученной вращени-

ем этого треугольника вокруг основания, был наибольшим?

4767. Все плоские углы трехгранного угла прямые (рис. 194). Докажите, что любое его сечение, не проходящее через вершину, есть остроугольный треугольник.

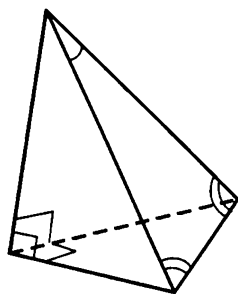


Рис. 194

4768. В пирамиде $PABCD$ с основанием $ABCD$ известны плоские углы при вершине P : $\angle APB = 30^\circ$, $\angle BPC = 40^\circ$, $\angle CPD = 50^\circ$, $\angle DPA = 80^\circ$. В каких пределах могут меняться углы $\angle APC$ и $\angle BPD$?

4769. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного правильного тетраэдра между серединами его противоположных ребер.

4770. Радиус основания конуса и образующая равны соответственно $\frac{2}{3}$

и 2. Найдите длину кратчайшего замкнутого пути, пересекающего все образующие конуса и проходящего через конец одной из них, принадлежащий основанию.

4771. Существует ли треугольная пирамида, высоты которой равны 1, 2, 3 и 6?

4772. В сферу радиуса R вписан цилиндр. Найдите наибольшее значение боковой поверхности цилиндра и отношение его высоты к радиусу сферы в этом случае.

4773. Вокруг сферы радиуса r описан прямой круговой конус. Найдите

наименьшее значение объема конуса и отношение его высоты к радиусу сферы в этом случае.

4774. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно a . На диагоналях $D_1 A$ и $A_1 B$ взяты соответственно точки M и N , причем $D_1 M : D_1 A = NB : A_1 B = 1 : 3$. Найдите расстояние от вершины C до прямой MN .

4775. Ребро правильного октаэдра равно a . Найдите кратчайшее расстояние по поверхности октаэдра между серединами двух его параллельных ребер.

4776. Докажите, что сумма углов пространственного четырехугольника не превосходит 360° .

4777. Найдите высоту и радиус основания конуса наибольшего объема, вписанного в сферу радиуса R .

4778. Сторона основания ABC правильной пирамиды $PABC$ равна a , боковое ребро равно b . На каком расстоянии от прямой BC следует провести сечение пирамиды, параллельное ребрам BC и PA , чтобы площадь его была наибольшей из возможных?

4779. В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида. Каков наименьший возможный объем этой пирамиды?

4780. В основании треугольной пирамиды $NKLM$ лежит правильный треугольник KLM . Высота пирамиды, опущенная из вершины N , проходит через середину ребра LM . Известно, что $KL = a$, $KN = b$. Пирамиду пересекает плоскость β , параллельная ребрам KN и LM . На каком расстоянии от вершины N должна находиться плоскость β , чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была наибольшей?

4781. Сколько существует различных пирамид, все ребра которых равны 1?

4782. Докажите, что сумма плоских углов трехгранного угла меньше 360° .

4783. В правильной четырехугольной пирамиде расположены два оди-

наковых шара радиуса r , центры которых находятся на оси симметрии пирамиды. Один из шаров касается всех боковых граней пирамиды, а второй — основания пирамиды и первого шара. Найдите высоту пирамиды, при которой объем пирамиды наименьший.

4784. Ребро AB тетраэдра $ABCD$ является диагональю основания четырехугольной пирамиды, ребро CD параллельно другой диагонали этого основания, и концы его лежат на боковых ребрах пирамиды. Найдите наименьший возможный объем пирамиды, если объем тетраэдра равен V .

4785°. Конус описан около куба следующим образом: четыре вершины куба лежат в плоскости основания конуса, а четыре другие вершины — на его боковой поверхности (рис. 195). Какой наименьший объем может иметь такой конус, если ребро куба равно a ?

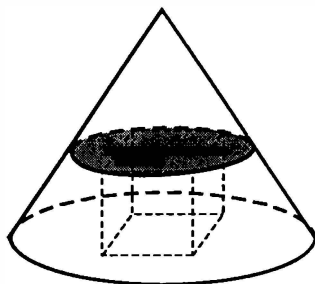


Рис. 195

4786. Около шара объема V описана правильная треугольная пирамида. Каков наименьший возможный объем этой пирамиды?

4787. В конусе расположены два шара единичного радиуса, центры которых находятся на оси симметрии конуса. Один из шаров касается боковой поверхности конуса, а другой — основания конуса и первого шара. Найдите угол между образующей конуса и основанием, при котором объем конуса наименьший.

4788. Докажите, что в любой трехугольной пирамиде найдется вершина, при которой все плоские углы острые.

4789. Ребро правильного тетраэдра равно a . Чему равно наибольшее значение площади ортогональной проекции этого тетраэдра на плоскость?

4790. В пирамиде $ABCD$ грань ABC представляет собой правильный треугольник, ребро DA равно стороне этого треугольника. Все плоские углы при вершине D равны между собой. Чему могут быть равны эти углы?

4791. Через вершину конуса проведено сечение наибольшей площади. Оказалось, что площадь сечения в два раза больше площади осевого сечения конуса. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

4792. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного куба между серединой его ребра и наиболее удаленной от нее точки поверхности куба.

4793. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно b , а плоский угол при вершине равен α . Найдите длину кратчайшего замкнутого пути по поверхности пирамиды, начинающегося и заканчивающегося в вершине основания и пересекающего все боковые ребра пирамиды.

4794. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$, в котором $\angle BAD = 60^\circ$. Известно, что $SA = SC$, $SD = SB = AB$. На ребре DC взята точка E так, что площадь треугольника BSE наименьшая среди площадей всех сечений пирамиды, содержащих отрезок BS и пересекающих отрезок DC . Найдите отношение $DE : EC$.

4795. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб $ABCD$, в котором $\angle BAD = 60^\circ$. Известно, что $SA = SC$, $SD = SB = AB$. На ребре DC взята точка E так, что площадь треугольника BSE наименьшая среди площадей

всех сечений пирамиды, содержащих отрезок BS и пересекающих отрезок DC . Найдите отношение $DE : EC$.

4796. Противоположные ребра трехугольной пирамиды попарно равны. Докажите, что все грани этой пирамиды — равные остроугольные треугольники.

4797. Верно ли, что у любого трехгранного угла есть сечение, являющееся правильным треугольником?

4798. Каким может быть ребро куба, одна грань которого лежит в плоскости основания правильной четырехугольной пирамиды, а четыре оставшиеся вершины — на ее боковой поверхности, если стороны основания пирамиды равны a , а высота пирамиды равна h ?

4799. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a , боковое ребро равно b . Найдите кратчайшее расстояние по поверхности призмы между вершиной одного основания и серединой противоположной ей стороны другого основания.

4800. Докажите, что сумма внутренних двугранных углов трехгранного угла больше 180° и меньше 540° .

4801. Пусть MC — перпендикуляр к плоскости треугольника ABC . Верно ли, что $\angle AMB < \angle ACB$?

4802. В правильной четырехугольной пирамиде расположены два одинаковых шара радиуса r , касающиеся основания пирамиды в точках, принадлежащих отрезку, соединяющему середины противоположных сторон основания. Каждый из шаров касается боковой грани пирамиды и другого шара. Найдите высоту пирамиды, при которой объем пирамиды наименьший.

4803. В вершине A прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = a$, $BC = b$ сидит паук, а в противоположной вершине — муха. Их разделяет вертикальная стенка в виде равнобедренного треугольника BMD с основанием BD и

углом α при вершине M . Найдите длину кратчайшего пути от паука к мухе, если известно, что паук может двигаться лишь по той части плоскости прямоугольника, где находится стена (включая границу прямоугольника), и по самой стене.

4804. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны a . Рассматриваются отрезки с концами на диагоналях BC_1 и CA_1 боковых граней, параллельные плоскости ABB_1A_1 .

а) Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали BC_1 такую, что $BM : BC_1 = 1 : 3$. Найдите его длину.

б) Найдите наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

4805°. Ребро куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ равно a . На ребрах AB и CC_1 взяты соответственно точки M и N так, что прямая MN образует угол $\frac{\pi}{6}$ с плоскостью $ABCD$ и угол $\arcsin \frac{1}{3}$ с плоскостью BB_1C_1C . Найдите:

а) длину отрезка MN ;

б) радиус шара с центром на отрезке MN , касающегося плоскостей $ABCD$ и BB_1C_1C .

4806. Высота правильной четырехугольной пирамиды вдвое больше диагонали ее основания, объем пирамиды равен V . Рассматриваются правильные четырехугольные призмы, вписанные в пирамиду так, что их боковые ребра параллельны диагонали основания пирамиды, одна боковая грань принадлежит этому основанию, вершины противоположной боковой грани лежат на боковой поверхности пирамиды. Найдите:

а) объем той пирамиды, плоскость боковой грани которой делит высоту пирамиды в отношении $4 : 1$, считая от вершины;

б) наибольшее значение объема рассматриваемых пирамид.

4807. Конус лежит на горизонтальной плоскости α , касаясь ее боковой поверхностью. Площадь основания конуса равна S_1 , площадь боковой поверхности — S_2 . На какой высоте (над плоскостью α) находится наивысшая точка конуса?

4808. Сторона основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $ABCDP$ равна a , а боковые ребра равны $2a$ (рис. 196). Рассматриваются отрезки с концами на ребрах AD и PC , параллельные плоскости PAB .

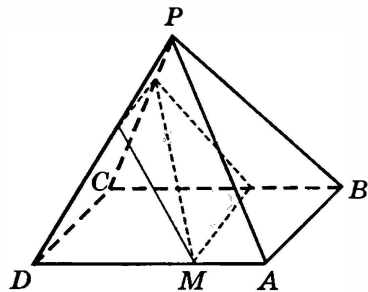


Рис. 196

а) Один из этих отрезков проведен через точку M ребра AD такую, что $AM : AD = 3 : 4$. Найдите его длину.

б) Найдите наименьшую длину рассматриваемых отрезков.

4809. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны a . Рассматриваются отрезки с концами на прямых AB_1 и BC_1 , перпендикулярные прямой AC_1 . Найдите наименьшую длину таких отрезков.

4810. Ребро правильного тетраэдра равно a . Через вершину тетраэдра проведено сечение, являющееся треугольником. Докажите, что периметр P сечения удовлетворяет неравенствам

$$2a < P \leq 3a.$$

4811. Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 4. На середине ребра BC взята точка M , а на ребре A_1D_1 на расстоянии 1 от вершины A_1 взята точка N .

Найдите длину кратчайшего пути между точками M и N по поверхности куба.

4812. На какое наименьшее число непересекающихся трехгранных углов можно разбить пространство?

4813. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = AA_1 = 12$ и $AD = 30$. Точка M расположена в грани $ABB_1 A_1$ на расстоянии, равном 1, от середины AB и на равных расстояниях от вершин A и B . Точка N лежит в грани $DCC_1 D_1$ и расположена симметрично точке M относительно центра параллелепипеда. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности параллелепипеда между точками M и N .

4814. В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах AB, AC и BD прямые. Один из отрезков, соединяющих середины противоположных ребер тетраэдра, равен a , а другой равен $a\sqrt{6}$. Найдите наибольшее ребро тетраэдра.

4815. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат $ABCD$. Найдите наибольший возможный угол между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1 .

4816. В тетраэдре $ABCD$ все плоские углы при вершине A равны по 60° . Докажите, что

$$AB + AC + AD \leq BC + CD + DB.$$

4817. Можно ли в кубе вырезать отверстие, сквозь которое пройдет куб того же размера?

4818. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина, $SA = 4$) точка D лежит на ребре SC , $CD = 3$, а расстояние от точки A до прямой BD равно 2. Найдите объем пирамиды.

4819. Вершины двух трехгранных углов совпадают, при этом ребра одного из них расположены целиком внутри другого. Докажите, что сумма плоских углов первого трехгранного угла меньше суммы плоских углов второго.

4820. Найдите наибольшее значение площади ортогональной проекции прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, b и c на некоторую плоскость.

4821. Высота цилиндра равна h , радиус основания равен r . Найдите наибольшее значение площади ортогональной проекции этого цилиндра на плоскость.

4822. Шар радиуса R касается некоторой плоскости. Какое наибольшее число шаров радиуса $\frac{R}{2}$ могут одновременно, не пересекаясь, касаться данного шара и плоскости?

4823. Точка D — середина ребра $A_1 C_1$ правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$. Правильная треугольная пирамида $SMNP$ расположена так, что плоскость ее основания совпадает с плоскостью ABC , вершина M лежит на продолжении AC , причем $CM = \frac{1}{2} AC$, ребро SN проходит через точку D , а ребро SP пересекает отрезок BB_1 . В каком отношении отрезок BB_1 делится точкой пересечения?

4824. Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна a . Точки E и F — середины ребер BB_1 и CC_1 соответственно. Рассматриваются треугольники, вершинами которых служат точки пересечения плоскостей, параллельных основаниям куба, с прямыми AC_1, CE и DF . Найдите:

а) площадь того треугольника, плоскость которого проходит через середину отрезка CF ;

б) наименьшее возможное значение площади рассматриваемых треугольников.

4825. Основаниями усеченной пирамиды являются правильные треугольники ABC и $A_1 B_1 C_1$ со сторонами 3 и 2 соответственно. Отрезок, соединяющий вершину C_1 с центром O основания ABC , перпендикулярен основа-

ниям; $C_1O = 3$. Через вершину B и середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 проведена плоскость. Рассматриваются цилиндры, расположенные внутри многогранника $ABCA_1MNC_1$, с основанием в грани A_1MNC_1 . Найдите:

а) наибольшее значение объема таких цилиндров с данной высотой h ;

б) наибольшее значение объема среди всех рассматриваемых цилиндров.

4826. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 1$, $BC = 3$. Высота пирамиды проходит через точку O пересечения диагоналей прямоугольника. Точка E — середина ребра BC , точка F лежит на ребре SA , причем $SF : FA = 1 : 7$, $EF = \frac{7\sqrt{2}}{16}$. Найдите объем пирамиды.

Из всех плоскостей, проходящих через прямую EF , выбрана та плоскость P , проекция на которую отрезка SO имеет минимальную длину. В каком отношении плоскость P делит отрезок AC ?

4827. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина, $SA = 4$) точка D лежит на ребре SC , $CD = 3$, а расстояние от точки A до прямой BD равно 2. Рассматриваются всевозможные правильные тетраэдры $MNPQ$ такие, что точки M и N лежат на прямой BD , а прямая PQ касается сферы радиуса 1 с центром в точке A в одной из точек отрезка PQ . Найдите наименьшее значение длины ребра рассматриваемых тетраэдров.

4828. Точка D является серединой ребра BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. На боковой грани AA_1C_1C взята точка E , на основании ABC — точка F так, что прямые EB_1 и FD параллельны. Какой наибольший объем может иметь призма $ABCA_1B_1C_1$, если $EB_1 = 1$, $FD = \frac{3}{4}$, $EF = \frac{1}{2\sqrt{3}}$?

4829. Все грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные тре-

угольники, а высота пирамиды совпадает с высотой одной из ее боковых граней. Найдите объем пирамиды, если расстояние между наибольшими противоположными ребрами равно 1.

4830. Один выпуклый многогранник лежит внутри другого. Докажите, что площадь поверхности внешнего многогранника больше площади поверхности внутреннего.

4831°. В правильной пирамиде $SMNPQ$ (S — вершина) точки H и F — середины ребер MN и NP соответственно, точка E лежит на отрезке SH , причем $SH = 3$, $SE = \frac{9}{4}$. Расстояние от

точки S до прямой EF равно $\sqrt{5}$. Найдите объем пирамиды.

Дана сфера радиуса 1 с центром в точке S . Рассматриваются всевозможные правильные тетраэдры $ABCD$ такие, что точки C и D лежат на прямой EF , а прямая AB касается сферы в одной из точек отрезка AB . Найдите наименьшее ребро рассматриваемых тетраэдров.

4832. Через центр единичного куба проведена плоскость, делящая его на два многогранника (рис. 197). Докажите, что в каждом из получившихся многогранников найдется диагональ, длина которой не меньше $\frac{3}{2}$.

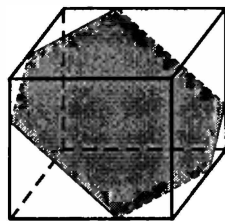


Рис. 197

4833. Можно ли расположить в пространстве 13 равных шаров так, чтобы они не пересекались и при этом 12 из них касались одного шара?

4834. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$

равна 4, а боковое ребро равно 3. На ребре BB_1 взята точка F , а на ребре CC_1 — точка G , причем $B_1F = 1$, $CG = \frac{2}{3}$. Точки E и D — середины ребер AC и B_1C_1 соответственно. Найдите наименьшее возможное значение суммы $EP + PQ$, где точка P принадлежит отрезку A_1D , а точка Q — отрезку FG .

4835. В основании пирамиды $SABC$ лежит остроугольный равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) площади 2. Ребро SA является высотой пирамиды. Рассматриваются проекции пирамиды $SABC$ на всевозможные плоскости, проходящие через прямую AB . Наибольшая из площадей таких проекций равна 2,5, а наименьшая — $\frac{3}{\sqrt{5}}$. Найдите объем пирамиды.

4836. Основанием пирамиды $ABCEH$ служит выпуклый четырехугольник $ABCE$, который диагональю BE делится на два равновеликих треугольника. Ребро AB равно 1, ребра BC и CE равны между собой. Сумма ребер $АН$ и $ЕН$ равна $\sqrt{2}$. Объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$. Найдите радиус шара, имеющего наибольший объем среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $ABCEH$.

4837. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (S — вершина) сторона основания равна $2\sqrt{3}$, высота пирамиды SH равна 6. Через точку E перпендикулярно прямой AS проходит плоскость, которая пересе-

кает отрезок SH в точке O . Точки P и Q расположены на прямых AS и CE соответственно так, что прямая PQ касается сферы радиуса $\frac{\sqrt{5}}{2}$ с центром в точке O . Найдите наименьшую длину отрезка PQ .

4838. Найдите наибольшее значение объема пирамиды $SABC$ при следующих ограничениях: $SA \leq 4$, $SB \geq 7$, $SC \geq 9$, $AB = 5$, $BC \leq 6$, $AC \leq 8$.

4839. Основанием пирамиды $ABCEH$ служит выпуклый четырехугольник $ABCE$, который диагональю BE делится на два равновеликих треугольника. Известно, что $AB = 1$, $BC = CE$, $АН + ЕН = \sqrt{2}$. Объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$. Найдите радиус шара,

имеющего наибольший объем среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $ABCEH$.

4840. Основанием пирамиды $MBKHE$ служит выпуклый четырехугольник $MBKH$, в котором угол при вершине M равен $\frac{\pi}{2}$, угол, образованный диагональю BH и ребром BK , равен $\frac{\pi}{4}$, ребро MB равно 1. Площадь треугольника BKH в два раза больше площади треугольника MBH . Сумма ребер BE и HE равна $\sqrt{3}$. Объем пирамиды равен $\frac{1}{4}$. Найдите радиус шара, имеющего наибольший объем среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $MBKHE$.

КОНКУРСНЫЕ ЗАДАЧИ

4841. Найдите объем прямой призмы, основанием которой служит прямоугольный треугольник с острым углом α , если боковое ребро призмы равно l и образует с диагональю большей боковой грани угол, равный β .

4842. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно $\sqrt{5}$, а высота пирамиды равна 1. Найдите двугранный угол при основании.

4843. Найдите боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если ее высота равна 4, а апофема равна 8.

4844. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости основания под углом 45° . Найдите сторону основания, если объем пирамиды равен 18.

4845. Основание равностороннего треугольника лежит в плоскости P , а боковая сторона образует с плоскостью P угол, равный α . Найдите угол, который образует плоскость треугольника с плоскостью P .

4846. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в котором $AB = 2$, $AD = 4$, $BB_1 = 12$. Точки M и K расположены на ребрах CC_1 и AD соответственно, причем $CM : MC_1 = 1 : 2$, $AK = KD$. Найдите угол между прямыми AM и KB_1 .

4847. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна a и составляет с одной гранью угол 30° , а с другой — угол 45° . Найдите его объем.

4848. Двугранный угол между смежными боковыми гранями пра-

вильной четырехугольной пирамиды равен α , а сторона основания равна b . Найдите объем пирамиды.

4849. Основание пирамиды $ABCD$ — треугольник ABC со сторонами $AC = 10$, $BC = 24$, $AB = 26$. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45° . Найдите:

а) радиус сферы, описанной около пирамиды $ABCD$;

б) расстояние между прямыми DM и AC и прямыми DM и BC , где DM — высота пирамиды $ABCD$.

4850. Высота PO правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ равна 4, а стороны основания $ABCD$ равны 6. Точки M и N являются серединами отрезков BC и CD . Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду $PMNC$.

4851. Ребро PA четырехугольной пирамиды $PABCD$ перпендикулярно плоскости основания $ABCD$ и равно 6. Основание $ABCD$ — квадрат со стороной 8. Точки M и N — середины отрезков AD и CD . Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду $SDMN$.

4852. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, у которых одна из боковых граней является квадратом, а периметр нижнего основания равен 12. Найдите среди них параллелепипед с наибольшим объемом и вычислите этот объем.

4853. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ вписана правильная четырехугольная пирамида $OLMNP$. Все четыре вершины основания вписанной пирамиды лежат на апофемах пирамиды $SABCD$. Верши-

на вписанной пирамиды — точка O — совпадает с центром основания $ABCD$ пирамиды $SABCD$. Известно, что $OL = LM$, т. е. боковое ребро вписанной пирамиды равно стороне ее основания. Кроме того, $SA = AB = a$, т. е. каждое ребро пирамиды $SABCD$ равно a . Чему равен объем вписанной пирамиды?

4854. Ребра параллелепипеда равны a , b и c . Ребра, равные a и b , взаимно перпендикулярны, а ребро, равное c , образует с каждым из них угол, равный 60° . Найдите объем параллелепипеда.

4855. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция с острым углом, равным α . Боковая сторона трапеции и ее меньшее основание равны. Найдите объем призмы, если ее диагональ равна a и образует с плоскостью основания угол, равный β .

4856. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы, равная b , составляет угол 30° с плоскостью другой боковой грани (рис. 198). Найдите объем призмы.

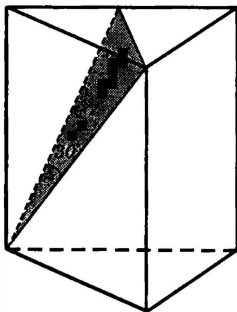


Рис. 198

4857. Тангенсы двугранных углов при основании правильной треугольной пирамиды равны 3. Найдите отрезок, соединяющий середину стороны основания с серединой противоположного ребра, если сторона основания пирамиды равна $\sqrt{3}$.

4858. Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ с ребром a . Пусть M — такая точка на ребре A_1D_1 , что $A_1N : MD_1 = 1 : 2$. Найдите

периметр треугольника AB_1M , а также расстояние от вершины A_1 до плоскости, проходящей через вершины этого треугольника.

4859. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой равно l и двугранный угол между смежными боковыми гранями равен β .

4860. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник, площадь которого равна S . Боковые ребра пирамиды равны между собой. Двугранные углы при катетах ее основания равны α и β . Найдите объем пирамиды.

4861. В правильную четырехугольную пирамиду вписана сфера, которая касается основания и всех боковых граней. Сфера делит высоту пирамиды в отношении 4 : 5, считая от вершины пирамиды. Найдите объем пирамиды, если сторона основания пирамиды равна a .

4862. В правильную четырехугольную пирамиду вписана сфера, которая касается основания и всех боковых граней. Сфера делит высоту пирамиды в отношении 1 : 8, считая от вершины пирамиды. Найдите объем пирамиды, если апофема пирамиды равна a .

4863. Сторона основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна a , боковое ребро равно b . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра AB параллельно прямым BD и AS .

4864. В правильной треугольной пирамиде $PABC$ с вершиной P сторона основания равна 2. Через сторону основания BC проведена плоскость, пересекающая ребро PA в точке M . Известно, что $PM : MA = 1 : 3$, а площадь сечения равна 3. Найдите объем пирамиды $PABC$.

4865. Дан тетраэдр $ABCD$, в котором $AB = AC = 5$, $AD = BC = 4$, $BD = CD = 3$. Найдите DM , где M — точка пересечения медиан грани ABC .

4866. Дан тетраэдр $ABCD$, в котором $AB = 6$, $AC = 7$, $AD = 3$, $BC = 8$, $BD = 4$, $CD = 5$. Найдите CM , где M — точка пересечения медиан грани ADB .

4867. Основание наклонной призмы — равносторонний треугольник со стороной, равной a . Одно из боковых ребер равно b и образует с прилежащими сторонами основания углы, равные 45° . Найдите боковую поверхность призмы.

4868. Сфера радиуса $\frac{3}{2}$ имеет центр в точке N . Из точки K , находящейся на расстоянии $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ от центра сферы, проведены две прямые KL и KM , касающиеся сферы в точках L и M соответственно. Найдите объем пирамиды $KLMN$, если известно, что $ML = 2$.

4869. Плоскость пересекает боковые ребра SA , SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K , L и M соответственно. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды, если известно, что $SK : KA = SL : LB = 2 : 1$, а медиана SN треугольника SBC делится этой плоскостью пополам?

4870. Основанием наклонного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит ромб $ABCD$ со стороной, равной a , и острым углом 60° . Ребро AA_1 также равно a и образует с ребрами AB и AD углы 45° . Найдите объем параллелепипеда.

4871. Расстояние между любыми двумя боковыми ребрами наклонной треугольной призмы равно a . Боковое ребро равно l и наклонено к плоскости основания под углом 60° . Найдите площадь полной поверхности призмы.

4872. В треугольной пирамиде, каждое боковое ребро которой равно a , один плоский угол при вершине — прямой, а каждый из остальных равен 60° . Найдите объем пирамиды.

4873. Основанием пирамиды служит параллелограмм, смежные стороны которого равны 9 и 10, а одна из ди-

агоналей равна 11. Противоположные боковые ребра равны и каждое из больших ребер равно 10,5. Найдите объем пирамиды.

4874. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с углом φ при вершине. Все боковые ребра пирамиды равны a . Найдите объем пирамиды, если радиус окружности, вписанной в треугольник основания, равен r .

4875. В основании пирамиды лежит квадрат со стороной, равной $a = \sqrt{21}$. Высота пирамиды проходит через середину одного из ребер основания и равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды.

4876. Ребро правильного тетраэдра равно $4\sqrt{6}$. Найдите радиус шара, касающегося боковых граней тетраэдра в точках, лежащих на сторонах основания.

4877. Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной, равной 6. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 4. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды.

4878. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 6, и острым углом 15° . Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45° . Найдите объем пирамиды.

4879. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60° . В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 8, 9, 11. Найдите объем пирамиды.

4880. В основании треугольной пирамиды $PQRS$ лежит правильный треугольник QRS . Высота пирамиды, опущенная из вершины P , проходит через середину ребра RS . Известно, что $PQ = m$, $QR = n$. Пирамиду пересекает плоскость α , параллельная ребрам PQ и RS . На каком расстоянии от вершины Q должна находиться плос-

ABC со стороной $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 2. Найдите угол и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC , а другая проходит через точку C и середину ребра AB .

4891. Сфера радиуса $\sqrt{3}$ касается плоскостей всех боковых граней некоторой пирамиды в точках, лежащих на сторонах основания. Найдите высоту пирамиды, если ее основанием служит треугольник со сторонами 5, 6 и 9.

4892. На продолжении ребра ST за точку T правильной четырехугольной пирамиды $SPQRT$ с вершиной S взята точка B так, что расстояние от этой

точки до плоскости SPQ равно $\frac{9\sqrt{7}}{2}$.

Найдите BT , если $QR = 12$, а $SR = 10$.

4893. На продолжении ребра SE за точку E правильной четырехугольной пирамиды $SEFGH$ с вершиной S взята точка Q так, что $EQ = 5$. Найдите расстояние от точки Q до плоскости SFG , если $GH = 20$, $SH = 15$.

4894. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром b ($b > a$). Сфера с центром в точке O лежит над плоскостью основания $ABCD$, касается этой плоскости в точке A и, кроме того, касается бокового ребра SB . Найдите объем пирамиды $OABCD$.

4895. Основание пирамиды $PABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Точка M — середина ребра CP , точка N расположена на ребре AP , причем $AN : NP = 2 : 3$, точка K расположена на ребре BP , причем $PK = 2KB$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки K, M, N . В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

4896. Основание пирамиды $PABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Точка M расположена на ребре PB ,

причем $BM : MP = 1 : 2$, точка N — середина ребра PD , точка K расположена на ребре PC , причем $CK : KP = 1 : 5$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки K, M, N . В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

4897. Основание пирамиды $PABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Точка M расположена на продолжении ребра BC за точку B , причем $BM = BC$, точка N расположена на ребре PC , причем $PN : NC = 1 : 2$, точка K расположена на ребре AP , причем $AK : KP = 1 : 3$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки K, M, N . В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

4898. Основание пирамиды $PABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Точка K — середина ребра CP , точка M расположена на ребре AB , причем $AM : MB = 1 : 2$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки K и M параллельно прямой BD . В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

4899. Основание пирамиды $PABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Точка M расположена на ребре AB , причем $AM : MB = 4 : 1$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M параллельно прямым BD и AP . В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

4900. Дан конус объемом 18π . Через его вершину S проведено плоское сечение SCD , отсекающее на окружности основания дугу CD , длина которой в 3 раза меньше длины всей окружности. Угол SCD равен $\arcsin \sqrt{\frac{5}{17}}$.

Найдите площадь сечения SCD .

4901. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$, в котором $\angle BAD = 60^\circ$. Известно, что $SD = SB$, $SA = SC = AB$. На ребре DC взята точка E так, что площадь треугольника BSE наименьшая среди

площадей всех сечений пирамиды, содержащих отрезок BS и пересекающих отрезок DC . Найдите отношение $DE : EC$.

4902. Основание пирамиды — треугольник со сторонами 10, 10, 12. Площадь боковых граней соответственно равны 100, 100, 120. Найдите высоту пирамиды.

4903. Ребро куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ равно a . На ребрах AB и CC_1 взяты соответственно точки M и N так, что прямая MN образует угол 30° с плоскостью $ABCD$ и угол $\arcsin \frac{1}{3}$ с плоскостью BB_1C_1C . Найдите:

- отрезок MN ;
- радиус шара с центром на отрезке MN , касающегося плоскостей $ABCD$ и BB_1C_1C .

4904. Сторона основания $ABCD$ правильной призмы $ABCA_1B_1C_1D_1$ равна $2a$, боковое ребро равно a . Рассматриваются отрезки с концами на диагонали AD_1 грани AA_1D_1D и диагонали DB_1 призмы, параллельные плоскости AA_1B_1B .

а) Один из таких отрезков проведен через точку M диагонали AD_1 такую, что $AM : AD_1 = 2 : 3$. Найдите его длину.

б) Найдите наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

4905. В правильной четырехугольной пирамиде расположены два шара Q_1 и Q_2 . Шар Q_1 вписан в пирамиду и имеет радиус 2, шар Q_2 касается внешним образом шара Q_1 и боковых граней пирамиды. Его радиус равен 1. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды и угол между соседними боковыми гранями.

4906. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 200) равны a . Рассматриваются отрезки с концами на диагоналях BC_1 и CA_1 боковых граней, параллельные плоскости ABB_1A_1 .

1) Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали BC_1 такую, что $BM : BC_1 = 1 : 3$. Найдите его длину.

2) Найдите наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

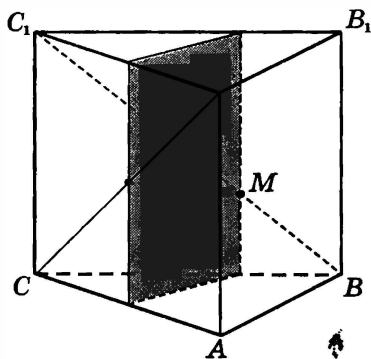


Рис. 200

4907. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна a , боковое ребро равно $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали BD основания и боковом ребре SC , параллельные плоскости SAD .

1) Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали BD такую, что $DM : DB = 1 : 3$. Найдите его длину.

2) Найдите наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

4908. На диагонали AC_1 параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ взята точка M , а на прямой B_1C — точка N так, что отрезки MN и BD параллельны. Найдите отношение этих отрезков.

4909. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб $ABCD$, в котором $\angle BAD = 60^\circ$. Известно, что $SD = SB$, $SA = SC = AB$. На ребре DC взята точка E так, что площадь треугольника BSE наименьшая среди площадей всех сечений пирамиды, содержащих отрезок BS и пересекающих отрезок DC . Найдите отношение $DE : EC$.

4910. Высота треугольной пирамиды $ABCD$, опущенная из вершины D , проходит через точку пересечения вы-

сот треугольника ABC . Кроме того, известно, что $DB = 3$, $DC = 2$, $\angle BDC = 90^\circ$. Найдите отношение площади грани ADB к площади грани ADC .

4911. В треугольной пирамиде $ABCD$ известно, что $AB = 8$, $CD = 12$, расстояние между прямыми AB и CD равно 6, а объем пирамиды равен 48. Найдите угол между прямыми AB и CD .

4912. В правильной четырехугольной пирамиде радиус вписанного шара равен r , а двугранный угол при боковом ребре равен α . Найдите объем пирамиды, вершинами которой служат центр вписанного шара и точки его касания с боковыми гранями исходной пирамиды.

4913. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) известны стороны $AD = 10$, $BC = 2$. Точки A' , B' , C' , D' лежат по одну сторону от плоскости трапеции, причем прямые AA' , BB' , CC' , DD' перпендикулярны этой плоскости, $AA' = 1$, $BB' = 2$, $CC' = 2$, $DD' = 4$. Точки M' и N' лежат на прямых $A'C'$ и $B'D'$ соответственно. Найдите отрезок $M'N'$, если $A'M' : M'C' = 2 : 1$, $B'N' : N'D' = 1 : 2$.

4914. Внутри цилиндра лежат два шара радиуса r и один шар радиуса $\frac{r}{2}$ так, что каждый шар касается двух других, нижнего основания цилиндра и его боковой поверхности. Найдите радиус основания цилиндра.

4915. В треугольной пирамиде $PABC$ боковое ребро PB перпендикулярно плоскости основания ABC , $PB = 6$, $AB = BC = \sqrt{15}$, $AC = 2\sqrt{3}$. Сфера, центр O которой лежит на грани ABP , касается плоскостей остальных граней пирамиды. Найдите расстояние от центра O сферы до ребра AC .

4916. В треугольной пирамиде $SABC$ известны плоские углы при вершине S : $\angle BSC = 90^\circ$, $\angle ASC = \angle ASB = 60^\circ$. Вершины A , S и середины ребер SB , SC , AB , AC лежат на поверхности шара радиуса 3. Докажите, что ребро

SA является диаметром этого шара, и найдите объем пирамиды.

4917. В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SB перпендикулярно плоскости основания ABC и равно $2\sqrt{3}$. Ребра AB и BC равны $\sqrt{5}$, а ребро AC равно 2. Найдите расстояние от центра вписанной в пирамиду сферы до вершины S .

4918. В треугольной пирамиде $PABC$ боковое ребро PB перпендикулярно плоскости основания ABC и равно 12, $AB = BC = 7$, $AC = 4$. Сфера, центр O которой лежит на ребре AB , касается плоскостей граней PAC и PBC . Найдите расстояние от центра O до ребра PB .

4919. В конусе расположены два одинаковых шара радиуса r , касающиеся основания конуса в точках, симметричных относительно центра основания. Каждый из шаров касается боковой поверхности конуса и другого шара. Найдите угол между образующей конуса и основанием, при котором объем конуса наименьший.

4920. Отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 , концы которых лежат на сфере радиуса 10, попарно перпендикулярны и пересекаются в точке M . Известно, что $AA_1 = 12$, $BB_1 = 18$. Найдите расстояние от центра сферы до точки M , если $CM : MC_1 = 11 : 3$.

4921. Через точку K , расположенную внутри сферы, проведены три взаимно перпендикулярные прямые. Первая прямая пересекает сферу в точках A и A_1 , вторая — в точках B и B_1 , третья — в точках C и C_1 , причем $AA_1 = 22$, $CC_1 = 20$, а точка K делит отрезок BB_1 в отношении $(9 + \sqrt{2}) : (9 - \sqrt{2})$. Найдите радиус сферы, если известно, что точка K отстоит от центра сферы на расстоянии $\sqrt{65}$.

4922. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием $AC = 2$ и боковой стороной, равной $\sqrt{7}$. Грань ACD перпен-

дикулярна плоскости основания и представляет собой правильный треугольник. Найдите ребро BD , а также площади всех тех сечений пирамиды, которые являются квадратами.

4923. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ длина ребра равна 1. Одна сфера радиуса $\frac{1}{3}$ касается плоскости ABC в точке B ; другая сфера касается плоскости $A_1 B_1 C_1$ в точке E_1 , лежащей на отрезке $C_1 D_1$, причем $C_1 E_1 : E_1 D_1 = 1 : 2$. Известно, что эти сферы касаются друг друга внешним образом и точка их касания лежит внутри куба. Найдите расстояние от точки касания сфер до точки C .

4924. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ длина ребра равна 1. Одна сфера радиуса $\frac{1}{3}$ касается плоскости ABC в точке B ; другая сфера касается плоскости $A_1 B_1 C_1$ в точке E , лежащей на отрезке $C_1 D_1$, причем $C_1 E : E D_1 = 1 : 2$. Известно, что эти сферы касаются друг друга внешним образом и точка их касания лежит внутри куба. Найдите расстояние от точки касания сфер до точки A .

4925. Три шара радиусов 1, 3 и 4 расположены так, что каждый из них касается двух других шаров и двух данных плоскостей. Найдите расстояние между точками касания первого из этих шаров с плоскостями.

4926. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB : BC = 2 : 3$. Точки F и F_1 — середины ребер BC и $B_1 C_1$ соответственно. Сфера касается всех звеньев ломаной $AFDD_1 A_1$ и пересекает отрезок $F_1 F$ в точках F_1 и E . Найдите объем параллелепипеда и радиус сферы, если $F_1 E = \frac{3}{2}$.

4927. Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости ABC , $AB = 2$, $AC = 1$, $\angle BAC = 120^\circ$, $SA = 3\sqrt{2}$. Сечения пирамиды двумя параллельными плоскостями, одна из которых

проходит через точку C и середину ребра AB , а другая — через точку B , имеют равные площади. В каком отношении делят ребро SA плоскости сечений? Найдите объемы многогранников, на которые разбивают пирамиду плоскости сечений, а также расстояние между этими плоскостями.

4928. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 15$ и $BC = 20$. Боковое ребро DC перпендикулярно плоскости основания. Сфера касается основания ABC , ребра CD и боковой грани ABD в точке P , которая лежит на высоте треугольника ABD , опущенной из точки D . Известно, что $DP = 6$. Найдите объем пирамиды.

4929. На прямой l в пространстве последовательно расположены точки A , B и C так, что $AB = 10$ и $BC = 22$. Найдите расстояние между прямыми l и m , если расстояния от точек A , B и C до прямой m равны 12, 13 и 20 соответственно.

4930. На прямой p в пространстве последовательно расположены точки A , B и C такие, что $AB = 27$ и $BC = 18$. Найдите расстояние между прямыми p и q , если расстояния от точек A , B и C до прямой q равны 17, 10 и 8 соответственно.

4931. Дана пирамида $ABCD$ (рис. 201). Через середины K и N ребер AB и CD пирамиды проведена плоскость, пересекающая ребра BC и AD

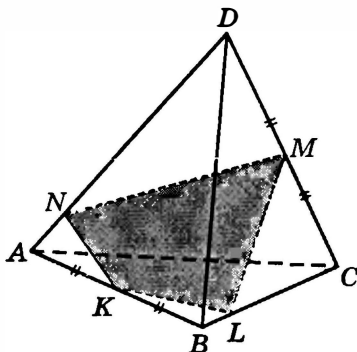


Рис. 201

соответственно в точках L и M . Найдите объем пирамиды $ABCD$, если площадь треугольника MNK равна 3, отношение объемов пирамид $ACDL$ и $ABCD$ равно 0,9, а расстояние от вершины D до плоскости $KLMN$ равно 3.

4932. Дана пирамида $ABCD$. Через середины K и M ребер AB и CS пирамиды проведена плоскость, пересекающая ребра BC и AD соответственно в точках L и N . Расстояние от вершины B до этой плоскости равно 2. Диагонали четырехугольника $KLMN$ пересекаются в точке Q , причем отношение отрезка KQ к отрезку QM равно 0,2. Вычислите площадь четырехугольника $KLMN$, если известно, что объем пирамиды $BKMC$ равен 12.

4933. Основанием пирамиды $PQRS$ является прямоугольный треугольник PQR , в котором гипотенуза QR равна 2 и катет PQ равен 1. Ребра PS , QS , RS равны между собой. Сфера радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$ касается ребра RS , продолжений ребер PS , QS за точку S и плоскости PQR . Найдите отрезок касательной, проведенной из точки Q к сфере.

4934. Основанием пирамиды является треугольник PQR , в котором $PR = 2$, $\angle Q = \frac{\pi}{4}$, $\angle R = \frac{\pi}{3}$. Вершина S пирамиды равноудалена от точек P и Q . Сфера касается ребер PS и QS , продолжения ребра RS за точку S и плоскости PQR . Точка касания с плоскостью основания пирамиды и ортогональная проекция вершины S на эту плоскость лежат на окружности, описанной вокруг треугольника PQR . Найдите ребра PS , QS , RS .

4935. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром b . Первая сфера с центром в точке O_1 касается плоскостей SAD и SBC в точках A и B , а вторая сфера с центром в точке O_2 касается плоскостей SAB и SCD в точках B и C . Найдите объем пирамиды ABO_1O_2 .

4936. Точки P , Q , R и S расположены в пространстве так, что середины отрезков SQ и PR лежат на сфере радиуса a , а отрезки PS , PQ , QR и SR делятся сферой на три части в отношении $1 : 2 : 1$ каждый. Найдите расстояние от точки P до прямой QR .

4937. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Сфера касается прямых AC , $B_1 C$, AB_1 и продолжения ребра BB_1 за точку B . Найдите радиус сферы, если ребро куба равно 1, а точка касания с прямой AC принадлежит грани куба.

4938. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро равно 1. Одна сфера радиуса $\frac{1}{4}$ касается плоскости ABC в точке A ; другая сфера касается плоскости $A_1 B_1 C_1$ в точке E_1 , лежащей на отрезке $B_1 C_1$, причем $B_1 E_1 : E_1 C_1 = 2 : 1$. Известно, что эти сферы касаются друг друга внешним образом и точка их касания лежит внутри куба. Найдите расстояние от точки касания сфер до точки D .

4939. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро равно 1. Одна сфера радиуса $\frac{1}{3}$ касается плоскости ABC в точке B ; другая сфера касается плоскости $A_1 D_1 C_1$ в точке E_1 , лежащей на отрезке $C_1 D_1$, причем $C_1 E_1 : E_1 D_1 = 1 : 2$. Известно, что эти сферы касаются друг друга внешним образом и точка их касания лежит внутри куба. Найдите расстояние от точки касания сфер до точки A .

4940. Точки K , M и N расположены соответственно на ребрах BC , AD и CD тетраэдра $ABCD$, причем $BK : KC = 1 : 3$, $AM : MD = 3 : 1$ и $CN : ND = 1 : 2$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K , M , N . В каком отношении эта плоскость делит объем тетраэдра?

4941. Точки K , M и N расположены соответственно на ребрах AB , CD и AD тетраэдра $ABCD$, причем $AK = KB$, $CM : MD = 3 : 2$ и $AN : ND = 1 : 4$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K , M ,

N. В каком отношении эта плоскость делит объем тетраэдра?

4942. Дана пирамида $ABCD$. Сфера касается плоскостей ABC , ACD и ADB в точках K , L и M соответственно. При этом точка K находится на стороне BC , точка L — на стороне CD , точка M — на стороне DB . Известно, что радиус сферы равен $\sqrt{3}$, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle CAD = 75^\circ$, $\angle DAB = 75^\circ$. Найдите объем пирамиды.

4943. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ пересечена плоскостью, проходящей через середины ребер AB , A_1C_1 и BB_1 . Постройте сечение призмы, найдите площадь сечения и вычислите угол между плоскостью основания ABC и плоскостью сечения, если сторона основания равна 2, а высота призмы равна $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

4944. Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 12, а высота равна $\frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$. На ребрах AC , A_1C_1 и AB расположены соответственно точки P , F и E так, что $AP = 2$, $A_1F = 6$ и $AE = 6$. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки P , F и E . Найдите площадь сечения и угол между плоскостью основания призмы и плоскостью сечения.

4945. В основании четырехугольной пирамиды $SKLMN$ лежит равнобедренная трапеция $KLMN$, описанная около окружности и такая, что $KN = LM = 4$, $MN > KL$ и угол между прямыми KN и LM равен $\frac{\pi}{3}$. Две противоположные боковые грани перпендикулярны основанию и $SM = 12$. Найдите расстояние от точки M до плоскости SKL .

Внутри пирамиды расположен конус так, что окружность его основания вписана в треугольник SMN , а вершина принадлежит грани SKL . Вычислите высоту конуса.

4946. Три шара касаются плоскости P в точках B_1 , B_2 , B_3 и, кроме того, попарно касаются друг друга. Радиусы двух из них одинаковы и равны $\frac{8}{3}$, а радиус третьего шара больше. Вершина конуса находится между плоскостью P и плоскостью основания. Все три шара лежат вне конуса, причем каждый из них касается его некоторой образующей. Угол между плоскостью основания конуса и его образующей равен $\arctg \frac{3}{4}$. Найдите расстояние от вершины конуса до плоскости P , если известно, что в треугольнике $B_1B_2B_3$ имеется пара сторон, отношение которых равно $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

4947. Угол между плоскостью основания и образующей конуса равен $\arccos \frac{5}{13}$. Вне конуса, касаясь плоскости основания в точках B_1 , B_2 , B_3 , лежат три шара, каждый из которых касается двух других шаров и некоторой образующей конуса. Радиус меньшего шара равен 1. Кроме того, известно, что радиусы двух шаров равны между собой. Известно также, что треугольник $B_1B_2B_3$ — прямоугольный. Найдите радиус основания конуса.

4948. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна a , боковое ребро равно $\frac{a}{2}$. Точка D является ортогональной проекцией середины ребра A_1C_1 на плоскость AB_1C , а точка E — ортогональной проекцией точки D на плоскость AA_1B_1B . Найдите объем пирамиды A_1B_1DE .

4949. Три параллельные прямые касаются в точках A , B и C сферы радиуса 4 с центром в точке O . Найдите угол BAC , если известно, что площадь треугольника OBC равна 4, а площадь треугольника ABC больше 16.

4950. В основании пирамиды $PQRST$ лежит четырехугольник

$QRST$, у которого стороны QR и ST параллельны, сторона QR равна 6, сторона QT равна 4, а угол RQT равен 120° .

Ребро PQ равно $2\sqrt{14}$. Найдите объем пирамиды, если известно, что через прямые QR и ST можно провести две плоскости, не совпадающие с основанием пирамиды и пересекающие пирамиду по равным четырехугольникам.

4951. В основании пирамиды $SABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, у которого стороны AB и CD параллельны, сторона AD равна 6, сторона CD равна 8, а угол ADC равен 120° .

Ребро SD равно $5\sqrt{7}$. Найдите объем пирамиды, если известно, что через прямые AB и CD можно провести две плоскости, не совпадающие с основанием пирамиды и пересекающие пирамиду по равным четырехугольникам.

4952. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина, $SA = 2$) точка D — середина ребра SB . Расстояние от точки C до прямой AD равно $\frac{\sqrt{5}}{6}$.

Найдите объем пирамиды.

Дана сфера радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}}$ с центром в точке C . Рассматриваются всевозможные правильные тетраэдры $MNPQ$ такие, что точки P и Q лежат на прямой AD , а прямая MN касается сферы в одной из точек отрезка MN . Найдите наименьшее ребро рассматриваемых тетраэдров.

4953. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ имеет своей осью симметрии диагональ AC , равную 9, а точка E пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ делит отрезок AC так, что отрезок AE меньше отрезка EC . Через середину бокового ребра пирамиды $SABCD$ проведена плоскость, параллельная основанию и пересекающаяся с ребрами SA , SB , SC , SD соответственно в точках A_1 , B_1 , C_1 , D_1 . Получившийся многогранник $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, являющийся частью пирамиды $SABCD$, пересекается плос-

костью α по правильному шестиугольнику, сторона которого равна 2. Найдите площадь треугольника ABD , если плоскость α пересекает отрезки BB_1 и DD_1 .

4954. Дана треугольная пирамида $ABCD$. На ребре AC взята точка F так, что $CF : FA = 2 : 9$, на ребре CD взята точка M так, что AM — биссектриса угла DAC . Через точки F , M и точку пересечения медиан треугольника DAB проведена плоскость, пересекающая ребро DB в точке N . Известно, что $\frac{CA}{AD} = \frac{DN}{NB} + 1$. Известно также, что от-

ношение площади треугольника ABD к сумме площадей всех граней пирамиды $ABCD$ равно p , а длина перпендикуляра, опущенного из вершины C на плоскость ABD , равна h . Через точку N проведена плоскость, параллельная плоскости ACB и пересекающая ребра CD и DA в точках K и L соответственно. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду $DKLN$.

4955. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Точка F взята на ребре AD , а точка N — на ребре DN так, что $DN : NB = 1 : 2$. Через точки F , N и точку пересечения медиан треугольника ABC проведена плоскость, пересекающая ребро CB в точке H . Через точку H проведена плоскость, параллельная плоскости ADB и пересекающая ребра CA и CD в точках L и K соответственно. Известно, что $CH : HB = (AF : FD)^2$ и что радиус шара, вписанного в пирамиду $CHLK$, равен R . Найдите отношение площади треугольника ABC к сумме площадей всех граней пирамиды $ABCD$, если длина перпендикуляра, опущенного из вершины D на плоскость ABC , равна h .

4956. Точки K и N расположены соответственно на ребрах AB и AD тетраэдра $ABCD$, причем $AK = 5KB$, $DN : NA = 1 : 4$. Точка M — середина медианы DP треугольника BCD . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K , M , N . В

каком отношении эта плоскость делит объем тетраэдра?

4957. Четырехугольная пирамида $SABCD$ вписана в сферу. Основание этой пирамиды — прямоугольник $ABCD$. Известно, что $SA = 4$, $SB = 8$, $SD = 7$, $\angle SAC = \angle SBC = \angle SDC$. Найдите BD .

4958. Вокруг пирамиды $ABCD$ описана сфера. Вторая сфера радиуса 1 касается первой внутренним образом в точке C , а также касается плоскости ABD . Известно, что $CD = 3$, $\cos \angle ADB = \frac{1}{5}$, $\cos \angle ADC = \cos \angle BDC = \frac{1}{3}$. Найдите объем пирамиды $ABCD$.

4959. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SKLMN$ равны $2 + \sqrt{2}$. Сфера касается плоскости $KLMN$, а также касается ребер SK , SL , SM и SN пирамиды в точках K_1 , L_1 , M_1 и N_1 соответственно. На ребре SK взята точка P . Через точки P , L_1 и N_1 проведена плоскость, пересекающая ребро SM в точке Q . Найдите SP , если площадь ортогональной проекции четырехугольника PL_1QN_1 на плоскость $KLMN$ равна $\frac{9}{8}$.

4960. Четырехугольная пирамида $SABCD$ вписана в сферу, центр которой лежит в плоскости основания $ABCD$. Диагонали AC и BD основания пересекаются в точке H , причем SH — высота пирамиды. Найдите ребра DS и AD , если $BS = 4$, $DH = 1\frac{4}{5}$, $AB = 6$, $CD = CS$.

4961. Четырехугольная пирамида $SABCD$ вписана в сферу, центр которой лежит в плоскости основания $ABCD$. Диагонали AC и BD основания пересекаются в точке H , причем SH — высота пирамиды. Найдите ребра AS и AB , если $CS = 3$, $AH = 3$.

4962. Две противоположные боковые грани четырехугольной пирамиды $SABCD$ перпендикулярны основа-

нию, расстояние от вершины S до прямой AB равно $4\sqrt{2}$. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AD = BC$), описанная около окружности и такая, что $CD = 2$, $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$. Найдите расстояние от точки C до плоскости SAB .

Внутри пирамиды расположен конус так, что окружность его основания вписана в треугольник SCD , а вершина принадлежит грани SAB . Найдите объем конуса.

4963. В основании четырехугольной пирамиды $SKLMN$ лежит равнобедренная трапеция $KLMN$ ($LM = KN$), описанная около окружности радиуса $\sqrt{3}$, $\angle MLK = \frac{2\pi}{3}$. Две противоположные боковые грани перпендикулярны основанию, высота пирамиды равна $6\sqrt{3}$. Найдите расстояние от точки N до плоскости SKL .

Внутри пирамиды расположен конус так, что окружность его основания вписана в треугольник SMN , а вершина принадлежит грани SKL . Вычислите высоту конуса.

4964. В четырехугольной пирамиде $ABCDE$ основание $ABCD$ — параллелограмм, а грани ADE и BCE — прямоугольные треугольники. Ребро BC перпендикулярно медиане EP грани CDE и $BC = EP$. Сечением пирамиды плоскостью является равнобедренная трапеция $GKHL$, вершины которой G , K , H , L лежат соответственно на ребрах AE , BE , CE , DE , причем $GE = 3GA$ и $GH = EH$. Найдите отношение площади трапеции $GKHL$ к площади грани ABE .

4965. Основанием пирамиды $SABCD$ является трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такими, что $BC : AD = 3 : 5$. Диагонали трапеции пересекаются в точке E , а центр O вписанной в пирамиду сферы лежит на отрезке SE и делит его в отношении $SO : OE = 8 : 3$. Найдите площадь пол-

ной поверхности пирамиды, если площадь боковой грани SBC равна 9.

4966. Основанием пирамиды $SABCD$ является трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такими, что $BC:AD = 3:4$. Диагонали трапеции пересекаются в точке E , а центр O вписанной в пирамиду сферы лежит на отрезке SE и делит его в отношении $SO:OE = 7:5$. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если площадь боковой грани SBC равна 9.

4967. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды $SABC$ равно $\frac{11}{5}$ и составляет с плоскостью основания

ABC угол, равный $\arctg \frac{5\sqrt{2}}{4}$. Ци-

линдр расположен так, что окружность одного из его оснований проходит через середину ребра AC и не пересекает грань SAB . Ортогональные проекции цилиндра на плоскости SAB и SBC — прямоугольники с общей вершиной в точке S . Найдите объем цилиндра.

4968. Сфера, касающаяся нижнего основания цилиндра, имеет единственную общую точку с окружностью его верхнего основания и делит ось цилиндра в отношении $1:6:2$, считая от центра одного из оснований. Найдите объем цилиндра, если известно, что сфера касается двух его образующих, находящихся на расстоянии 8 друг от друга.

4969. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = AC = 25$, $BC = 40$. На ребре AB взята точка M так, что $BM = 15$. Через точку M проведена плоскость, образующая с плоскостью ABC угол $\arctg \frac{11}{15}$ и рассекающая призму

на два многогранника, площади поверхностей которых равны. Найдите объем призмы, если известно, что около одного из этих многогранников можно описать сферу, а около другого — нет.

4970. В правильной пирамиде $SMNPQ$ (S — вершина) точки K и F — середины ребер PQ и QM соответственно, точка E лежит на отрезке SK , причем $SK = 4$, $SE = \frac{8}{3}$. Расстояние от точ-

ки S до прямой EF равно $\sqrt{7}$. Найдите объем пирамиды.

4971. Сфера касается ребер BS , CS , CA и AB треугольной пирамиды $SABC$ в точках D , E , G и H соответственно. Найдите EH , если $DE = EG = 8$, $GH = 6$, $HD = 4$.

4972. Сфера касается ребер AS , CS , AB и BC треугольной пирамиды $SABC$ в точках D , E , F и G соответственно. Найдите FG , если $DE = DF = 8$, $DG = 3\sqrt{11}$ и FG на 2 больше, чем GE .

4973. На ребрах A_1B_1 , AB , A_1D_1 и DD_1 единичного куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ взяты точки K , L , M и N соответственно так, что $A_1K = \frac{2}{3}$, $AL = \frac{1}{5}$, $A_1M = \frac{1}{3}$. Определите, какое из ребер, A_1D_1 или D_1C_1 , пересекает плоскость, параллельную отрезку ML и содержащую отрезок KN . В каком отношении это ребро делится плоскостью?

4974. В шаре радиуса 9 через точку S проведены три равные хорды AA_1 , BB_1 и CC_1 так, что $AS = 4$, $A_1S = 8$, $BS < B_1S$, $CS < C_1S$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $SABC$.

4975. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 2, высота равна 3. Вершина A куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ находится в центре основания пирамиды, вершина C — на высоте пирамиды, а отрезок BC_1 лежит в плоскости одной из боковых граней пирамиды. Найдите ребро куба.

4976. В треугольной пирамиде $SABC$ выполнено $SA = SB = SC$, $AB = BC = AC$, $\tg \angle SAC = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Сфера ради-

уса $\sqrt{3}$ касается луча AS , касается плоскости SBC и касается плоскости

ABC в точке, лежащей на луче AC . Найдите наименьшее возможное значение длины отрезка AC .

4977. Сфера с центром в точке O проходит через вершины K, L и M треугольной пирамиды $KLMN$ и пересекает ребра KN, LN и MN в точках A, B, C соответственно. Известно, что $NL = 14$, $KN = 16$ и $MN : KL = 2\sqrt{5} : 3$. Проекциями точки O на плоскости KLN, LMN и KMN являются середины ребер KL, LM и KM соответственно. Расстояние между серединами ребер KL и MN равно $\sqrt{145}$. Найдите периметр треугольника ABC .

4978. В пирамиде $SABC$ грани ASC, BSC, ASB равновелики. Сумма расстояний от середины ребра BC до граней ASB и ASC в полтора раза меньше высоты пирамиды, опущенной из вершины S . Внутри пирамиды есть точка M , полусумма расстояний от которой до вершин A, B, C равна сумме расстояний до всех граней пирамиды. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если длина ребра AS равна $\sqrt{\frac{31}{11}}$.

4979. В пирамиде $SABC$ прямая, пересекающая ребра SC и AB и перпендикулярная им, проходит через середину ребра SC . Площадь грани ASC в два раза меньше площади грани ABC . На грани BSC есть точка M , сумма расстояний от которой до вершин S и C равна сумме расстояний до всех остальных граней пирамиды. Найдите объем пирамиды, если $AB = 2\sqrt{3}$, $AS = \sqrt{35}$.

4980. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Известно, что плоскости SAC и SBD перпендикулярны. Площади граней SAB, SBC и SCD соответственно равны 8, 7 и 1. Найдите площадь грани SDA .

4981. В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой, угол ABC равен $\arctg 2$ и $AB = AD$. Квадрат $KLMN$ расположен в пространстве так, что его центр совпа-

дает с серединой отрезка AB . Точка A лежит на стороне LK и $AL < AK$, точка M равноудалена от точек A и D . Расстояние от L до ближайшей к ней точки трапеции $ABCD$ равно $\frac{3}{2}$, а расстояние от M до ближайшей к ней точки трапеции $ABCD$ равно $\sqrt{6}$. Найдите площадь трапеции $ABCD$ и расстояние от точки M до плоскости $ABCD$.

4982. Сферы с центрами в точках O_1 и O_2 радиусов 3 и 1 соответственно касаются друг друга. Через точку M , удаленную от O_2 на расстояние 3, проведены две прямые, каждая из которых касается обеих сфер, причем точки касания лежат на прямых по одну сторону от точки M . Найдите угол между касательными, если известно, что одна из них образует с прямой O_1O_2 угол в 45° .

4983. Ортогональные проекции треугольника ABC на две взаимно перпендикулярные плоскости являются правильными треугольниками со сторонами, равными 1. Найдите периметр треугольника ABC , если известно, что $AB = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

4984. Все грани пирамиды $PQRS$ являются остроугольными треугольниками, а длины перпендикуляров, опущенных из вершин P, Q, R, S на противоположные грани, равны. Известно, что $SP = 6$, $\angle SRQ = 75^\circ$, а $\angle SPR = 45^\circ$. Найдите ребро PQ .

4985. Сфера с центром в точке O проходит через вершины A, B и C треугольной пирамиды $ABCD$ и пересекает прямые AD, BD и CD в точках K, L и M соответственно. Известно, что $AD = 10$, $BC : BD = 3 : 2$ и $AB : CD = 4\sqrt{3} : 11$. Проекциями точки O на плоскости ABD, BCD и CAD являются середины ребер AB, BC и AC соответственно. Расстояние между серединами ребер AB и CD равно 13. Найдите периметр треугольника KLM .

4986. Отрезок PQ параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $KLMN$, причем $KL = 4$, $PQ = 6$. Все стороны прямоугольника $KLMN$ и отрезки KP , LP , NQ , MQ , PQ касаются некоторого шара. Найдите площадь поверхности этого шара.

4987. Отрезок EF параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $ABCD$, причем $EF = 2$, $AB = 4$. Все стороны прямоугольника $ABCD$ и отрезки AE , BE , CF , DF , EF касаются некоторого шара. Найдите объем этого шара.

4988. В правильную треугольную пирамиду $SABC$ с вершиной S и основанием ABC вписан шар единичного радиуса; двугранный угол между основанием пирамиды и боковой гранью равен 60° . Докажите, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания AB и BC в некоторых точках M и N таких, что $MN = 5$, касающаяся шара в точке, удаленной на равные расстояния от точек M и N , и пересекающая продолжение высоты пирамиды SK за точку K в некоторой точке D . Найдите SD .

4989. Отрезок FG параллелен плоскости выпуклого пятиугольника $ABCDE$, причем точки A и G лежат по разные стороны от плоскости CBF . В треугольную пирамиду $BCFG$ вписан шар. Отношение расстояния от его центра до прямой FG к расстоянию от прямой FG до плоскости $ABCDE$ равно k . Двугранный угол пирамиды $BCFG$ с ребром BF равен α . Известно, что $\sin \angle CFB : \sin \angle CFG = l$. Через середину отрезка AF проведена плоскость, параллельная плоскости $ABCDE$. Найдите площадь сечения плоскостью P многогранника $ABCDEFG$, составленного из пирамиды $FABCDE$ с вершиной F и треугольной пирамиды $BCFG$, если известно, что площадь пятиугольника $ABCDE$ равна S , а сумма площадей всех граней пирамиды $BCFG$ равна σ .

4990. Докажите, что если существует шар, вписанный в многогран-

ник, то любая плоскость, делящая его объем и поверхность в одинаковом отношении, содержит центр этого шара.

4991. В правильной пирамиде $SMNPQ$ (S — вершина) точки K и F — середины ребер PQ и QM соответственно, точка E лежит на отрезке SK , причем $SK = 4$, $SE = \frac{8}{3}$. Рас-

стояние от точки S до прямой EF равно $\sqrt{7}$. Рассматриваются всевозможные правильные тетраэдры $ABCD$ такие, что точки A и B лежат на прямой EF , а прямая CD касается сферы радиуса 1 с центром в точке S в одной из точек отрезка CD . Найдите наименьшее ребро рассматриваемых тетраэдров.

4992. Основанием пирамиды $MBKHE$ служит выпуклый четырехугольник $MBKH$, в котором угол при вершине M равен $\frac{\pi}{2}$, угол, образованный диагональю BH и ребром BK , равен $\frac{\pi}{4}$, ребро MB равно 1. Площадь треугольника BKH в два раза больше площади треугольника MBH . Сумма ребер BE и HE равна $\sqrt{3}$. Объем пирамиды равен $\frac{1}{4}$. Найдите радиус шара, имеющего наибольший объем среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $MBKHE$.

4993. В правильную треугольную пирамиду $SABC$ вписан шар единичного радиуса; двугранный угол между основанием пирамиды и боковой гранью равен 60° . Докажите, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания AB и BC в некоторых точках M и N , таких, что $MN = 5$, касающаяся шара в точке, удаленной на равные расстояния от точек M и N , и пересекающая продолжение высоты пирамиды SK за точку K в некоторой точке D . Найдите SD .

4994. Длины ребер правильного тетраэдра $KMLN$ равны $2\sqrt{6}$. Сфера S_1 с центром в точке O_1 касается граней MNL , KML , KNL . Сфера S_2 с центром в точке O_2 касается сферы S_1 и плоскостей KML , MNL . Найдите радиус сферы S_1 , если отрезок O_1O_2 в два раза больше диаметра сферы S_1 , а расстояние от точки O_2 до ребра KN равно $\sqrt{7}$.

4995. Объем пирамиды $SABC$ равен V . Через точки M и N , лежащие на ребрах AS и AB соответственно, и внутреннюю точку P грани ABC проведена плоскость, пересекающая прямую CS в точке L . Пусть D и E — точки пересечения прямых AP и BP с ребрами BC и AC соответственно. Известно, что $NC = 2AN$, $AM = 2MS$, $AP = 3PD$ и $BP = 4PE$. Найдите объем пирамиды $ACLN$.

4996. Объем пирамиды $SABC$ равен V . Через точки M и N , лежащие на ребрах AS и AB соответственно, и внутреннюю точку P грани ABC проведена плоскость, пересекающая прямую CS в точке L . Пусть D и E — точки пересечения прямых AP и BP с ребрами BC и AC соответственно. Известно, что $AN = NC$, $MS = 2AM$, $AP = 4PD$ и $BP = 3PE$. Найдите объем пирамиды $ACLN$.

4997. В треугольной пирамиде $AKLM$ известно, что выполнено $AK = AL = AM$, $KL = LM = MK$, $\operatorname{tg} \angle AKM = \frac{7}{\sqrt{3}}$. Сфера радиуса $2\sqrt{3}$ касается луча LA , касается плоскости AKM и касается плоскости KLM в точ-

ке, лежащей на луче LM . Найдите наименьшее возможное значение длины отрезка LM .

4998. Основанием пирамиды $THPCK$ служит выпуклый четырехугольник $THPC$, который диагональю HC делится на два равновеликих треугольника. Известно, что $TH = 4$, $\operatorname{ctg} \angle HCP = \sqrt{2}$, $TK + CK = 4$. Объем пирамиды равен $5\frac{1}{3}$. Найдите радиус

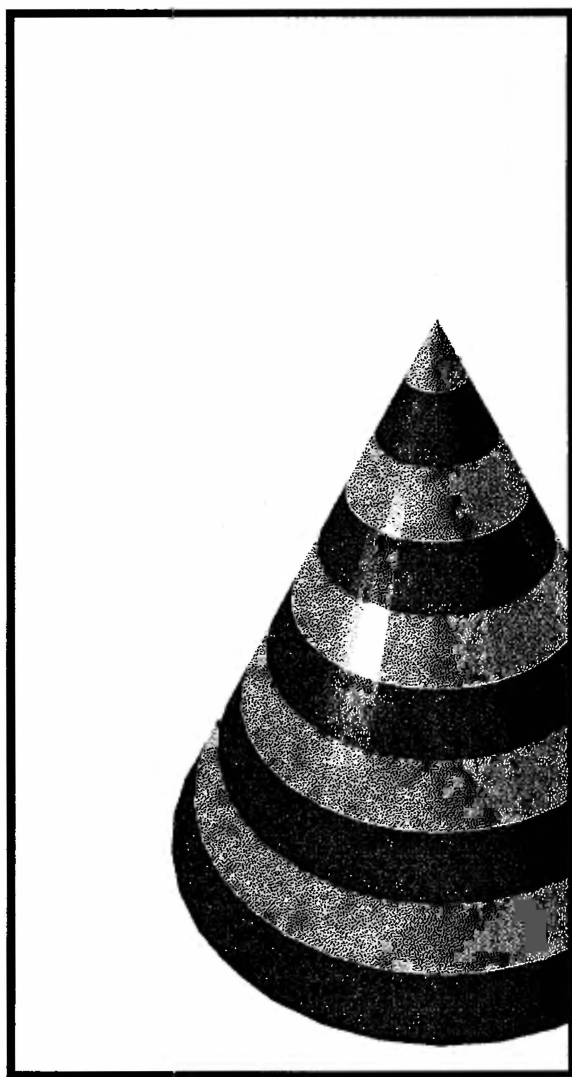
шара, имеющего наибольший объем среди шаров, помещающихся в пирамиде $THPCK$.

4999. Основанием пирамиды $ABMCP$ служит выпуклый четырехугольник $ABMC$, в котором угол при вершине A равен $\frac{\pi}{6}$, $AB = 1$. Площадь треугольника BMC в два раза больше площади треугольника ABC , $BP + CP = \sqrt{7}$. Объем пирамиды равен $\frac{3}{4}$. Най-

дите радиус шара, имеющего наименьший объем среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $ABMCP$.

5000. На плоскости α , проходящей через центр шара радиуса R , задана окружность с центром O_1 и радиусом r_1 , расположенная внутри шара. Все точки этой окружности соединены прямыми с точкой A , принадлежащей шару и удаленной от плоскости α на расстояние R . Множество отличных от A точек пересечения этих прямых с поверхностью шара является окружностью с центром O_2 и радиусом r_2 . Найдите расстояние от точки O_2 до плоскости α , если расстояние между точками A и O_1 равно a .

Приложения



ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ШКОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ПЛАНИМЕТРИЯ

1. Признаки равенства треугольников.

1) Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.

2) Сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то треугольники равны.

3) Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то треугольники равны.

2. Основные свойства и признаки равнобедренного треугольника.

1) Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

2) Медиана равнобедренного треугольника, проведенная из его вершины, является биссектрисой и высотой.

3) Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.

4) Если медиана треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.

5) Если биссектриса треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.

6) Если медиана треугольника является его биссектрисой, то треугольник равнобедренный.

3. Геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка, есть *прямая*, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину (серединный перпендикуляр к отрезку).

4. Признаки и свойства параллельных прямых.

1) Аксиома параллельных. Через данную точку можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

2) Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные внутренние накрест лежащие углы, то прямые параллельны.

3) Если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой.

4) Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

5) Если две параллельные прямые пересечь третьей, то образованные при этом внутренние накрест лежащие углы равны.

5. Теорема о сумме углов треугольника и следствия из нее.

1) Сумма внутренних углов треугольника равна 180° .

2) Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних не смежных с ним углов.

3) Сумма внутренних углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ \cdot (n - 2)$.

4) Сумма внешних углов n -угольника равна 360° .

5) Углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые.

6. Если биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке M , то $\angle BMC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$.

7. Угол между биссектрисами смежных углов равен 90° .

8. Биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны.

9. *Признаки равенства прямоугольных треугольников:*

- 1) по двум катетам;
- 2) по катету и гипотенузе;
- 3) по гипотенузе и острому углу;
- 4) по катету и острому углу.

10. Геометрическое место внутренних точек угла, равноудаленных от его сторон, есть *биссектриса угла*.

11. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы.

12. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, противолежащий этому катету, равен 30° .

13. **Неравенство треугольника.** Сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны.

14. **Следствие из неравенства треугольника.**

Сумма звеньев ломаной больше отрезка, соединяющего начало первого звена с концом последнего.

15. Против большего угла треугольника лежит большая сторона.

16. Против большей стороны треугольника лежит больший угол.

17. Гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета.

18. Если из одной точки проведены к прямой перпендикуляр и наклонные, то

1) перпендикуляр короче наклонных;

2) большей наклонной соответствует большая проекция и наоборот.

19. *Параллелограммом* называется четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Признаки и свойства параллелограмма.

1) Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.

2) Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.

3) Противоположные углы параллелограмма попарно равны.

4) Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

5) Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

6) Если две противоположные стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

7) Если диагонали четырёхугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

20. *Прямоугольником* называется параллелограмм с прямым углом.

Признаки и свойства прямоугольника.

1) Диагонали прямоугольника равны.

2) Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

21. Ромбом называется четырёхугольник, все стороны которого равны.

Признаки и свойства ромба.

1) Диагонали ромба перпендикулярны.

2) Диагонали ромба делят его углы пополам.

3) Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.

4) Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то этот параллелограмм — ромб.

22. Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны.

23. Геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой, — две параллельные прямые.

24. Теорема Фалеса. Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла отложатся также равные отрезки.

25. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника называется *средней линией треугольника*.

Теорема о средней линии треугольника. Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна её половине.

26. Свойство середин сторон четырёхугольника.

Средины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

27. Теорема о медианах треугольника. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

28. а) Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник — прямоугольный.

б) Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

29. Трапецией называется четырёхугольник, у которого только две противоположные стороны (основания) параллельны. Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины непараллельных сторон (боковых сторон).

Теорема о средней линии трапеции. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

30. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

31. Трапеция называется *равнобедренной*, если её боковые стороны равны.

Свойства и признаки равнобедренной трапеции.

1) Углы при основании равнобедренной трапеции равны.

2) Диагонали равнобедренной трапеции равны.

3) Если углы при основании трапеции равны, то она равнобедренная.

4) Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.

5) Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.

32. Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, удаленных от данной точки, называемой центром окружности, на одно и то же положительное расстояние.

Свойства окружности.

1) Диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам.

2) Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.

3) Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.

4) Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.

5) Хорды окружности, удаленные от центра на равные расстояния, равны.

6) Окружность симметрична относительно любого своего диаметра.

7) Дуги окружности, заключённые между параллельными хордами, равны.

8) Из двух хорд больше та, которая менее удалена от центра.

9) Диаметр есть наибольшая хорда окружности.

33. Замечательное свойство окружности. Геометрическое место точек M , из которых отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMB = 90^\circ$), есть окружность с диаметром AB без точек A и B .

34. Геометрическое место точек M , из которых отрезок AB виден под острым углом ($\angle AMB < 90^\circ$), есть внешность круга с диаметром AB без точек прямой AB .

35. Геометрическое место точек M , из которых отрезок AB виден под тупым углом ($\angle AMB > 90^\circ$), есть внутренность круга с диаметром AB без точек отрезка AB .

36. Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.

37. Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде.

38. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы.

39. Теорема о высотах треугольника. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

40. Прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку, называется *касательной к окружности*.

1) Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

2) Если прямая l , проходящая через точку на окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то прямая l — касательная к окружности.

3) Если прямые, проходящие через точку M , касаются окружности в точках A и B , то $MA = MB$.

4) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

5) Теорема о биссектрисах треугольника. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

41. Радиус r окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a , b и гипотенузой c , равен $\frac{a+b-c}{2}$.

42. Если M — точка касания окружности, вписанной в треугольник ABC со стороной AC , то $AM = p - BC$, где p — полупериметр треугольника.

43. Окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC . Тогда расстояние от

вершины A до точки касания окружности с прямой AB равно полупериметру треугольника ABC .

44. Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB , BC и AC соответственно в точках K , L и M . Если $\angle KLM = \alpha$, то $\angle BAC = 180^\circ - 2\alpha$.

45. Даны окружности радиусов r и R ($R > r$). Расстояние между их центрами равно a ($a > R + r$). Тогда отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключенные между точками касания, равны соответственно $\sqrt{a^2 - (R - r)^2}$ и $\sqrt{a^2 - (R + r)^2}$.

46. Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны. Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в четырёхугольник можно вписать окружность.

47. *Касающиеся окружности.* Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точка касания).

1) Точка касания двух окружностей лежит на их линии центров.

2) Окружности радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $R + r = O_1O_2$.

3) Окружности радиусов r и R ($r < R$) с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда $R - r = O_1O_2$.

4) Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K . Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной, проходящей через точку K , в точке C . Тогда $\angle AKB = 90^\circ$ и $\angle O_1CO_2 = 90^\circ$.

48. Углы, связанные с окружностью.

1) Угловая величина дуги окружности равна угловой величине центрального угла.

2) Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

3) Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, отсекаемых хордами.

4) Угол между двумя секущими равен полуразности дуг, отсекаемых секущими на окружности.

5) Угол между касательной и хордой равен половине угловой величины дуги, заключённой между ними.

49. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

50. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей.

51. Если четырёхугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180° .

52. Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180° , то около него можно описать окружность.

53. Если в трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.

54. Если M — точка на отрезке AB , причем $AM : BM = a : b$, то

$$AM : AB = a : (a + b),$$

$$BM : AB = b : (a + b).$$

55. Теорема о пропорциональных отрезках. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки.

56. Признаки подобия треугольников.

1) Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключённые между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

2) Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.

3) Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого, то треугольники подобны.

57. Отношение соответствующих линейных элементов подобных фигур равно коэффициенту подобия.

58. Замечательное свойство трапеции. Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

59. Свойство биссектрисы треугольника. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

60. Произведение основания на высоту для данного треугольника постоянно.

61. Если BM и CN — высоты треугольника ABC , то треугольник ANM подобен треугольнику ABC , причем коэффициент подобия равен $|\cos \angle A|$.

62. Произведения отрезков пересекающихся хорд окружностей равны.

63. Теорема о касательной и секущей и следствие из нее.

1) Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.

2) Произведение всей секущей на её внешнюю часть для данной точки и данной окружности постоянно.

64. Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике.

1) Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего или на косинус прилежащего к этому катету острого угла.

2) Катет прямоугольного треугольника равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего или котангенс прилежащего к этому катету острого угла.

65. Теорема Пифагора. Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

66. Теорема, обратная теореме Пифагора. Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треугольник — прямоугольный.

67. Средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное проекций катетов на гипотенузу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

68. Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

69. Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен отрезку общей внутренней касательной, заключенному между общими внешними. Оба эти отрезка равны $2\sqrt{Rr}$.

70. Метрические соотношения в треугольнике.

1) **Теорема косинусов и следствия** из неё. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

2) Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

3) **Формула для медианы** треугольника: если m — медиана треугольника, проведённая к стороне c , то

$$m = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2},$$

где a и b — остальные стороны треугольника.

4) **Теорема синусов.** Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

5) **Обобщённая теорема синусов.** Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около треугольника.

71. Формулы площади треугольника.

1) Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.

2) Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

3) Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.

4) Площадь треугольника равна произведению трёх его сторон, делённому на учетверённый радиус описанной окружности.

5) **Формула Герона.**

72. Элементы равностороннего треугольника со стороной a .

Пусть h, S, r, R — высота, площадь, радиусы описанной и вписанной

окружностей равностороннего треугольника со стороной a . Тогда

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, r = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

73. Формулы площади параллелограмма.

1) Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту.

2) Площадь параллелограмма равна произведению его соседних сторон на синус угла между ними.

3) Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.

4) Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

74. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

75. Площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

76. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

77. Если в многоугольник можно вписать окружность, то его площадь равна произведению полупериметра многоугольника на радиус этой окружности.

78. Если M — точка на стороне BC треугольника ABC , то

$$\frac{S(AMB)}{S(AMC)} = \frac{BM}{CM}.$$

79. Если P и Q — точки на сторонах AB и AC (или на их продолжениях) треугольника ABC , то

$$\frac{S(APQ)}{S(ABC)} = \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AQ}{AC}.$$

80. Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

81. Площадь круга радиуса R равна πR^2 .

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Факты, непосредственно связанные с аксиомами.

1. Аксиомы стереометрии.

2. Через прямую и точку, не лежащую на этой прямой, проходит единственная плоскость.

3. Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.

4. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной.

Параллельность в пространстве.

5. *Признак параллельности прямой и плоскости.* Если прямая a параллельна некоторой прямой плоскости α , то прямая a параллельна плоскости α .

6. Если через прямую a , параллельную плоскости α , провести плоскость, пересекающую плоскость α по прямой b , то прямые a и b параллельны.

7. Если прямые a и b параллельны, а плоскость, проходящая через прямую a , пересекается с плоскостью, проходящей через прямую b , то прямая пересечения плоскостей параллельна прямым a и b .

8. *Транзитивность параллельности прямых в пространстве.* Если прямая a параллельна прямой b , а прямая b параллельна прямой c , то прямая a параллельна прямой c .

9. *Признак параллельности плоскостей.* Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекаю-

щимся прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.

10. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то прямые пересечения параллельны.

11. *Транзитивность параллельности плоскостей.* Если плоскость α параллельна плоскости β , а плоскость β параллельна плоскости γ , то плоскость α параллельна плоскости γ .

12. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

13. Через точку, не лежащую в плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной.

14. *Свойства граней и диагоналей параллелепипеда.* Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны. Диагонали параллелепипеда пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

15. *Теорема о медианах тетраэдра.* Медианы тетраэдра (отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней) пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3 : 1, считая от вершины.

16. Диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проходит через точку пересечения медиан треугольника $A_1 B D$ и делится ею в отношении 1 : 2, считая от точки A .

17. Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной основанию, то в сечении образуется многоугольник, подобный данному.

Скрещивающиеся прямые.

18. Признак скрещивающихся прямых. Если прямая a лежит в плоскости α , а прямая b пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на прямой a , то a и b — скрещивающиеся прямые.

19. Через две скрещивающиеся прямые проходит единственная пара параллельных плоскостей.

20. Геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых есть плоскость, параллельная этим прямым и проходящая через середину одного из таких отрезков.

21. Угол между скрещивающимися прямыми (угол между пересекающимися в произвольной точке M прямыми, соответственно параллельными данным) не зависит от выбора точки M .

22. Для любых двух скрещивающихся прямых существует единственный общий перпендикуляр (отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный обоим прямым).

Параллельное проектирование.

23. Прямая, непараллельная проектирующей, переходит в прямую.

24. Пара параллельных прямых, непараллельных проектирующей, переходит в пару параллельных прямых.

25. Сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.

26. Наклонная пересекает плоскость в точке, лежащей на любой её параллельной проекции на эту плоскость.

27. Площадь ортогональной проекции плоского многоугольника на

плоскость равна произведению площади проектируемого многоугольника на косинус угла между плоскостью этого многоугольника и плоскостью проекций.

Координаты и векторы в пространстве.

28. Координаты вектора равны разности соответствующих координат конца и начала данного вектора.

29. Для того, чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, где k — некоторое число.

30. Для того, чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить в виде линейной комбинации двух других ($\vec{a} = x \cdot \vec{b} + y \cdot \vec{c}$, где x, y — некоторые числа).

31. Любой вектор можно единственным образом разложить по трём некомпланарным векторам.

32. Если M — середина AB , то

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}).$$

33. Если M — середина AB , а N — середина CD , то

$$\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{BD}).$$

34. Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC , то

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}).$$

35. Если M — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, то

$$\vec{OM} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}).$$

36. Координаты середины отрезка равны средним арифметическим координат его концов.

37. Свойства скалярного произведения векторов.

$$а) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$б) \alpha \vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b});$$

$$в) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c};$$

$$г) |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2};$$

$$д) (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{b}^2;$$

е) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны;

ж) ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

38. Расстояние между точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ равно

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

39. Если φ — угол между ненулевыми векторами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

40. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n}(a; b; c)$ (вектор нормали), имеет вид:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

41. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно ненулевому

вектору $\vec{m}(a; b; c)$ (направляющий вектор), имеют вид:

$$\begin{cases} x - x_0 = at, \\ y - y_0 = bt, \\ z - z_0 = ct. \end{cases}$$

42. Прямая как пересечение двух плоскостей задаётся системой

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{cases}$$

где

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0 \text{ и } A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0.$$

43. Если φ — угол между плоскостями, заданными уравнениями

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

и

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0,$$

то

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

44. Уравнение плоскости «в отрезках». Если плоскость пересекает оси координат в точках $A(p; 0; 0)$, $B(0; q; 0)$ и $C(0; 0; r)$ ($p, q, r \neq 0$), то её уравнение можно представить в виде

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.$$

45. Если ρ — расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Перпендикулярность прямой и плоскости.

46. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

47. Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны.

48. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то вторая прямая также перпендикулярна этой плоскости.

49. Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

50. Если прямая и плоскость перпендикулярны одной прямой, то они параллельны.

51. Через данную точку проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.

52. Через данную точку проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

53. Теорема о трёх перпендикулярах. Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на эту плоскость.

54. Если из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонные, то

а) перпендикуляр короче наклонных;

б) равные наклонные имеют равные ортогональные проекции;

в) большей наклонной соответствует большая ортогональная проекция;

г) из двух наклонных больше та, ортогональная проекция которой больше.

55. Теорема об угле прямой с плоскостью. Угол между наклонной и её ортогональной проекцией на плоскость меньше угла между этой наклонной и любой другой прямой плоскости.

56. Геометрическое место точек, равноудалённых от концов отрезка, есть *плоскость*, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

57. Геометрическое место точек, удалённых на данное расстояние от данной плоскости, есть *две параллельные плоскости*.

58. Геометрическое место точек, равноудалённых от вершин треугольника, есть *прямая*, проходящая через центр описанной окружности треугольника перпендикулярно его плоскости.

59. Если боковые рёбра пирамиды равны, то её высота проходит через центр окружности, описанной около основания.

Двугранный угол.

60. Линейный угол двугранного угла (сечение двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру) не зависит от выбора точки на ребре двугранного угла.

61. Геометрическое место внутренних точек двугранного угла, равноудалённых от его граней, есть *биссекторная плоскость двугранного угла*.

62. *Необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей*. Две плоскости перпендикулярны (образуют прямой двугранный угол) тогда и только тогда, когда одна из них проходит через перпендикуляр к другой.

63. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то они пересекаются по прямой, также перпендикулярной этой плоскости.

64. Если боковые грани треугольной пирамиды образуют равные дву-

гранные углы с плоскостью основания, то высота пирамиды проходит либо через центр вписанной окружности, либо через центр одной из вневписанных окружностей основания.

Многогранные углы.

65. Плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

66. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360° .

67. Свойства диагоналей прямоугольного параллелепипеда.

а) Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

б) Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений (длин трёх рёбер с общей вершиной).

Сфера. Касательная плоскость. Касающиеся сферы.

68. Сечение сферы плоскостью, удалённой от центра сферы на расстояние, меньшее радиуса, есть окружность. Основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость, есть центр этой окружности.

69. Касательная плоскость к сфере (плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведённому в точку касания.

70. Касательная прямая к сфере (прямая, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведённому в точку касания.

71. Центр сферы, вписанной в двугранный угол, лежит в биссекторной плоскости этого угла.

72. Отрезки касательных прямых, проведённых к сфере из одной точки, равны между собой.

73. Линия центров касающихся сфер (имеющих единственную общую точку) проходит через их точку касания.

74. Если две различные сферы имеют более одной общей точки, то они пересекаются по окружности. Плоскость этой окружности перпендикулярна линии центров данных сфер.

Правильная пирамида.

75. Если $ABCD$ — правильная треугольная пирамида с вершиной D , высотой DM и стороной основания a , а A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон соответственно BC , AC и AB , то

а) $\angle DAM = \angle DBM = \angle DCM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) $\angle DA_1M = \angle DB_1M = \angle DC_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) $\angle AFB$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A основания на боковое ребро DC) — линейный угол между боковыми гранями пирамиды;

г) $AA_1 = BB_1 = CC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ — высота треугольника основания пирамиды;

д) $AM = BM = CM = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = \frac{1}{3}AA_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ — ортогональная проекция апофемы на плоскость основания.

ж) A_1F — общий перпендикуляр противоположных рёбер AB и CD .

76. Противоположные ребра правильной треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны.

77. Высота правильного тетраэдра с ребром a равна $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

78. Если $PABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с вершиной P , высотой PM и стороной основания a , а A_1 , B_1 , C_1 и D_1 — середины сторон соответственно AB , BC , CD и AD , то

а) $\angle PAM = \angle PBM = \angle PCM = \angle PDM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) $\angle PA_1M = \angle PB_1M = \angle PC_1M = \angle PD_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) $\angle BFD$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B основания на боковое ребро AP) — линейный угол между соседними боковыми гранями пирамиды;

г) $\angle A_1PC_1 = \angle B_1PD_1$ — линейный угол двугранного угла между противоположными боковыми гранями;

д) $AM = BM = CM = DM = \frac{1}{2}DB = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = D_1M = \frac{1}{2}a$ — ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;

ж) FM — общий перпендикуляр диагонали BD основания и скрещивающегося с ней бокового ребра AP .

79. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ним диагонали основания.

Площадь поверхности многогранника.

80. Боковая поверхность призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призмы на боковое ребро.

81. Боковая поверхность правильной пирамиды равна площади её основания, делённой на косинус угла боковой грани с плоскостью основания.

Объёмы многогранников.

82. Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.

83. Объём наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.

84. Объём призмы равен произведению площади основания на высоту.

85. Объём треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние между этой гранью и противоположащим ей боковым ребром.

86. Объём пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту.

87. Пирамиды с равными высотами и равновеликими основаниями равновелики.

88. Плоскость, проходящая через вершину пирамиды и прямую, лежащую в основании, делит объём пирамиды в том же отношении, в котором прямая делит площадь основания.

89. Если точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на боковых рёбрах соответственно DA , DB и DC треугольной пирамиды $ABCD$ или на их продолжениях, то объём

пирамиды $A_1B_1C_1D_1$ относится к объёму пирамиды $ABCD$ как произведение отношений $\frac{DA_1}{DA} \cdot \frac{DB_1}{DB} \cdot \frac{DC_1}{DC}$.

90. Отношение объёмов подобных многогранников равно кубу коэффициента подобия.

91. Произведение площади основания на высоту тетраэдра постоянно.

92. Объём тетраэдра равен шестой части произведения длин двух противоположных рёбер на расстояние между ними и на синус угла между ними, т. е. $V = \frac{1}{6} abc \cdot \sin \varphi$.

93. Объём тетраэдра равен двум третям произведения площадей двух граней на синус угла между ними, делённому на их общее ребро, т. е. $V = \frac{2}{3} \frac{P \cdot Q \cdot \sin \varphi}{a}$.

94. а) Объём тетраэдра равен трети произведения его полной поверхности на радиус вписанной сферы.

б) Объём многогранника, в который можно вписать сферу, равен трети произведения полной поверхности многогранника на радиус сферы.

Объёмы и поверхности круглых тел.

95. Объём цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

96. Объём конуса равен трети произведения площади его основания на высоту.

97. Объём шара радиуса R равен $\frac{4}{3} \pi R^3$.

98. Объём шарового сегмента высотой h шара радиуса R равен

$$\pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} H \right).$$

99. Боковая поверхность цилиндра с высотой h и радиусом основания r равна $2\pi r h$.

100. Боковая поверхность конуса с образующей l и радиусом основания r равна $\pi r l$.

101. Поверхность сферы радиуса R равна $4\pi R^2$.

102. Сферическая поверхность шарового сегмента высотой h шара радиуса R равна $2\pi R h$.

ОТВЕТЫ

ПЛАНИМЕТРИЯ

Раздел 1

§1

1. 3 : 2; 2 : 5; 2 : 3. 2. 12. 3. $\frac{7}{2}$; $\frac{17}{2}$. 4. 6. 5. 2.
6. 105°, 75°. 7. 45°, 135°. 8. 41°; 139°; 139°.

9. 8 или 2. 10. $\frac{5}{2}$. 11. В любой точке отрезка

AB. 14. 4 или 12. 15. 2 : 1; 1 : 2; 1 : 4. 16. 4; 2.
17. 30°; 20°; 40°. 18. 3 : 7; 4 : 7. 19. У средней
избы. 23. 2 : 7 и 5 : 7; 2 : 3 и 5 : 3. 25. 1, 3, 5
или 7. 29. $m : (m + n)$ и $n : (m + n)$; $m : (n - m)$
и $n : (n - m)$; $m : (m - n)$ и $n : (m - n)$.
30. $AD : DC = 2 : 3$. 33. 6°; 0,5°. 34. $DE : EC =$
 $= 3 : 5$. 35. 45°, 45°, 135°, 135°. 36. Пусть M
искомая точка. а) Либо M лежит на отрезке
AB и $AM : MB = 2 : 1$, либо B — середина от-
резка AM ; б) либо M лежит на отрезке AB и
 $AM : MB = 1 : 3$, либо A лежит на отрезке MB
и $AM : AB = 1 : 2$. 38. 62,5°. 39. 1° или 179°.
40. Любая точка на отрезке BC. 41. На луче с
началом в середине отрезка AB, содержащем

точку A. 43. 13 ч 5 $\frac{5}{11}$ мин, т. е. через $\frac{12}{11}$ часа.

45. Пусть M_1 и M_2 — точки, в которых ука-
занное отношение равно 2. а) Все отличные от
B точки между M_1 и M_2 ; б) все точки прямой,
не лежащие на отрезке M_1M_2 . 47. В точке A.
48. а) Да. б) Нет.

§2

62. 10. 78. 18,5. 80. 75°, 65°, 40°. 88. 20°, 30°,
130°. 90. 105°; $180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$; 155°; $90^\circ + \frac{\gamma}{2}$.

91. 140°. 92. $\frac{1}{2} \angle A$, $\frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle C$, $\angle B + \frac{1}{2} \angle C$
и т. д. 94. 30°, 100°, 50°. 95. 90°; 40°; 50° и
90°; 40°; 50°. 96. 50°, 110°, 20°. 101. $\frac{1}{2} \angle A$,

$\frac{1}{2} \angle C$, $90^\circ + \frac{1}{2} \angle B$. 102. 150°. 104. 24°, 24°,
132°. 105. 70°. 107. 90°. 108. 90°. 109. 50°.
112. 7 : 6 : 5. 117. 30°. 118. 2 и 6. 119. 70°,
55°, 55°. 124. 6. 125. $AB : AC = 1 : 2$. 126. 5; 4.
133. 1. 135. 30°, 60°. 136. Нет. 143. 37,5°.
144. 25°. 145. 20°. 146. Да. 147. 40°. 148. α
или $180^\circ - \alpha$. 150. 30° или 150°. 153. $180^\circ/7$,
 $540^\circ/7$, $540^\circ/7$. 154. 25. 155. Можно. 157. Об-
ратное утверждение неверно. 160. 36°. 161. 7
или 9. 163. $\angle BAC = 110^\circ$, $\angle BCA = 30^\circ$, $\angle DCA =$
 $= 60^\circ$, $\angle DAC = 80^\circ$. 169. 40°. 172. 135°.
173. 45°. 178. а) 360°; б) 540°; в) $180^\circ \cdot (n - 2)$.
181. $\angle A = \angle B$ или $\angle A + \angle B = 120^\circ$. 183. Нет.
186. 4. 187. 1 : 2. 188. 36°, 36°, 108° или 60°,
60°, 60°. 189. Четверть окружности. 194. 180°.
200. 60°, 60°. 201. 40°, 90°, 50°. 202. 360°.

203. 2 α . 206. $\frac{\pi}{28}$. 207. 36°, 36°, 108° и 72°,
72°, 36°. 208. 70°. 209. Нет. 210. 90°. 211. 30°,
60°, 90°. 212. 4°, 88°, 88°. 213. а) $60^\circ \leq \alpha <$
 $< 180^\circ$; б) $0^\circ < \alpha \leq 60^\circ$; в) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. 214. 2.
215. 30°. 217. 50°. 221. 36°, 36°, 108°.
222. 75°. 223. 70°. 224. 85°. 227. 54°.

§3

233. 60°. 234. 120°. 235. R. 237. 10. 238. 2R.
239. 0,5. 240. 8. 241. 16. 243. 1. 244. $p - r$.
245. 3, 6, 9, 6. 251. 60°, 60°, 60°. 253. 1.
254. $R - r$. 256. 2. 257. 4. 258. 6 : 5.
259. Центр круга. 261. 8. 263. 2. 267. R, 60°.
268. 9. 269. 60. 270. 45°, 45°, 90°. 271. 30°,
30°, 120°. 272. 2 и 4. 273. R. 274. 2. 275. 2R.
276. 45°. 278. а) 90°; б) 120°. 279. 1.

283. $2(r + R)$. 284. 80° . 288. 125° . 291. 6.
 292. 60° , 60° , 60° . 293. $\frac{R}{3}$. 294. $3r$. 295. 2.
 299. $\frac{1}{2}(a + b)$. 301. 1. 302. 1. 303. $3 : 1$, $3 : 2$,
 $2 : 1$. 304. 60° . 308. 8 и 6. 313. $1 : 3$, считая от
 точки O . 315. 60° , 120° . 317. 30° . 319. 60° .
 320. 8. 326. $a - b + c - d + e$. 327. $90^\circ - \alpha$.
 339. 2R. 346. $R - r$. 347. 40° . 348. 18. 350. 2.
 351. $\frac{a}{2}$. 352. а) касаются; б) одна внутри дру-
 гой; в) одна вне другой. 353. 30° , 30° , 150° ,
 150° . 354. 24. 355. Окружность с диаметром
 AB без точек A и B . 356. 30° , 60° . 357. 30° ,
 60° . 358. 55° . 359. $1 : 3$. 360. 120° . 368. 4.
 369. a . 370. a . 374. $\frac{1}{2}(a + c - b)$, $\frac{1}{2}(a + b - c)$.
 377. $\frac{1}{4}|a - b|$. 378. $\frac{1}{2}|a - b|$. 379. $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$,
 $90^\circ - \frac{1}{2}\beta$, $90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$. 383. 36° , 36° , 108° .
 386. $\frac{|a - b|}{2}$. 387. 2. 389. Точка пересечения
 биссектрис треугольника ABC . 392. $\frac{1}{2}(e - d +$
 $+ c - b + a)$, $\frac{1}{2}(a - e + d - c + b)$. 393. a . 395. 1.
 396. 2. 397. 60° . 398. $3 : 2$ или $1 : 2$. 402. 16.
 403. 75° , 75° , 105° . 404. 36° , 36° , 108° .
 411. Верно. 413. $b + p$.

§ 4

431. $3; 9; 3; 9$. 432. 65° , 115° , 65° , 115° . 433. 4;
 4; 8; 8. 434. 14. 436. 12. 437. 7; 10; 11.
 438. 60° , 120° . 439. 150° . 442. $\frac{1}{2}c$. 444. 3.
 448. 12. 449. 25 и 10; 18,75 и 7,5. 450. 1) па-
 раллелограмм; 2) параллелограмм; 3) ромб;
 4) прямоугольник; 5) квадрат; 6) паралле-
 лограмм. 454. 2; 4; 2; 4. 456. 20° , 80° , 80° .
 457. $a + b$. 461. $a + b$. 462. 56. 463. 45° . 465. a .
 466. 4, 30° , 120° . 467. 3. 468. $\frac{1}{2}(a - b)$, $\frac{1}{2}(a + b)$.
 469. 40° ; 140° ; 40° ; 140° ; 5; 5; 5; 5. 470. 25.
 471. 3; 2; 3. 472. 14; 8. 474. 14. 475. a . 477. $2a$.
 478. 4. 479. 18. 480. 16. 481. 3; 5; 3; 5; 90° ;
 90° ; 90° ; 90° . 483. 12 и 4. 484. 5. 486. $\frac{1}{2}(a + b)$.
 492. $\frac{4}{5}$. 493. 10. 494. 1. 497. a , $a + b$, a , $a + b$

или b , $a + b$, b , $a + b$. 500. В точке пересечения
 диагоналей. 506. $1 : 2$. 511. 60° , 60° , 120° ,
 120° . 512. 8. 513. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 514. 2. 515. 4; 8. 516. 4;
 8; 4; 8. 518. 6. 519. 20. 520. 4. 525. Если $a > b$,
 то CD ; если $a < b$, то BC . 528. В точке пересе-
 чения диагоналей. 529. $\frac{1}{2}a$. 530. $\frac{1}{3}a$. 531. 12.
 532. 1. 533. 2. 534. 9. 535. 15. 538. 32. 540. 5.
 541. 5. 542. 9. 543. 6. 551. $\frac{1}{2}a$. 554. Верно.
 555. Нет. 556. 6. 560. Нет. 561. $\frac{a - b}{2}$.
 563. $1 : 2$. 567. 60° , 120° . 568. $1 : 3$, считая от
 вершины C . 571. 3. 572. $\frac{1}{2}(a + b)$. 574. 2.
 576. 16. 583. $a + b$. 585. $a + b + c$. 588. $2a$.
 589. $2a$. 590. $\frac{1}{4}a$. 591. Прямая, параллельная
 данной. 592. 1. 593. 90° . 594. 8; 2; 3.
 599. 8 решений: 1) 1 и 5; 2) 4 и 5; 3) 3 и 7; 4) 4
 и 7; 5) 3 и 8; 6) 5 и 8; 7) 5 и 7; 8) 2 и 7. 606. 5.
 607. 6. 609. $\frac{1}{2}(b + d - a - c)$. 611. 45° . 614. 5;
 3. 620. 20° . 624. 30° или 150° . 625. $\frac{1}{2}a$.

§ 5

636. Дуги двух равных окружностей.
 638. 100° . 639. 145° . 640. 70° , 110° .
 641. $37^\circ 30'$. 642. $67^\circ 30'$. 643. 105° . 644. 1.
 645. 40° , 140° , 40° , 140° . 646. 40° . 647. 45° .
 648. 20° . 649. 110° , 250° . 650. $33^\circ 20'$.
 651. 100° . 652. 143° , 37° , 143° , 37° .
 653. а) Да; б) нет. 654. 45° , 90° , 135° , 90° .
 655. $\angle ABC = 112^\circ$, $\angle BCD = 77^\circ$, $\angle CDA = 68^\circ$,
 $\angle DAB = 103^\circ$. 656. 140° . 657. $52,5^\circ$; $82,5^\circ$;
 45° . 658. 100° . 659. 40° . 660. 60° . 661. $45^\circ - \frac{\alpha}{4}$.
 662. 80° , 10° . 663. 91° . 664. 108° , 85° или 45° .
 666. 154° . 667. $\angle MAB = \angle NAC = 40^\circ$ или
 $\angle MAB = \angle NAC = 140^\circ$. 668. 50° , 130° .
 669. 105° , 115° , 140° . 670. 105° , 35° . 671. По-
 полам; на три равные части. 672. 7° .
 673. а) 40° , б) 36° . 674. 90° , 90° , $90^\circ - \alpha$.
 675. 18° . 676. 35° или 55° . 679. 40° . 680. 40° ,
 40° , 100° . 681. $78^\circ 45'$. 682. 144° . 684. 50° , 60° ,
 70° . 688. 72° . 690. Вне. 692. 90° , 45° , 45° .
 696. $\frac{\alpha + \beta}{2}$. 697. $\frac{\alpha - \beta}{2}$. 698. $\frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$.

699. $\frac{180^\circ - m^\circ}{2}$. 700. 80° . 701. 81° . 702. 1,5 и 3,5. 705. На диагонали AC. 708. 165° , 105° .
 712. 1. 716. 90° . 717. $\frac{\pi}{2} + \alpha$. 718. $\frac{\pi}{2} - \alpha$.
 722. 80° . 723. 90° . 727. $\frac{h}{\sqrt{3}}$. 730. 60° . 732. 50° .
 734. $\cup MC : \cup CB = 2n + 1$. 735. $\cup MA : \cup AB = (1 - n) : (3n + 1)$. 738. 30° , 40° , 110° . 749. $\sqrt{3}$.
 756. 52° . 757. а) 1; б) 1. 761. $\frac{3\pi}{7}$. 763. 50° .
 765. Диаметр окружности. 767. $\frac{2\sqrt{4 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$.
 773. 45° . 775. 45° . 777. $\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$. 778. $\frac{\alpha + \beta}{2}$.
 783. $180^\circ - 2\alpha$. 790. 60° или 30° . 800. 58° .
 804. 90° , 60° , 30° . 805. Нет. 808. 17.
 816. 90° , 30° , 60° . 820. 45° . 821. 60° . 827. 75° .
 831. 1, b + 1.

56

837. 37. 838. 12. 839. 77. 840. 61.
 841. $\frac{\alpha}{\sin \alpha}$; a ctg α . 842. 13. 843. 24. 844. 12.
 845. 3; 4. 846. 24. 847. $2\sqrt{3}$. 848. 8.
 849. $8\sqrt{2}$. 850. 6. 851. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. 853. 21. 854. 6.
 855. 7,5. 856. $c \cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} c \sin 2\alpha$. 857. $\frac{8}{\sqrt{3}}$.
 858. $\sqrt{a(a+b)}$, $\sqrt{b(a+b)}$. 859. $\frac{1}{4}(a^2 - b^2)$.
 860. 40. 861. 36; 54. 863. $\sqrt{3}$. 864. 50.
 865. $\frac{BK}{AH} > 2$. 866. $3\sqrt{30}$. 867. $\sqrt{2rR}$. 868. 10.
 869. $\frac{25}{8}$. 870. $3\sqrt{30}$. 871. $2\sqrt{5}$. 872. $\frac{\sqrt{30}}{4}$.
 873. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. 874. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. 875. $3\sqrt{2}$;
 $2\sqrt{13}$; $\sqrt{10}$. 876. 5; $2\sqrt{13}$. Опустите перпендикуляр из вершины тупого угла трапеции на ее большее основание. 877. 18 и 98. 878. 29.
 879. $n\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$; $m\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$. 880. 15; 15; 30; 30.
 881. $\sqrt{7}$. 882. $R\sqrt{5}$, $R\sqrt{2}$. 883. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 884. $\frac{20}{3}$.

885. $\frac{R^2 - a^2}{2R}$. 886. $R(\sqrt{2} - 1)$. 887. 80. 888. 20.
 889. $\frac{4R\sqrt{5}}{5}$. 890. $R \sin 2\alpha$. 891. $2m$; m ; $m\sqrt{3}$.
 892. $2R \sin \alpha \cos \alpha = R \sin 2\alpha$. 893. $4\sqrt{3}$, $2\sqrt{19}$.
 894. 10. 896. $a\sqrt{3}$. 897. 25 или 11. 899. 5.
 900. 9; $9\sqrt{3}$; 18. 901. $3\sqrt{3}$. 902. 6. 903. $\frac{p}{8} \sin \alpha$.
 904. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 6ab + b^2}$. 905. 2. 906. $6r\sqrt{3}$.
 907. 9. 909. $\frac{R}{8}$. 910. $\frac{a^2 + 4h^2}{8h}$. 911. 39, 9.
 912. 65. 913. 20. 914. 13, 44. 915. $\sqrt{R^2 + 3r^2}$.
 916. $\frac{1}{2} \frac{a^3 b}{a^2 + b^2}$. 917. 1, 4. 918. $BL > BG$.
 919. $BN < CL$. 920. $\frac{6h}{5}$. 921. $a \sin \alpha \cos^2 \alpha$,
 $a \cos \alpha \sin^2 \alpha$. 922. $\frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$. 923. $5\sqrt{2}$, $12\sqrt{2}$.
 924. 12. 926. $\frac{56}{5}$. 927. 5. 928. $\sqrt{a^2 + 3b^2}$.
 929. 10. 930. 14. 931. $\frac{c}{2}$, $\frac{c}{2} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}$,
 $\frac{c}{2} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}$. 932. 12; 20. 933. 7, 25, 24.
 934. 6, 8. 935. 9, 25. 936. 42, 5. 937. 40.
 938. $\frac{128}{17}$. 939. 15. 940. 38, 22. 941. 39, 26.
 942. 8, 25, 15. 943. $\sqrt{15 + 6\sqrt{3}}$. 944. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.
 945. $3 + \sqrt{3}$, $2(3 + \sqrt{3})$, $3 + 3\sqrt{3}$. 946. $2a$,
 $2a\sqrt{7}$. 947. $\frac{48}{5}$. 948. Если квадрат стороны
 треугольника равен сумме квадратов двух
 других его сторон, то треугольник прямо-
 угольный. 949. $\sqrt{2b(a+b)}$, $\sqrt{2(a+b)(2a+b)}$
 или $\sqrt{2a(a+b)}$, $\sqrt{2(a+b)(2b+a)}$. 950. 6.
 951. $\frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$. 952. $\sqrt{2a(a+b)}$ или $\sqrt{2b(a+b)}$.
 953. 7; 25. 954. $9\sqrt{5}$ и $8\sqrt{10}$. 955. $6\sqrt{2}$.
 957. $\frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2 + ab)^2}$. 958. 4. 959. $\sqrt{\frac{20 - 4\sqrt{3}}{3}}$.

960. $2\sqrt{6}$. 961. 8, 15. 962. $\sqrt{ab}$. 963. $\frac{29}{4}$.
 964. $\frac{R}{\sqrt{2}+1}$. 965. $\frac{8R\sqrt{2}}{5}$. 966. $\frac{a^2+4r^2}{4r}$.
 967. $R\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$. 968. 9, 4. 969. 48, 30.
 970. 175, 600. 971. 25. 972. 1. 973. 27, 64.
 974. $\sqrt{2ar}$. 975. $\frac{2}{3}$. 976. 9, 12, 15. 977. 60.
 978. 5, 12, 13. 979. $\frac{3}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. 980. 8.
 981. $\frac{a}{2\sqrt{3}+1} = \frac{a(2\sqrt{3}-1)}{11}$. 982. $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$,
 $\frac{2a}{2\sqrt{3}+1}$. 983. $h(\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) \sin \beta$, $h(\operatorname{ctg} \beta +$
 $+\operatorname{ctg} \gamma) \sin \gamma$. 984. $R \sin \alpha$, $4R \sin \alpha \cos \alpha =$
 $= 2R \sin 2\alpha$. 985. Меньшее основание.
 986. $\frac{24}{5}$. 987. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. 988. $4\sqrt{5}$, $8\sqrt{5}$. 989. $\sqrt{7}$,
 $2\sqrt{7}$. 990. $2(\sqrt{3}-1)$, $\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$. 991. $\frac{6h}{5}$.
 992. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 993. $\sqrt{3}$. 994. $4c$. 995. 12.
 997. $c\sqrt{1+k^2}$; $kc\sqrt{1+k^2}$. 998. mn .
 999. $\frac{2m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}$, $\frac{2m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}$, $\frac{2mn}{\sqrt{4m^2-n^2}}$.
 1000. 90° . 1001. $2\sqrt{10}$. 1002. $2\sqrt{6}$.
 1003. $\frac{24}{\sqrt{145}}$. 1004. 6. 1005. $4R^2$, $8R^2$.
 1006. $\arcsin\left(\frac{b}{a}-1\right)$. 1007. $2\sqrt{rR}$. 1008. $3\sqrt{2}$.
 1009. $\frac{1-\sin \frac{\alpha}{2}}{1+\sin \frac{\alpha}{2}}$. 1010. 5. 1011. $4\sqrt{5}$. 1012. $\frac{3c}{10}$.
 1013. $\frac{1}{2}a(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha)$. 1014. $\sqrt{3}$. 1015. 2.
 1016. 10. 1017. 14. 1018. $\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}$.
 1019. 2, 4. 1020. $\frac{a}{2 \sin \alpha}$. 1021. $\frac{2r}{\sin \alpha}$.
 1022. $\frac{a\sqrt{2(1 \pm \sin \alpha)}}{\cos \alpha}$. 1023. Вне.
 1024. $\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2}$. 1025. $(\sqrt{6}-\sqrt{2})a$.

1028. $2\sqrt{5}$. 1029. 30° . 1030. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 1031. 11 : 1.
 1032. $a\sqrt{\sqrt{5}-2}$. 1033. $\frac{2d}{3}$; $\sqrt{\frac{20d^2}{9}-a^2}$.
 1034. $d\sqrt{m^2+1}$; $md\sqrt{m^2+1}$. 1035. $\frac{25}{3}$; $\frac{56}{3}$.
 1036. 3; 4; 5. 1037. 16. 1040. 60. 1042. $\frac{10R}{3}$,
 $4R$, $2R$. 1043. 24, 21, 25, 28. 1044. 8.
 1045. $\frac{rR}{(\sqrt{R} \pm \sqrt{r})^2}$. 1046. $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$,
 $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$. 1047. $2\sqrt{21}-9$. 1048. $\frac{6-4\sqrt{2}}{3}$.
 1049. $\frac{10}{3}$. 1050. $\frac{8r^3R^3}{(r^2+R^2)^2}$. 1051. $2(a^2+R^2)$.
 1052. $\sqrt{848 \pm 16\sqrt{208}}$, $\sqrt{308 \pm 16\sqrt{208}}$.
 1053. 7. 1054. $\frac{1}{2}a \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$. 1055. $\frac{5\sqrt{13}}{4}$.
 1056. $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$. 1057. $\sqrt{2mn}-m$,
 $\sqrt{2mn}-n$, $n+m-\sqrt{2mn}$. 1058. $\sqrt{4k^2-l^2}$.
 1059. $\frac{4a}{7}$, $\frac{5a}{7}$. 1060. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$. 1061. $\sqrt{a^2-b^2}$.
 1062. $\angle BAC$. 1063. $a\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)$; $a(2\sqrt{3}-3)$.
 1066. $\sqrt{a^2-b^2}$. 1067. 2; 15; 3; 10.
 1068. $\sqrt{a^2+ab}$; $\sqrt{b^2+ab}$. 1069. 35. 1070. 14;
 12,5; 29,4; 16,9 см. 1072. $\frac{36h^2}{25}$. 1073. 1.
 1074. $\frac{4}{\sqrt{17}}$. 1075. $2R\sqrt{2}$, $2R\sqrt{2}$, $2R\sqrt{2}$,
 $2R(2+\sqrt{2})$. 1077. $\frac{a}{2|\cos \beta|}$. 1078. $\frac{24}{7}$.
 1079. 3, 12, 8, 8. 1080. $\left(b+m+\frac{mn}{b-n}\right)\sqrt{mn}$.
 1081. $\frac{196}{3}$. 1082. $\frac{5\sqrt{3}}{12}$. 1083. $2-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 1084. $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\sqrt{r^2+ar \sin \alpha}}{\sin \frac{\alpha}{2}} - a \cos \frac{\alpha}{2} - r \right)$.
 1085. $\frac{2}{3}$. 1086. $\sqrt{2ar}$. 1087. $\frac{\sqrt{49-9 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{2 \sin \alpha}$.

1088. $\sqrt{3}$. 1090. $\frac{a}{2 \sin \alpha (1 + \cos \alpha)}$.
1091. $2(\sqrt{3} - 1)$, $\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$.
1092. $a(\cos \alpha \pm \sin \alpha \cos(\alpha + \beta))$.
1093. $|a - b| \sin \frac{\alpha}{2}$, $|a - b| \cos \frac{\alpha}{2}$, $|a - b|$.
1094. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $2 + \sqrt{3}$. 1095. $\sqrt{\frac{100 - 48\sqrt{3}}{3}}$.
1096. 23. 1097. $\frac{15}{4}$. 1098. $\frac{15}{8}$.
1099. $2 \arcsin \frac{5}{\sqrt{109}}$. 1100. $2 \arcsin \frac{13}{\sqrt{505}}$.
1101. $\arctg \frac{3}{4}$, $\text{arcctg} \frac{3}{4}$. 1102. $\frac{12}{5}$. 1103. $PQ =$
 $= QR = PR = \sqrt{3}$. 1104. $\frac{5\sqrt{13}}{12}$. 1105. $\frac{5\sqrt{13}}{6}$.
1106. $1 : 3$. 1107. $\frac{\sqrt{96 - 54\sqrt{3}}}{3}$. 1108. $1, 1, \sqrt{3}$,
 $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$. 1109. $\frac{R\sqrt{3}}{4}$. 1110. $\sin 2\alpha$.
1111. $a \cos \alpha$. 1112. $\frac{4R}{9}$. 1113. $6 + 2\sqrt{2}$.
1114. $2\sqrt{2}$. 1115. а) $\frac{9}{4}$ и $\frac{9}{2}$; б) $\frac{9}{8}$; в) $\frac{9}{2}$ и $\frac{9}{10}$.
1116. $\frac{4}{\sqrt{17}}$. 1117. $8\sqrt{2}$. 1118. $4 : 5$. 1119. $3 : 5$.
1120. 6. 1121. $\sqrt{4p^2 - q^2}$. 1122. 5, 20, $\frac{25}{2}$, $\frac{25}{2}$.
1123. $\frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\cos(2\alpha + \beta)}$, $\frac{a \cos(\alpha + \beta)}{\cos(2\alpha + \beta)}$.
1124. $\frac{Rr}{(\sqrt{R} \pm \sqrt{r})^2}$. 1125. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, $\frac{2}{\sqrt{5}}$.
1126. $\frac{d}{\sqrt{2}}$. 1127. $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$. 1128. $5/8$. 1129. $7\sqrt{21}$.
1130. 17; внутри. 1132. 8. 1133. $\sqrt{m^2 + n^2}$.
1134. $\sqrt{4R^2 - n^2}$. 1135. 30° . 1136. 45° .
1137. $\sqrt{7}$. 1138. 4. 1139. $\sqrt{r^2 + (p - a)^2}$.
1140. 8. 1141. $\frac{a^2 - b^2}{8\sqrt{ab}}$. 1142. 45° , 135° .
1143. $\cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb \cos \frac{\alpha}{2}}$. 1147. 30° ,
 60° . 1148. $4 : \sqrt{13}$. 1149. $84 + 5\sqrt{34}$. 1150. 7.

1151. $2 \arcsin \frac{\sin \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{2}$. 1152. $\frac{2rR}{R+r}$.
1153. $3 : 4 : 5$. 1154. $\frac{8h}{5}$. 1155. 1. 1156. 30° ,
 90° . 1157. $\frac{8R^2}{5}$. 1158. 6. 1160. $\frac{1}{12}(5\sqrt{2} +$
 $+ 6 + \sqrt{110 + 60\sqrt{2}}) = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})}{6\sqrt{2}}$.
1161. $\frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2}$. 1162. $\frac{r(R+r)}{R}$.
1163. $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$. 1164. $\frac{3}{4}(4\sqrt{2} - 5)$. 1165. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$;
 $\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{2}}$; R. 1166. а) $\frac{p^2}{4(p+1)} < \frac{r}{R} < \frac{p^2}{2(p+1)}$;
 б) $BC = \frac{p}{p+1} \sqrt{4(p+1)Rr - p^2R^2}$.
1167. $\frac{8\sqrt{11} - 19}{7}$. 1168. $\frac{144}{23}$. 1170. $\frac{35}{2}(5\sqrt{2} \pm$
 $\pm 4\sqrt{3})$. 1173. $\frac{1}{6}(7 \pm 2\sqrt{6})$. 1174. $\angle A = \frac{\pi}{3}$,
 $\angle B = \frac{7\pi}{12}$, $\angle C = \frac{\pi}{12}$ или $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $\angle B = \frac{\pi}{12}$,
 $\angle C = \frac{7\pi}{12}$. 1175. $\frac{m^2 - h^2}{2h}$. 1177. 45. 1178. $\frac{\pi - \alpha}{2}$,
 $\arctg \frac{\sin \alpha}{2 + \cos \alpha}$, $\frac{\pi + \alpha}{2} - \arctg \frac{\sin \alpha}{2 + \cos \alpha}$.

§ 7

1181. 300. 1182. 4. 1184. 4; 8; 12; 16. 1185. 4;
 8; 12; 16; 20; 24. 1186. 1 : 2, считая от точки
 B. 1187. $BK < AC$. 1188. 1. 1189. 3; 2, 4.
 1190. 2 : 1, считая от точки B. 1191. 15; 20.
 1192. $\frac{65}{18}$. 1193. 8. 1194. 50. 1195. 16, 20, 20.
 1196. 10, 14. 1197. а) $\frac{24}{5}$; б) $\frac{104}{5}$. 1198. $\frac{1}{\sqrt{13}}$.
 1199. $a(2 - \sqrt{2})$. 1200. $\frac{3a + 2b}{5}$. 1201. $\frac{bc}{a + c}$.
 1202. $\frac{bc}{b + c}$. 1203. $\sqrt{pq}$. 1204. $\frac{ah}{a + h}$. 1205. 10;
 18. 1206. 12. 1207. $\frac{ab}{a + b}$. 1208. $\frac{bc}{a + 2c}$.
 1209. $\frac{5}{6}\sqrt{m^2 + n^2}$, $\frac{5}{4}\sqrt{m^2 + n^2}$. 1210. 4.

1211. $\frac{8\sqrt{10}}{3}$, $3\sqrt{5}$. 1212. 10, 26. 1213. $\frac{ah}{a+2h}$.
 1214. 42. 1215. $\frac{ab}{a+b}$. 1216. 2 : 1. 1217. 6; 4; 6.
 1218. 1 : 3. 1219. $p + q$; $\frac{m(p+q)}{p}$; $\frac{m(p+q)}{q}$.
 1220. 4, 8. 1222. 3. 1223. $\frac{ar}{a-r}$, $\frac{a^2r}{(a-r)^2}$.
 1224. 24. 1225. 55. 1226. $\frac{ar}{a+2r}$. 1227. 12.
 1230. $\frac{2a+3b}{5}$. 1231. $\frac{ml}{m+l}$. 1232. $\frac{6a}{7}$, $\frac{2a}{7}$.
 1236. 6. 1237. CD. 1238. 1 : 2. 1239. 42; 56.
 1240. 12, 4. 1241. $\frac{80}{9}$. 1242. $\frac{24}{7}$. 1243. 30° .
 1244. 10. 1245. $\frac{4}{5}$. 1247. 6. 1248. 4 : 5.
 1249. 1; 2. 1250. $\frac{2rR}{r+R}$. 1251. $2 \arctg \frac{1}{2}$,
 $2 \arctg \frac{1}{2}$, $180^\circ - 4 \arctg \frac{1}{2}$. 1252. 45° , 45° ,
 90° . 1253. $\frac{2a-b}{3}$. 1254. $\frac{4a-b}{5}$. 1255. 6 : 11;
 15 : 2. 1256. 1 : 6, считая от точки A.
 1261. 1 : 2. 1262. $\frac{12}{7}(3 - \sqrt{2})$. 1264. $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$.
 1265. 3. 1266. $\frac{mb}{b-m}$. 1267. 1 : 2; 1 : 8.
 1268. 6. 1269. 85. 1270. $\frac{1}{7}$. 1271. 120° .
 1273. $\sqrt{ab}$. 1275. 5 : 3, считая от точки B.
 1276. 1 : 9, считая от точки B. 1277. 5 : 1.
 1278. 1 : 1; 3 : 1. 1279. $\frac{18}{7}$. 1280. $\frac{22}{27}$.
 1281. $\frac{p+1}{q}$. 1282. $3\sqrt{5}$. 1283. $\frac{\pi}{18}$, $\frac{7\pi}{18}$.
 1284. $\frac{3ab}{2a+b}$ или $\frac{3ab}{a+2b}$. 1285. $\frac{2mn}{m+2n}$,
 $\frac{n(m+n)}{m+2n}$, $\frac{n(m+n)}{m+2n}$. 1287. $2\sqrt{3}$.
 1288. $\frac{ar}{a+2r}$. 1289. $\sqrt{m(m+n)}$, $\sqrt{n(m+n)}$.
 1290. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. 1295. 1 : 3, считая от точки A.
 1296. 10. 1302. 4 : 3. 1303. 5; $\frac{5}{4}$.
 1304. $\sqrt{a(a-b)}$. 1305. $\frac{-2+\sqrt{54}}{4}$. 1306. $\frac{25}{12}$.
 1308. 5. 1310. 60° , 40° , 80° . 1312. $\frac{28}{3}$.
 1313. $\arctg \frac{2}{3}$. 1314. $\arctg (2n+1)$. 1315. $\frac{2ab}{|a-b|}$.
 1317. $\frac{2\sqrt{145}}{3}$. 1318. $\sqrt{b(b+c)}$. 1320. $\frac{ab}{a+2b}$.
 1324. 60° , 75° , 45° . 1325. $\sqrt{pq}$. 1326. 45° , 45° .
 1327. $AC = \sqrt{3}$. 1328. $\frac{3}{2}$. 1329. $\frac{n}{m}$. 1330. 24.
 1331. 14. 1332. а) 1 : 1; 5 : 9; б) 5 : 21.
 1333. $\sqrt{Rr}$. 1334. $\frac{2(1+\cos \alpha)}{1+\sin \alpha}$. 1335. $2\sqrt{Rr}$,
 $2r\sqrt{\frac{R}{R+r}}$, $2R\sqrt{\frac{r}{R+r}}$. 1337. $\sqrt{ab}$. 1339. $\frac{2ab}{a+b}$.
 1340. $\frac{20}{\sqrt{3}}$. 1341. $\frac{8}{7}$. 1342. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5k-1}{k-1}}$.
 1346. 90° , 60° , 30° . 1351. 6 : 7, считая от точки A. 1352. 1 : 1. 1353. $\sqrt{13}$, $2\sqrt{13}$, $3\sqrt{5}$.
 1358. $\frac{2bc}{b+c}$. 1359. $\sqrt{2}$. 1360. $\frac{5a}{8}$. 1361. 2.
 1362. $\frac{2R\sqrt{rR}}{r}$, $\frac{2r\sqrt{rR}}{R-r}$, $\frac{4rR}{R+r}$. 1363. $\frac{15}{4}$, $\frac{20}{3}$.
 1364. $c-d \pm \sqrt{c(c-2d)}$. 1365. 16.
 1366. $\cos \alpha \cos \beta$. 1367. $\frac{mc}{n}$. 1368. 3. 1369. 8.
 1370. $\frac{6}{\sqrt{5}}$. 1371. $2m-1$. 1372. $\frac{2k}{1+k}$. 1373. 6, 4.
 1374. 1 : 4. 1375. $\sqrt{ab}$. 1376. $\frac{ab}{a-b}$. 1377. 30° .
 1380. $\frac{a(b+c-a)}{b+c+a}$. 1381. 6 или 4. 1382. $\frac{bc}{a}$.
 1383. 24. 1384. $\sqrt{ab}$. 1385. $\sqrt{ab}$. 1386. $\frac{1}{2}(d \pm \sqrt{d^2-c^2})$. 1387. $\frac{rR}{r+R}$. 1388. $a\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$,
 $b\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$. 1389. $\sqrt{m(m+n)}$. 1390. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
 1391. $7+4\sqrt{3}$. 1394. $\frac{q^2}{p}$. 1395. $\frac{7}{3\sqrt{3}}$. 1397. $\frac{ac}{b}$.
 1398. $\sqrt{ab}$. 1399. $\frac{m^2}{n}$. 1400. Нет.
 1402. $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$, $180^\circ - \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$ или

$$\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad 180^\circ - \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}. \quad 1403. \sqrt{13}.$$

$$1408. \sqrt{pq}. \quad 1409. \frac{R^2}{a}. \quad 1410. \sqrt{S}. \quad 1411. \sqrt{ab}.$$

$$1414. \frac{Dd}{D-d}.$$

§ 8

$$1417. 13. \quad 1418. 7; 5. \quad 1419. 12 \text{ или } 3\sqrt{2}.$$

$$1420. 6. \quad 1421. \frac{a+b}{2}. \quad 1422. 0,2. \quad 1423. 0,2.$$

$$1424. 12; 6. \quad 1425. \frac{ac+bd}{a}. \quad 1426. 2. \quad 1428. \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

$$1429. \frac{2ar}{\sqrt{r^2+a^2}}. \quad 1430. 2\sqrt{ab}. \quad 1432. 5. \quad 1433. 6.$$

$$1434. 13. \quad 1435. 1:4. \quad 1436. \frac{\sqrt{6}}{2}. \quad 1437. \sqrt{6}.$$

$$1438. 4; 4; 4. \quad 1439. 3\sqrt{6}:8. \quad 1440. R^2-d^2.$$

$$1441. 5. \quad 1442. \sqrt{2}. \quad 1443. \frac{a \cos \frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin(\beta+\alpha)}. \quad 1444. 2\sqrt{5}.$$

$$1445. 90^\circ. \quad 1446. \sqrt{R^2 \sin^2 \alpha + (a-b)^2} - R \sin \alpha.$$

$$1449. 4+2\sqrt{7}. \quad 1450. 10. \quad 1451. 90^\circ. \quad 1456. \sqrt{10}.$$

$$1457. 2\sqrt{3}. \quad 1458. \sqrt{5}. \quad 1459. 1, 1. \quad 1460. 4:3.$$

$$1461. \frac{a(1+4\sin^2 \alpha)}{8\sin \alpha}. \quad 1462. \frac{a\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}. \quad 1463. \sqrt{2}.$$

$$1464. 2; \sqrt{7}. \quad 1467. \frac{3}{\sin 15^\circ} \text{ или } \frac{3}{\sin 75^\circ}.$$

$$1468. \frac{4\sqrt{6}}{5}. \quad 1469. \frac{R\sqrt{7}}{2}. \quad 1470. \frac{\sqrt{17}-1}{2}. \quad 1471. 1.$$

$$1472. 4 \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{(R-r)\left(R \sin^2 \frac{\alpha}{2} + r \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

$$1473. \frac{5}{9}. \quad 1474. \frac{3}{2}(\sqrt{5} \pm 1). \quad 1475. \sqrt{5} \pm 1.$$

$$1476. 1. \quad 1477. d^2 - R^2. \quad 1478. \frac{4aR^2}{16R^2-3a^2}.$$

$$1479. \frac{5\pi}{6}, \quad \pi - \arcsin \frac{1}{4}. \quad 1480. 6.$$

$$1481. \frac{4aR^2}{16R^2-3a^2}. \quad 1484. \sqrt{3+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{10}}}{2}.$$

$$1485. \frac{3}{2}. \quad 1486. \frac{13}{20}. \quad 1487. \frac{\sqrt{7}}{4}. \quad 1488. \frac{5}{3}.$$

$$1491. 40. \quad 1492. \sqrt{ab}. \quad 1493. R. \quad 1494. 2.$$

$$1495. 2\sqrt{3}. \quad 1496. 2\sqrt{\frac{3}{7}}. \quad 1497. \sqrt{ab}. \quad 1498. 2.$$

$$1499. \frac{144\sqrt{5}}{5}. \quad 1501. a\sqrt{\frac{R+r}{R}}. \quad 1504. 12.$$

$$1505. 5:10:13. \quad 1506. \sqrt{3}. \quad 1507. \sqrt{2}.$$

$$1508. 1:\sqrt{3}. \quad 1515. 7. \quad 1516. \frac{72\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$$

$$1517. 1) AM=1; \quad 2) AM=4. \quad 1518. 1:9.$$

$$1520. \frac{2rR}{R-r}. \quad 1521. 2 \arcsin \frac{\sqrt{1-h^2}}{2}, \arccos h -$$

$$- \arcsin \frac{\sqrt{1-h^2}}{2}, \pi - \arccos h - \arcsin \frac{\sqrt{1-h^2}}{2}.$$

$$1522. 2 \arcsin \frac{\sin \beta}{2}, \beta - \arcsin \frac{\sin \beta}{2}, \pi - \beta -$$

$$- \arcsin \frac{\sin \beta}{2}.$$

§ 9

$$1526. 9; 24. \quad 1527. 20. \quad 1528. a, a\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

$$1529. 13. \quad 1530. 4. \quad 1531. 2\sqrt{19}; \sqrt{37}. \quad 1532. 10$$

$$\text{или } 6. \quad 1533. \sqrt{33}. \quad 1534. \frac{a\sqrt{7}}{3}. \quad 1535. \frac{5}{2\sqrt{7}}.$$

$$1536. \sqrt{2}. \quad 1537. 1) \text{ тупоугольный; } 2) \text{ прямо-} \\ \text{угольный; } 3) \text{ остроугольный; } 4) \text{ остроуголь-} \\ \text{ный; } 5) \text{ тупоугольный. } \quad 1538. 2; 4\sqrt{3}. \quad 1539. \frac{3}{5}.$$

$$1540. 2; 4. \quad 1541. 13. \quad 1542. 8\sqrt{2}. \quad 1543. \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

$$1544. \frac{56}{5}. \quad 1545. \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)(a+b-\sqrt{a^2+b^2}).$$

$$1546. \frac{25}{4}. \quad 1547. \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{2}. \quad 1548. \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$1549. \sqrt{7}. \quad 1550. \arccos \frac{13}{14} = 2 \arctg \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

$$1551. 45^\circ + \arctg \frac{1}{2} = \arctg 3 = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$1552. 2\sqrt{13}. \quad 1553. \frac{37}{40}; -\frac{37}{40}; -\frac{5}{16}; \frac{5}{16}.$$

$$1554. 2R \sin \alpha \sin \beta. \quad 1556. 30. \quad 1558. \sqrt{\frac{13}{11}}.$$

$$1559. \text{Нельзя. } \quad 1561. 2a(1+\cos \alpha). \quad 1563. 15.$$

$$1565. \frac{1}{3}a\sqrt{13}. \quad 1566. \sqrt{4a^2+b^2}.$$

$$1567. \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right)}. 1568. \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}. 1569. 30^\circ$$

$$\text{или } 150^\circ. 1571. \frac{c \sin 2\alpha}{2 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)}. 1572. \sqrt{29}, \sqrt{5}.$$

$$1573. 9,5. 1574. \sqrt{\frac{209}{11}}. 1575. \frac{a}{\sin \alpha}.$$

$$1576. \arccos(0,52 - 0,4\sqrt{0,76}).$$

$$1577. 4\sqrt{3} \sin 7^\circ. 1578. \frac{\sqrt{3}}{\sin 22^\circ}.$$

$$1579. \sqrt{a^2 + b^2 + ab}, \sqrt{a^2 + b^2 - ab}.$$

$$1580. \sqrt{a^2 + b^2 \pm ab}. 1581. 2:3. 1582. \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}.$$

$$1583. \frac{1}{3}a(\sqrt{6} + 3\sqrt{2}). 1584. \frac{65}{8}. 1585. 9\sqrt{11}.$$

$$1586. CD = \frac{ab \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}};$$

$$\angle ABC = \arcsin \frac{b \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}.$$

$$1587. 6. 1588. 4\sqrt{2}. 18. 1589. 9; 9; 6\sqrt{2}.$$

$$1590. \frac{a \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\gamma + \beta) \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}. 1591. \frac{a \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \left(45^\circ + \frac{3\alpha}{4} \right)}.$$

$$1592. 1:1. 1593. \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3529}{21}}. 1594. 6.$$

$$1595. 13. 1596. 135^\circ, \arctg \frac{1}{2}, 45^\circ - \arctg \frac{1}{2}.$$

$$1597. R = 8\sqrt{\frac{2}{3}} > 6,5. 1598. \frac{b \sin \alpha \sin \beta}{3 \sin(\alpha + \beta)}.$$

$$1599. \sqrt{13}. 1600. 4.$$

$$1601. a) \frac{4\sqrt{2}}{5}; \quad б) \frac{4\sqrt{2}\sqrt{41 - 10\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}}{4\sqrt{2} + 5},$$

$$\frac{5\sqrt{41 - 10\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}}{4\sqrt{2} + 5}. 1602. 60^\circ.$$

$$1603. R(\sqrt{\sin^2 \beta + \cos^2 \alpha} - \sin \beta). 1604. R\sqrt{7}.$$

$$1605. 5\sqrt{\frac{3}{7}}. 1606. \frac{c}{\sqrt{3}}. 1607. \frac{a \sin \beta \operatorname{ctg} \frac{a + \beta}{2}}{\sin \alpha}.$$

$$1608. \frac{4}{5}. 1609. 7 \cos 40^\circ \operatorname{tg} 20^\circ. 1610. \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

$$1611. \frac{25 + 10\sqrt{10}}{9}. 1612. 2. 1613. 3.$$

$$1614. \frac{91(6 - \sqrt{6})}{30}. 1615. \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} \right).$$

$$1616. \frac{85}{8}. 1617. \frac{25}{4}. 1618. \sqrt{2}. 1619. \text{Если}$$

$$a < \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ решений нет; если } a = \frac{\sqrt{3}}{2}, AC = \frac{1}{2};$$

$$\text{если } \frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1, AC = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4a^2 - 3}); \text{ если}$$

$$a \geq 1, AC = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4a^2 - 3}). 1620. \frac{3\sqrt{3} - 1}{4}.$$

$$1621. 4. 1622. \arctg \sqrt{\frac{2}{7}}, \arccos \sqrt{\frac{2}{7}}. 1623. 9,5.$$

$$1624. 30. 1625. \sqrt{273}. 1626. 120^\circ.$$

$$1627. \frac{a \sin \alpha}{\sin \beta}. 1628. \frac{P \sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma},$$

$$\frac{P \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}, \quad \frac{P \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}.$$

$$1629. b + \frac{a \sin(\beta - \alpha)}{2 \sin \alpha}. 1630. R \sin 2\alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$1631. \frac{\sqrt{(b-a)^2 + (b+a)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{4 \sin \alpha}. 1632. \frac{25}{8}.$$

$$1633. 10. 1634. 6\sqrt{2} + 1, 5\sqrt{3}, 2. 1635. 2:1.$$

$$1637. \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}. 1639. \sqrt{7}. 1640. \frac{25}{8}. 1643. \frac{br}{c}.$$

$$1644. 2R\sqrt{2}. 1645. \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \sin \frac{\alpha}{2}}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

$$1646. \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}. 1647. \sqrt{3}, 2\sqrt{3} \text{ или } 2\sqrt{3},$$

$$\sqrt{3}. 1648. 4; 12,5. 1649. \arctg \frac{1}{\cos \alpha}.$$

$$1650. 2\sqrt{9 + 6\sqrt{2}}. 1651. 4. 1652. \frac{\sqrt{51}}{3}.$$

$$1653. 2 \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 90^\circ - \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 90^\circ -$$

$$- \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}. 1654. 11. 1655. 30^\circ, 60^\circ. 1656. \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$1657. a\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha}. 1658. 2 \arctg(5 \operatorname{tg} \alpha).$$

$$1659. \arctg \frac{1}{7} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. 1660. \frac{1}{2} \sqrt{c^2 + d^2 \pm cd\sqrt{2}}.$$

1661. $\sqrt{a^2 + b^2 + ab\sqrt{2}}$. 1662. $2\sqrt{2} : 5$. 1722. $\frac{\sqrt{37}}{3\sqrt{3}}(\sqrt{24} - 1)$. 1723. $\frac{1}{2}$. 1724. 3,6.
1663. $2\sqrt{\frac{29}{5}}$. 1664. $\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$. 1665. $\frac{2m \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$; 1725. $\sqrt{3} + 2\sqrt{2}, 4\sqrt{3}$. 1726. $\frac{5\sqrt{34}}{12}$.
- $\frac{2m \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$. 1666. $4R \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2}$. 1727. $\sqrt{10}, 3\sqrt{10}$. 1728. 3. 1729. $\frac{3}{\sqrt{5}}$.
1667. $\sqrt{21}$. 1668. $\frac{24\sqrt{2}}{35}$. 1669. $\sqrt{15}$. 1730. 24. 1731. $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} \operatorname{ctg} \alpha$.
1670. $AC = 3\sqrt{3} \pm 4$. 1671. $c\sqrt{2 + \frac{c}{b}}$. 1672. $2\sqrt{6}$. 1732. $4\sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{3 - \cos \beta}}$. 1733. $\frac{4}{5}$. 1734. $\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$.
1673. $\frac{85}{8}$. 1674. $5\sqrt{2}$. 1675. 4; 45° . 1676. $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. 1735. $3\sqrt{3}$. 1736. $\frac{15 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{3 + 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$. 1737. $\frac{60 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{5 + 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}$.
1677. 60° . 1678. $\sqrt{b(a+b)}$. 1680. $3\sqrt{\frac{3}{19}}$. 1738. $\sqrt{5} + \frac{1}{4}$. 1739. $\frac{6}{23}$. 1740. $2(\operatorname{rctg} \frac{\alpha}{2} +$
1681. $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 7. 1682. $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$. 1683. $\frac{12}{5}$. $+ 2R \sin \alpha)$. 1741. $\angle B = \arccos \frac{\sqrt{2}}{3} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$.
1684. $\frac{12}{5}$. 1685. $\frac{3}{2}$. 1686. $4\sqrt{3}$. 1687. 5. 1742. $2\sqrt{10}$. 1743. $\frac{12}{5}$. 1744. $\frac{\sqrt{7}}{2}$. 1745. $\frac{35}{32}$.
1688. $\frac{7\sqrt{3}}{9}$. 1689. $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$. 1690. $\frac{cx}{2R}, \frac{ay}{2R}, \frac{bz}{2R}$. 1746. 8. 1747. $\sqrt{3} + 2\sqrt{2}, 4\sqrt{3}$. 1748. $\frac{41\sqrt{2}}{16}$.
1691. 4, $\frac{5\sqrt{41}}{4}$. 1692. 8. 1693. $\frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{4ab}$. 1750. 18. 1751. 20. 1752. $3(2\sqrt{6} + 1)$.
1694. $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \sin 2\varphi$. 1695. $\frac{b}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$. 1696. $\frac{10}{3}$. 1753. $R(\sqrt{2} + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}})$. 1754. $\frac{\sqrt{129} + 31}{2}$.
1697. $\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}, \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$. 1698. $60^\circ, 120^\circ$. 1755. 3. 1756. $\frac{9}{2}$. 1757. $\frac{24}{5}$. 1759. 3.
1699. 1. 1700. $\frac{8}{3}$. 1701. $7\sqrt{3}$. 1760. Вне; $\frac{3\sqrt{14}}{5}$. 1763. $2\left(\cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{4}\right) + \cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{4}\right) + \sqrt{3}\right)$.
1702. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$. 1703. $\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}(7 - 4\sqrt{3})}{3}$. 1764. $\frac{\sqrt{3} \sin \alpha \sin(\alpha + 120^\circ)}{\sin \alpha - \sin(\alpha + 120^\circ) - \sin 60^\circ}$.
1704. $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$. 1705. $a\sqrt{3}$. 1706. 1. 1765. $\arccos\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\right);$
1707. Нет. 1708. $\frac{\pi}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha$. $180^\circ - 2 \arccos\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$.
1709. $\frac{18}{25 + 2\sqrt{130} + \sqrt{445}}$. 1710. 36, $8\sqrt{19}$. 1766. $4\sqrt{3}$. 1767. 10. 1768. $\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2abk}$.
1711. $\arcsin \frac{a}{b}$. 1712. $4\sqrt{3}$. 1769. 30° . 1770. $60^\circ, 90^\circ, 30^\circ$. 1771. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{\pi}$.
1713. $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$. 1714. $\frac{11}{16}$. 1715. $\frac{14\sqrt{3}}{3}$. 1772. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}$. 1773. $a\sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3} \sin \alpha}{3}}$.
1716. $2\sqrt{7}$. 1717. $2\sqrt{\frac{34}{15}}$. 1718. $2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}; 3, 63$. 1775. 13. 1776. 60. 1777. $\frac{2}{\sqrt{7}}$. 1778. $-\frac{1}{\sqrt{10}}$.
1719. $\frac{19}{\sqrt{26}}$. 1720. $\arccos \frac{3}{4}$. 1721. 120° .

$$1779. 8; 5. 1780. \frac{7}{\sqrt{65}}; \frac{78}{5}. 1781. 6; 10.$$

$$1782. \frac{b}{2} \sin \alpha. 1783. \cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

$$1784. \frac{21 - \sqrt{357}}{4}. 1785. \frac{5\sqrt{21} + 1}{2}.$$

$$1786. d \sqrt{2 + \frac{d}{c}}. 1787. \arcsin \frac{7\sqrt{3} - \sqrt{77}}{28}.$$

$$1788. 2. 1789. \frac{8}{3}. 1791. 7 \sqrt{\frac{9}{5}}.$$

$$1792. \frac{b \sin \alpha (5 - 4 \cos \alpha)}{8 \sin \beta \sin (\alpha + \beta)}.$$

$$1793. \frac{2m(7 - 4\sqrt{3} \cos \alpha) \sin \beta}{\sin \alpha \sin (\alpha + \beta)}.$$

$$1794. \frac{a \sin \alpha \left(\frac{5}{4} - \cos \beta \right)}{2 \sin \beta \sin (\alpha + \beta)}. 1795. \sqrt{35} \pm \sqrt{15}.$$

$$1796. \sqrt{4\sqrt{3} - 3}. 1797. 6. 1799. \frac{24}{\sqrt{39}}.$$

$$1801. \frac{2\sqrt{3}}{3}. 1802. \frac{5\sqrt{3}}{18} - \frac{3\sqrt{2}}{18}. 1803. \frac{ab}{b-a}.$$

$$1805. 2(5 \pm 2\sqrt{3}). 1806. 2 \text{ или } 14.$$

$$1807. \sqrt{d^2 - \frac{c^2}{3}}. 1808. \arcsin \frac{a}{b}.$$

$$1809. \frac{\cos^2 \frac{C-B}{2}}{\cos^2 \frac{C+B}{2}}. 1810. \sqrt[4]{12} (2 - \sqrt{3}).$$

$$1811. 12, 5. 1812. \frac{4\sqrt{2}}{3}. 1813. \sqrt{\frac{a^2}{2} + ab + b^2}.$$

$$1814. \frac{a}{\sqrt{2}}. 1815. \frac{\pi}{4}. 1816. \frac{1}{4 \cos^2 \alpha}. 1817. 8k - 1.$$

$$1819. \frac{b \sin \alpha}{4 \sin \beta \sin (\alpha + \beta)}. 1820. \frac{ab}{c}.$$

$$1821. \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}.$$

$$1822. \frac{a + b - 2\sqrt{ab} \cos \alpha}{2 \sin \alpha}. 1823. \sqrt{\frac{3}{2 - \sqrt{3}}}.$$

$$1824. \arccos \frac{1}{7}. 1825. \frac{15}{4}. 1826. \frac{2 \cos \frac{\alpha}{3} + 3}{6 \cos \frac{\alpha}{3} + 1}.$$

$$1827. AB = \frac{21}{2}, BC = \frac{23}{2}, AC = 11. 1828. \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

$$\frac{3}{\sqrt{6}}. 1829. \sqrt{3}. 1830. \frac{1}{2 \cos 2\alpha}. 1831. 60^\circ.$$

$$1832. 340. 1833. 120^\circ. 1834. \angle A = \arctg 2; \angle B = \arctg 3; \angle C = 45^\circ. 1835. \frac{\sqrt{130}}{2}.$$

$$1836. 5 : 9. 1838. (\sqrt{6} - \sqrt{2} + 2) / \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

$$1839. \sqrt{rR}, \sqrt{\frac{r}{R}}. 1840. AB = BC = AC = 8.$$

$$1841. AB = 10, BC = 6, AC = 12. 1842. \sqrt{6} - \sqrt{2}. 1845. \sqrt{\frac{km(m+q)}{q}}. 1846. \sqrt{\frac{6}{5}}. 1847. \frac{5}{6}.$$

$$1848. 10. 1849. \frac{r\sqrt{10}}{4}. 1850. \arccos \frac{1-k}{\sqrt{k^2+1}}.$$

$$1851. \frac{1}{2} \sqrt{34 - 15\sqrt{3}}.$$

§ 10

$$1855. 2 : 5. 1857. 12; 16. 1858. \frac{1}{4}.$$

$$1859. \frac{1}{2} ab. 1961. \frac{1}{3}. 1862. \frac{m^2}{n(n+2m)}.$$

$$1863. 4S. 1864. 1, 2. 1865. 60.$$

$$1866. 2r^2(2\sqrt{3} + 3). 1867. r^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right).$$

$$1868. 8, 10. 1869. 50; 72. 1870. 2 \sqrt{S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

$$1871. h^2 \sqrt{3}. 1873. 6. 1874. \frac{2}{15}. 1875. \frac{1}{3}.$$

$$1877. 4 : 21 : 56. 1880. \frac{c^2 \sin (\alpha + \gamma) \sin \alpha}{2 \sin \gamma}.$$

$$1881. 84. 1882. \frac{3R^2 \sqrt{3}}{4}. 1883. \frac{1}{2} \frac{b^2 \cos^2 \beta}{\sin \beta}.$$

$$1884. R^2 \operatorname{tg} \alpha. 1885. \frac{r^2}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha.$$

$$1886. 202, 8. 1887. 202, 8. 1889. 3\sqrt{3}.$$

$$1890. h(a - h \cos \alpha). 1891. 15; 5. 1892. 1224.$$

$$1897. \sqrt{\frac{4S^2}{b^2 \sin^2 \alpha} + b^2 - 4S \cos \alpha}.$$

$$1898. \frac{h^2 \sin \alpha}{2 \sin \gamma \sin (\alpha + \gamma)}. 1899. 32\sqrt{2}.$$

$$1901. r^2(2\sqrt{3} + 3). 1902. \frac{\pi + 3}{6\pi}.$$

$$1903. \frac{a^2(3\sqrt{3} - \pi)}{24}. 1904. \frac{\pi - 3}{11\pi + 3}.$$

1905. $58\sqrt{3}$. 1906. $\frac{17\pi}{144} - \frac{3+\sqrt{3}}{24}$. 1907. 72.
1908. 7. 1909. $\frac{13}{20}$. 1910. 4; 8; $2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$.
1911. $\frac{b^2h}{4\sqrt{b^2-h^2}}$. 1912. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. 1913. 600.
1914. 25. 1915. 75. 1916. $4\sin^4 \frac{\alpha}{2}$. 1917. 21.
1918. $\frac{S}{2}$. 1919. $18\sqrt{2}$. 1920. $\frac{1}{6}$.
1923. $l\sqrt{a(2l-a)}$. 1924. $\sqrt{\frac{S}{\sin \alpha}}$. 1925. $5R^2$.
1926. $\sqrt{\frac{S}{8}}$. 1927. 4. 1928. $\frac{a^3b}{2a^2+2b^2}$. 1929. $\frac{5}{4}$.
1930. 900 или 780. 1931. 8. 1932. $\frac{48}{5}$.
1933. $R^2\left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right) \cos \frac{\alpha}{2}$. 1934. 75.
1935. 1 : 9 или 9. 1936. 36. 1940. $\frac{S}{5}$.
1941. $(\sqrt{6} + 2) : 1$. 1942. 9. 1943. $12\sqrt{5}$.
1945. 1, 7. 1946. $\frac{120}{17}$. 1947. $\frac{ab \sin \alpha}{a+b}$.
1948. $1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$. 1949. $\arctg 2$, $\arctg \frac{1}{2}$.
1950. $12\pi a^2(7 - 4\sqrt{3})$. 1951. 2; 14. 1952. $\frac{147}{8}$.
1953. $\frac{98}{3}$. 1954. $\frac{40}{13}$. 1955. $\frac{\pi-2}{3\pi+2}$. 1956. $\frac{3}{4}$.
1957. $\frac{1}{4}\pi \sin \alpha$. 1958. $\frac{1}{4}|a-b|\sqrt{4d^2-(a-b)^2}$.
1959. 4. 1960. 20; 10 или 5; 40. 1961. 96.
1962. $\frac{1}{4}(a^2-b^2)(\sqrt{3}-1)$. 1963. $3\sqrt{3}$.
1964. $l^2 \sin \alpha \cos \alpha$. 1965. $\frac{16\sqrt{7}}{11}$. 1966. $\sqrt{S}$.
1967. $2; \frac{5}{6}$. 1968. $AQ : QC = 5 : 9$ или $AQ : QC = 9 : 5$. 1969. $\frac{3(3\sqrt{3}-4)}{2}$. 1970. 270.
1971. $\frac{228}{25}$. 1972. 25. 1973. 5, $\arctg 2$. 1974. 9.
1975. 25. 1976. $\frac{1}{5}$. 1978. $\frac{1}{4}$. 1979. 32. 1980. 288.
1982. 24. 1983. 20; 10; 15; 5. 1984. $\frac{1}{6}$.
1985. $\frac{27}{8}$. 1986. $\frac{1}{24}$. 1987. $8\sqrt{3}$. 1988. $\frac{23}{90}$.
1989. $\frac{37}{72}$. 1990. $\frac{15}{2}$. 1993. 18. 1994. 25.
1995. 60; 40. 1998. $\frac{15}{4}$. 1999. 75. 2000. $\frac{15\sqrt{7}}{16}$.
2001. $\sqrt{10\sqrt{2}}$. 2002. 3. 2003. $2 + \sqrt{6}$.
2004. $\frac{9\sqrt{3}}{14}$. 2005. $4 + \frac{8}{\sqrt{3}}$. 2006. 60.
2007. $18\sqrt{161}$. 2008. $10R^2\left(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$.
2009. 2, $2(1 + \sqrt{2})$ или $2(1 + \sqrt{2})$, 2. 2010. 210.
2011. $\frac{\pi}{3} - \sqrt{2} + 1$. 2012. $\frac{7\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}$.
2013. $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}$. 2014. $\frac{1}{4}a^2(7 - 4\sqrt{3})\left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$. 2015. $\frac{128(3+2\sqrt{2})}{49}$. 2016. 1.
2017. $\frac{7}{2}$. 2018. $r^2 \arcsin \frac{a}{2r} - \frac{a\sqrt{4r^2-a^2}}{4}$.
2019. $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. 2020. $\frac{\sqrt{15}}{2}$. 2021. 24.
2022. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2 \pm 2\sqrt{a^2b^2-16S^2}}$. 2023. 48.
2024. $\frac{1}{4}(a+b)\sqrt{3b^2+2ab-a^2}$. 2025. a^2 .
2026. 1024. 2027. $\frac{29}{5}$. 2028. $20\sqrt{6}$.
2029. $\frac{R^2(1+2\sqrt{2})}{2}$. 2030. 3; 8.
2031. $\frac{b^2(b^2-a^2)}{a^2+b^2}$. 2032. $AN : NC = 2 : 1$.
2033. $AN : NC = 1 : 3$. 2034. $\frac{108}{25}$. 2035. $\sqrt{11}$.
2036. $\sqrt{35}$. 2037. $AB = BC = 2$, $AD = \sqrt{3}$, $DC = 1$, $S(ABCD) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
2038. $\frac{a(a+b) \sin \alpha \sin (\alpha+\beta)}{2 \sin \beta}$. 2039. $\frac{50}{3}$.
2040. 6. 2041. $\frac{ab \sin \alpha}{a+b}$. 2042. 16. 2043. 25.
2045. $\frac{8}{\sqrt{15}}$. 2046. 3 : 29. 2047. $\frac{ab}{(a+b)^2}$.

2048. 40° или 80° . 2050. $\frac{2mn}{(m+n)^2}$. 2051. $\frac{1}{2}$.
 2052. $10\sqrt{3}$. 2053. $\frac{1}{33}$. 2054. $\frac{2}{11}$. 2055. 3.
 2056. $\frac{189\sqrt{55}}{88}$. 2057. $\frac{11}{12}$. 2058. $3:2$.
 2059. $\frac{49}{5}$. 2060. $\frac{1}{3}$. 2061. $\frac{24\sqrt{3}}{7}$. 2062. $\frac{\sqrt{2}}{11}$.
 2063. $\frac{18\sqrt{15}}{5}$. 2064. 198. 2065. $\frac{\pi \cos \alpha}{8 \sin^3 \alpha}$.
 2066. $\frac{3a^2}{8}$ или $\frac{2a^2}{3}$. 2067. 22. 2068. 26.
 2069. $\frac{75}{2} - 9\pi > 9$. 2070. $\frac{16}{9}$. 2071. *bd*.
 2072. $3\sqrt{3}$. 2073. $\frac{63\sqrt{3}}{4}$. 2074. $S \cos^2 \alpha$.
 2075. $\frac{2R^2 \sin^3 \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$. 2076. $\frac{135}{13}$.
 2077. $\frac{1}{2}(p-a)^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. 2078. $4\sqrt{3}$.
 2079. $2r^2 \sin^2 \alpha \sin 2\alpha$. 2080. $2\sqrt{3}$. 2081. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.
 2082. 4. 2083. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. 2084. $\frac{a^2(24\sqrt{3} - 11\pi)}{648}$.
 2085. $\frac{44\sqrt{2}}{45}$. 2086. 1, 6. 2087. $\frac{3ab}{4}$.
 2088. $\frac{1}{2}(a-b)^2 \sin \alpha$. 2089. $\sqrt{3}$. 2091. $\frac{72}{13}$.
 2092. 37, 2. 2093. $\frac{9\sqrt{3}}{52}$. 2094. $5\sqrt{2}$.
 2095. 144. 2096. $3\sqrt{13}$. 2097. $\frac{a^2 b^2}{2a^2 - b^2}$.
 2098. 40. 2099. 14; 30; 40. 2100. 4; 6; 4; 6.
 2101. 48. 2102. $\frac{25}{64}\sqrt{15}$.
 2103. $S = \frac{1}{4}\sqrt{(4b^2 - a^2)(a^2 - b^2)}$. 2104. $S =$
 $= \frac{1}{30}\sqrt{(4b^2 - c^2)(4c^2 - b^2)}$. 2105. *cd*.
 2106. $\frac{108}{5}$. 2107. $\frac{5}{12}$. 2108. $\frac{d}{3}$. 2109. $\frac{ab}{2}$.
 2110. $AB = BC = CD = \sqrt{3}$, $AD = 2\sqrt{3}$.
 2111. 45° , 90° , 45° . 2112. $\frac{45}{2}$. 2113. $\frac{48}{5}$.
 2114. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$. 2115. $\frac{1}{2}$. 2116. $\frac{1}{4}$.
 2117. $\frac{9}{20}$. 2119. $\frac{40}{3}$. 2120. $\frac{1}{2}$. 2121. 150° .
 2122. $\frac{2}{5}$. 2123. $\frac{25}{16}$. 2124. $\frac{1}{12}$.
 2128. $\frac{\pi}{2 \sin^2 \alpha \sin 2\beta}$. 2129. $11\sqrt{2}$. 2130. $\frac{5}{27}$.
 2131. $\frac{9\pi}{10\sqrt{15}}$. 2132. $\frac{625}{121}$. 2133. $\sqrt{108}$.
 2134. $\frac{48}{5}$. 2135. $\frac{15}{2}$. 2136. 9. 2137. 1.
 2138. $\frac{49}{10\sqrt{3}}$. 2139. $\frac{245}{8}$. 2140. $\frac{1323}{20}$.
 2141. $10\sqrt{3}$. 2142. $\frac{24}{25}$. 2143. $\frac{17}{4}$. 2144. $\frac{3\sqrt{15}}{2}$.
 2145. 30° . 2146. $\frac{25}{16}$. 2147. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$. 2148. $\frac{72}{5}$.
 2149. $4\sqrt{3} + 10\pi$. 2150. $\frac{a^3(R+r)}{a^2 + (R+r)^2}$.
 2151. $\arccos\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right); \pi - 2 \arccos\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
 2152. $\frac{4R^3}{S}$. 2153. $aR\left(\frac{R^2}{b(a-b)} + 1\right)$.
 2154. 1180. 2155. $\frac{2}{3}$. 2156. $\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)}{32\pi}$.
 2157. $\frac{r^2 \sin 2\alpha}{1 + \sin^2 2\alpha}$.
 2158. $\frac{32(\arccos m - m\sqrt{1-m^2})}{\pi m^4}$.
 2159. $\arccos \frac{1}{9}$, $20\sqrt{5}$. 2160. $1 - \frac{7}{8}\sqrt{a^2 - 16} +$
 $+ \frac{1}{2}(1 + 3 \operatorname{tg} \alpha)^2 \cos \alpha$. 2161. 54. 2162. 450.
 2163. 168. 2164. $12\sqrt{5}$. 2165. 235, 2.
 2166. 3:4. 2167. Прямоугольный; 24.
 2168. 96. 2169. $\frac{27R^2}{100}$. 2170. $\arcsin \frac{1}{3}$.
 2171. $\frac{8}{25}$. 2172. 6. 2173. 2. 2174. $\frac{a^2 b}{2a-b}$.
 2175. $\sqrt{\frac{8c^2 + 3a^2}{35}}$. 2176. $\frac{a\sqrt{7}}{12}$. 2177. $\frac{a\sqrt{13}}{6}$.
 2178. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$. 2180. $AD = 10$, $BC = 2$; $R = \frac{5\sqrt{5}}{2}$.
 2181. 5. 2182. 48. 2183. $\frac{S_1 + S_2}{2}$.

2184. $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$. 2185. $\frac{9}{40}$. 2186. $\frac{63}{250}$.
 2188. $\frac{b(3a+b)S}{2(a+b)(2a+b)}$.
 2189. $\frac{ab(3a-b)\sin 2\alpha}{2(a+b)}$. 2190. 4.
 2191. $4(1-\alpha)$. 2192. $9\sqrt{\frac{2}{7}}$. 2193. $\frac{2+\sqrt{19}}{15}$.
 2194. $\frac{S_1 S_3 (S_1 + S_2)(S_2 + S_3)}{S_2(S_2^2 - S_1 S_3)}$. 2195. $\frac{7}{4}$.
 2196. 4. 2197. $32:1$. 2198. 13. 2199. $\frac{1-\alpha}{\beta}$.
 2200. $\frac{a(3b-a)}{b+a}$. 2201. 60. 2202. $\left| \cos^2 \alpha - \frac{2}{5} \right|$.
 2203. $\frac{7}{4}$. 2204. $\frac{9}{17}, \frac{5}{2}$. 2205. $\frac{2S}{9}$.
 2206. $AB = BC = \frac{3}{\sqrt{7}}$, $CD = 3\sqrt{\frac{3}{7}}$, $AD = \frac{6}{\sqrt{7}}$.
 2207. $\frac{9\sqrt{3} + 3\sqrt{15}}{8}$.
 2208. $\frac{\sqrt{2S \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}}{\sin \alpha}$;
 $\frac{\sqrt{2S \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}}{\sin \beta}$; $\frac{\sqrt{2S \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}}{\sin \gamma}$.
 2209. $\frac{27\sqrt{3}}{7}$. 2210. $90\sqrt{3}$. 2211. $\frac{\sqrt{3}+1}{8}$;
 0,34. 2212. $12(\sqrt{3}-1)$; 8,78. 2213. 216.
 2214. $\frac{155\sqrt{3}}{84}$. 2215. $\frac{384}{25}$. 2216. $\frac{117}{2}$.
 2217. $\frac{180\sqrt{3}}{19}$. 2218. $\frac{27}{4}$. 2219. $\frac{1}{6}$.
 2220. $\frac{2b+l}{c}$. 2221. 6. 2222. 10. 2223. 37,5.
 2224. $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$. 2225. 48. 2226. 176; $2\sqrt{\frac{3}{11}}$.
 2227. $\frac{96}{25}$. 2228. $\frac{25\sqrt{15}}{16}$. 2229. 3, $\frac{27\sqrt{7}}{20}$.
 2231. $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$. 2232. $\frac{8}{5}$. 2233. $\frac{8R^3}{a}$.
 2234. $\frac{1}{2}p^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. 2235. $\frac{a\sqrt{3}(a-2b)}{12}$.
 2236. $\arccos \sqrt{2(1-s)}$. 2238. $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4} +$
 $+\frac{\sqrt{3}}{8}(a(\sqrt{12R^2-3a^2}-a)+b(\sqrt{12R^2-3b^2}-$
 $-b)+c(\sqrt{2R^2-3c^2}-c))$. 2239. Площадь
 круга. 2240. $\frac{R^2(R+a)^3}{2(a-R)(a^2+R^2)}$. 2241. $3\sqrt{15}$.
 2242. $\frac{189}{25}$. 2243. Внутри; $\frac{7\pi}{3}$. 2244. $\frac{96}{7}$.
 2245. 80. 2246. 13; 15. 2247. $\frac{512}{3}$.
 2248. $\frac{4+\sqrt{15}}{3\pi}$. 2249. $\frac{8\sqrt{5}}{45}$. 2250. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
 2251. $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$. 2252. $\frac{1}{2} + \frac{10\sqrt{6}}{49} + \frac{3\pi}{4} -$
 $-\arcsin \frac{5}{7}$. 2253. 1. 2254. 18. 2256. $\frac{10}{3}$.
 2257. 8. 2258. 16. 2259. 120.
 2260. $\frac{2\sqrt{S_2(S_1+S_2)}}{\sqrt[4]{4S_1^2-S_2^2}}$. 2261. 1:3. 2262. $\frac{2}{9}$
 2263. $AB = BC = 7\sqrt{3}$, $CD = \sqrt{21}$, $AD = 2\sqrt{21}$.
 2264. $\frac{3R^2(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{8}$. 2266. $R^2 \cos \alpha (1 + \sin \alpha)$.
 2267. 319. 2268. $\frac{21-4\sqrt{5}}{5}$. 2269. 18.
 2270. $9\sqrt{2}$. 2271. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$. 2272. 1. 2273. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.
 2274. $\frac{9}{2}$. 2275. 22. 2276. 2. 2277. $\frac{5}{\pi}$.
 2278. $\frac{9R^2\sqrt{3}}{4}$. 2279. $\frac{150}{7}$. 2280. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}} =$
 $= \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{12}$. 2281. $\frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$. 2282. $\frac{375}{272}$.
 2283. $\frac{28}{53}$. 2284. $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$.
 2285. $\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{18}$. 2286. $2(5\pi + 4\sqrt{3})$. 2287. $\frac{5\sqrt{5}}{3}$.
 2288. Задача не имеет решений. 2289. $\frac{3P}{2}$.
 2290. $2P$. 2291. 1. 2293. $18\sqrt{21}$. 2294. 6.
 2295. $9\sqrt{5}$. 2296. $\frac{15\sqrt{3}}{2}$. 2297. $90^\circ, 90^\circ$,
 $\arcsin \frac{3}{5}$, $180^\circ - \arcsin \frac{3}{5}$. 2298. $\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$.

2299. $72\sin \alpha \cos^3 \alpha$. 2300. $72\sin \alpha \cos^3 \alpha$.
2301. $\sqrt{\frac{2a^2+b^2}{3}}$ или $\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{3}}$.
2302. $\frac{2k}{(1+k)^2}$. 2303. $\sqrt{2}, \sqrt{5}$. 2305. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.
2306. $\frac{5}{24}$. 2307. $\frac{3}{32}$. 2309. $2S$.
2310. $\frac{(a+c)(b+c)(a+b+c)}{ab(a+b+2c)}$. 2311. $2\sin^2 \alpha$.
2312. $2\sin^2 \alpha$. 2313. 1 и 2; $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{3}$.
2314. $\frac{(1-k)^3}{1-k^3}$. 2315. $\frac{1}{4}(\sqrt{S}-\sqrt{S})^2$.
2316. $\sqrt{91}$. 2317. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. 2318. $\frac{3}{\sqrt{10}}$; 20.
2319. $15\sqrt{3}$. 2320. $\sqrt{2}\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.
2322. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$. 2323. $a^2 \cos \frac{\alpha}{2}$. 2324. $2\arcsin \sqrt{a}$.
2325. $\arccos \sqrt{2-4S}$. 2326. $\arcsin \sqrt{1-2a}$.
2329. $\frac{9}{14}$. 2331. Площадь квадрата.
2332. $\frac{4\sqrt{5}R^2}{3}$. 2333. $\frac{3r^2(1-k^2)}{1+k^2}$, если $k < 1$,
 $\frac{3r^2(k^2-1)}{1+k^2}$, если $k > 1$. 2334. $\frac{1}{2(k+1)}$.
2335. $\frac{4\sqrt{3}}{7\pi}$. 2337. $2\arctg \frac{1}{\sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{3}$;
 $3R^2\sqrt{2}$. 2338. $\frac{ab(a+b)\operatorname{tg} \alpha}{2|a-b|}$. 2339. 40.
2340. 40. 2341. 8. 2342. 22. 2343. $\frac{315}{2}$.
2344. $\frac{\sqrt{7}}{16}$. 2345. $\frac{49(3\sqrt{3}-5)}{3}$. 2346. 195.
2347. $\frac{6}{13}$. 2348. $\frac{3}{4}S$. 2349. $\sqrt{5}$. 2350. $\frac{2\sqrt{46}}{3}$.
2351. $2\cos^2 \alpha$. 2352. $\frac{2(1-n^2)}{3}$. 2353. $\frac{(k+1)^2}{2k}$.
2355. $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$. 2356. $\frac{243}{2}$. 2357. 216. 2358. 4.
2359. 2. 2360. $\frac{a}{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{3}}$. 2362. $90^\circ, 30^\circ$.
2363. $\frac{3}{4}$. 2364. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 2365. $\frac{189}{25}$.
2366. $7(\sqrt{2}-1)$. 2367. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 2368. $\frac{15\sqrt{15}R^2}{8}$.
2369. $\frac{2\pi\sqrt{3}}{27} + \frac{1}{6}$. 2370. $\frac{1}{2}(1+2\cos 2\alpha)^2 \operatorname{tg} 2\alpha$.
2371. $\frac{75a^2\sqrt{7}}{16}$. 2372. $\frac{15\sqrt{2}}{8}$.
2373. $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$. 2374. $\frac{1}{7}$.
2375. $\frac{abc}{kmc+nma+knb}$. 2376. $2\sqrt{pq}$.
2377. $\cos^2 \alpha$. 2378. $\frac{20}{17}$. 2379. 1.
2381. $\frac{(1-pqr)^2}{(1+p+pq)(1+q+qr)(1+r+pr)}$.
2383. $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2S\sqrt{3}}$, где $S =$
 $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.
2384. 4. 2385. $\frac{5+\sqrt{15}}{4}$. 2387. $\pi\sqrt{3}$.
2388. $2\sqrt{S}\operatorname{tg} \beta$. 2389. 3. 2390. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 2391. 3.
2392. $\operatorname{tg} \angle BAM = \sqrt{2}$; $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$. 2393. $\angle CBF =$
 $= 90^\circ - \frac{1}{2}\arctg 3$; $\sqrt{5} : \sqrt{2}$. 2394. $\frac{1}{2}(S_1+S_2 +$
 $+ \sqrt{(S_1+S_2)^2 - 4S_1S_2\sin^2 \alpha})$. 2395. $\frac{19}{\sqrt{3}}$.
2396. $\arctg \frac{1}{4}$. 2397. $\frac{\pi}{6} - \arcsin \frac{1}{3}$; $\frac{5\pi}{6} +$
 $+ \arcsin \frac{1}{3}$. 2398. $\frac{3}{2}$. 2399. 24 или 72.
2401. $1+3k$. 2402. 2 или $\frac{14}{11}$. 2404. $\frac{(5+\sqrt{5})S}{2}$.
2406. $15\sqrt{3}$. 2407. $\frac{8(21\sqrt{2}+16\sqrt{3})}{57}$. 2409. $\frac{4}{3}$.
2410. 5. 2411. $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. 2412. $\frac{R}{\sqrt{2}}$.
2413. $6\sqrt{6}+3$. 2415. $\frac{5\sqrt{2}}{2\sin 15^\circ}$. 2416. $8r^2$.
2417. $2\sqrt{S}\operatorname{tg} \beta$. 2418. $\frac{7}{\sqrt{3}}$. 2419. $\frac{25a^2\sqrt{7}}{12}$.
2420. $\frac{(l\sin \gamma + m\sin \alpha + n\sin \beta)^2}{2\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$. 2423. 1, 2 : 3.
2424. 6. 2426. $\frac{\alpha}{2}$. 2427. $\frac{5S}{24}, \frac{S}{8}$.

§ 11

2430. $\sqrt{2}$. 2431. $AB = AC = \sqrt{130}$. 2433. В. 2434. а) $y = 1$; б) $x = -3$. 2435. $2x - 3y + 12 = 0$. 2436. $x = 1$. 2437. а) $(3; -2)$, $R = 4$; б) $(1; -3)$,

$R = 5$; в) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $R = 1$. 2438. $\overrightarrow{AD} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$,

$\overrightarrow{BD} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{FD} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$, $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\vec{a} +$

$+\frac{3}{2}\vec{b}$. 2439. а) $(-1; -3)$; б) $(1; 3)$; в) $(1; -3)$;

г) $(7; -1)$; д) $(3; -1)$; е) $(-3; 1)$. 2440. $\left(\frac{2}{3}; \frac{14}{3}\right)$,

$(-5; -1)$, $\left(\frac{7}{2}; -1\right)$. 2441. $AB: x + 2 = 0$, $AC: x -$

$-2y + 6 = 0$, $BC: x - y = 0$. 2442. $x - 2y - 2 = 0$.

2445. $\frac{1}{4}\sqrt{410}$. 2447. $\frac{5}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}$. 2448. $(8; 3)$.

2449. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$. 2455. $(4; 1)$.

2460. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$. 2461. 7S.

2464. $3\sqrt{10}$. 2465. $(-3; 4)$. 2466. $(x - 5)^2 +$

$+(y - 5)^2 = 25$ или $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

2467. $(3; 3)$, $(-3; 5)$. 2468. $(-2; 3)$. 2469. $(3; 1)$.

2473. $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{125}{4}$. 2475. $2x +$

$+y - 2 = 0$. 2476. $x + 3y - 9 = 0$. 2480. $y = 7$ или

$y = \frac{3}{4}x + 7$. 2481. $(3; -5)$. 2484. $(x - 3)^2 +$

$+(y - 2)^2 = 20$. 2485. $d = 5$, $(x - 4)^2 +$

$+(y + 1)^2 = 25$. 2486. $\frac{9}{\sqrt{10}}$. 2491. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2496. $\frac{1}{4}$. 2498. $\arcsin \frac{14}{5\sqrt{29}} = \arccos \frac{23}{5\sqrt{29}}$.

2499. $\arcsin \frac{2}{5\sqrt{5}}$. 2502. $\frac{3}{4}$. 2510. Прямую.

§ 12

2520. Нет. 2523. Да. 2536. Прямая или прямая без точки. 2537. Луч с началом в точке А. 2539. Да. 2553. Окружность без двух точек. 2557. Да. 2558. Верно. 2582. Шесть. 2590. 60° . 2591. 60° , 60° , 60° .

2595. $\frac{rR\sqrt{3}}{\sqrt{r^2 - rR + R^2}}$. 2596. Два раза. 2617. Нет.

2618. Не всегда. Критерий: $\alpha_1 + \dots + \alpha_{2n-1} = \alpha_2 + \dots + \alpha_{2n} = 180^\circ \cdot k$, где α_i — угол между i -й и $(i + 1)$ -й прямыми, k — целое. 2622. а) Нет.

б) Да. 2627. Шесть. 2628. 2k. Пример: отрезки являются большими диагоналями (диаметрами) правильного $2k$ -угольника. 2634. Нет. 2641. 135° . 2643. Нет. 2652. Нет. 2655. Нет. 2656. Верно. 2657. Нет. 2669. Обратное верно только для $n = 2$.

2677. $\frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_3 + r_1 r_2 - r_2 r_3}$. 2688. Построение

возможно: при нечетном n — всегда, при четном — при условии, что $\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} = \alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_n$.

§ 13

2701. 5. 2702. Окружность того же радиуса с центром в данной точке. 2709. Прямая. 2710. Прямая без точки. 2712. 0, 7. 2713. Два луча. 2714. Серединный перпендикуляр к отрезку с концами в данных точках. 2722. Прямая без точки. 2732. Прямая. 2739. Круг, ограниченный данной окружностью, без точек данной окружности. 2746. Две параллельные прямые. 2749. Проведите два диаметра под заданным углом друг к другу. 2750. Окружность, концентрическая данной. 2755. Две перпендикулярные прямые. 2760. Окружность, центр которой совпадает с центром данной окружности, а радиус равен сумме или разности данного радиуса и радиуса данной окружности. 2768. Окружность. 2769. Окружность с диаметром АВ. 2774. Окружность с диаметром АВ (без точки В). 2781. Окружность (без точки), радиус которой вдвое меньше радиуса данной окружности. 2782. Окружность. 2798. Прямая, перпендикулярная АВ. 2802. Окружность. 2806. Объединение окружности с центром О радиуса ОА (без точки А) и луча ОС (без точки О). 2821. Окружность. 2822. Окружность или дуга окружности. 2826. Точка пересечения медиан треугольника ABC и вершины треугольника, для которого стороны треугольника ABC являются средними линиями. 2832. а) Внешность круга, построенного на данном отрезке как на диаметре, без точек прямой, проходящей через данные точки; б) Внутренность круга, построенного на данном отрезке как на диаметре, без точек прямой, проходящей через данные точки; б) Внутренность круга, построенного на данном отрезке как на диаметре, без точек прямой, проходящей через данные точки. 2837. Окружность. 2846. Содержащая точку В полуплоскость, граница которой — сере-

динный перпендикуляр к отрезку AB . 2847. Окружность без одной точки. 2849. Две дуги окружностей. 2865. Прямая, параллельная прямой m . 2877. Отрезок DE прямой, проходящей через точку O , где $\angle AOE = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}$, $OD = 3$, $OE = 6\sqrt{2}$, а сам отрезок расположен а) внутри данного угла; б) вне данного угла, причем точка O лежит между D и E . 2878. Отрезок, соединяющий середины оснований. 2887. Две равные касающиеся окружности. 2891. Окружность без двух точек. 2892. Прямая без точки и точка C . 2893. Окружность без двух точек. 2894. Окружность без двух точек. 2902. Окружность. 2916. Отрезок. 2917. Два параллельных луча. 2918. Прямоугольник. 2923. Две равные пересекающиеся окружности без точек их пересечения. 2926. Четыре прямых угла. 2927. Диагонали ромба. 2930. Окружность, если $m \neq n$. Если $m = n$, то искомое геометрическое место точек есть серединный перпендикуляр к отрезку с концами в данных точках. 2937. Отрезок.

§ 14

2941. Сторона, равная 3. 2942. Нет. 2943. Меньшая. 2950. 60° . 2952. 3. 2953. Прямоугольный треугольник. 2954. 6. 2957. Нет. 2958. а) 3; б) 13. 2959. 6. 2960. Сторона BC . 2966. $\frac{1}{2}d_1d_2$. 2968. 5, 25. 2970. $\frac{b}{2}$. 2971. а) Да; б) Нет. 2973. $\frac{15}{2}$. 2974. Нет. 2977. Точка C . 2978. Точка пересечения диагоналей. 2979. $\frac{b-a}{2}$ или $\frac{b+a}{2}$. 2980. 7, 13. 2984. $AB > AC$. 2985. В точке пересечения диагоналей четырехугольника. 2987. Нет. 2999. 1. 3000. Нет. 3001. На диагонали AC . 3002. Точка касания. 3003. 7, 9. 3009. Длина участка должна быть в два раза больше его ширины (половина квадрата). 3010. $\frac{5}{2}$. 3013. $2\sqrt{2}$. 3018. Нет. 3019. ACO . 3030. Когда треугольник AOB — равнобедренный. 3031. 25. 3032. $\sqrt{10}$. 3033. $3\sqrt{2}$. 3034. $\sqrt{41}$. 3035. 3 и 13. 3036. $3\sqrt{2}$. 3040. Да. 3044. $\frac{3h}{2}$. 3051. Равнобедренный треугольник. 3052. $\angle KML =$

$$= \arccos \left(-\frac{3}{5} \right) = \pi - \arcsin \frac{4}{5}. \quad 3053. \frac{R+r-a}{2}.$$

3058. Диаметр искомой окружности равен разности радиуса данного круга и расстояния от его центра до хорды данного сегмента.

$$3059. \frac{1}{4}R \text{ и } \frac{7}{4}R. \quad 3060. 2. \quad 3061. \frac{4-\sqrt{2}}{6}.$$

$$3067. 4 \text{ или } 5. \quad 3079. \text{ а) } \frac{R}{r} \geq \frac{(p+1)^2}{2p}; \text{ б) } BC = \frac{p+1}{p} \sqrt{4pRr - r^2(p+1)^2}. \quad 3080. \text{ Нет. } 3081. 3.$$

3088. $\frac{p}{4}$. 3093. $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$. 3100. Разрезы сложатся в отрезок длины 2, и этим отрезком надо отсечь равнобедренный треугольник. 3101. 3. 3105. Равнобедренный треугольник. 3106. Равнобедренный треугольник.

Раздел 2

$$3115. AM > BK. \quad 3116. CK < AC.$$

$$3117. \frac{\sqrt{2S}}{\sin \gamma} \sin(\alpha + \gamma) \sin \alpha.$$

$$3118. 2(\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha). \quad 3119. \frac{50}{3}.$$

$$3120. \frac{a^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}. \quad 3121. \frac{1}{2}a^2 \sin^3 \alpha \cos \alpha.$$

$$3122. 415. \quad 3123. CG > BL. \quad 3124. \sqrt{5}. \quad 3125. 2, 4.$$

$$3126. \frac{8\sqrt{7}}{5\sqrt{19}}. \quad 3127. 2\sqrt{7+4\sqrt{2}}. \quad 3128. BO > BK.$$

$$3129. \frac{1}{5}. \quad 3130. \frac{5\sqrt{6}}{2}. \quad 3131. 15. \quad 3132. 240.$$

$$3133. \frac{a^3b^3}{(a^2+b^2)^2}. \quad 3134. \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}. \quad 3135. \sqrt{2} + \sqrt{6}. \quad 3136. \arctg 3, \arctg \frac{1}{3}. \quad 3137. \frac{3}{2}.$$

$$3138. 8. \quad 3139. \frac{1}{2}r^2(\alpha - \sin \alpha). \quad 3140. 2\sqrt{\frac{5S}{3}},$$

$$2\sqrt{\frac{5S}{3}}. \quad 3141. \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad 3142. 4; \frac{10}{3}.$$

$$3143. 4 - \sqrt{2}. \quad 3144. 3 - \sqrt{3}. \quad 3145. \sqrt{3} - 1.$$

$$3146. 5. \quad 3147. 6; 18; 3; 1. \quad 3148. \frac{2}{5}. \quad 3149. \frac{71}{144}.$$

$$3150. 6\sqrt{2}. \quad 3151. R = \frac{2\sqrt{6}}{3} < 1,65.$$

$$3152. 4\sqrt{13}. \quad 3153. 98. \quad 3154. \sqrt{21}. \quad 3155. 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 3156. \text{а) } \frac{\sqrt{6}}{5}; \quad \text{б) } \frac{\sqrt{6}\sqrt{34+15\sqrt{2-\sqrt{3}}}}{\sqrt{6}+5},$$

$$\sqrt{34 + \frac{15(\sqrt{3}-1)}{2}}. \quad 3157. 4:5. \quad 3158. 12\sqrt{15}.$$

$$3159. \frac{5}{6}R^2(2\sqrt{3} + 5\pi). \quad 3160. \frac{a}{2} \left(\sqrt{\frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha}} + 8 - \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right). \quad 3161. \frac{\pi - \sqrt{3}}{6}. \quad 3162. \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} + 1.$$

$$3163. \frac{9 \sin 110^\circ}{2(1 + \sin 55^\circ)} = 9 \cos 35^\circ \operatorname{tg} 17,5^\circ.$$

$$3164. \sqrt{6}. \quad 3165. 7. \quad 3166. \frac{15\pi}{18} - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$3167. 2\sqrt{6}. \quad 3168. \frac{1}{8}a^2(\sqrt{2}-1)((2\sqrt{2}-1)\pi-4).$$

$$3169. \frac{7+4\sqrt{7}}{9}. \quad 3170. \frac{9(11+4\sqrt{6})}{50}. \quad 3171. \frac{17}{3}.$$

$$3172. \arccos\left(-\frac{1}{4}\right). \quad 3173. 2\sqrt{Q}\sqrt[4]{3}, \quad \frac{4\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{3}}.$$

$$3174. 3. \quad 3175. 2. \quad 3176. \frac{R^2(6-\sqrt{3})}{2}. \quad 3177. AB =$$

$$= CD = 2, BC = 4, AD = 6, S(ABCD) = 5\sqrt{3}.$$

$$3178. \sin \varphi \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4} \right). \quad 3180. 13:23. \quad 3181. 4.$$

$$3182. \frac{(\alpha-1)(\beta+1)}{2}. \quad 3183. 3,9. \quad 3184. \frac{25\sqrt{5}}{4}.$$

$$3185. \text{На продолжении диагонали } PR.$$

$$3186. 6. \quad 3187. 7. \quad 3188. 150 - 36\pi > 36.$$

$$3189. 2. \quad 3190. \frac{45}{2}. \quad 3191. \frac{1}{2}a(p-a) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$3192. \sqrt{240} \pm 20, \quad \sqrt{80} \pm \sqrt{60}. \quad 3193. 60^\circ.$$

$$3194. 80\sqrt{3}. \quad 3195. \frac{a}{4} \operatorname{tg} \alpha, \frac{a}{4} \cos \alpha. \quad 3197. \frac{8}{15}.$$

$$3198. 9. \quad 3199. \frac{27}{2}. \quad 3200. \operatorname{arctg}(2-\sqrt{3}) = 15^\circ,$$

$$\operatorname{arctg}(2+\sqrt{3}) = 75^\circ. \quad 3201. \frac{25}{7}. \quad 3202. 2\sqrt{30}.$$

$$3203. 10. \quad 3204. \frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}. \quad 3205. \frac{1}{4}(a^2 +$$

$$+ a\sqrt{a^2+8b^2}). \quad 3206. \frac{3\sqrt{10}}{4}. \quad 3207. \frac{25}{2\sqrt{13}}.$$

$$3208. \sqrt{42}. \quad 3209. \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad 3210. 2\sqrt{6}.$$

$$3211. AC = 12 \pm 5\sqrt{3}. \quad 3212. \frac{1}{36}. \quad 3213. \frac{4}{5}.$$

$$3214. \frac{8}{15}. \quad 3215. 120^\circ. \quad 3216. 3\sqrt{2}, \quad \sqrt{10}.$$

$$3217. 7; 8. \quad 3218. 2\sqrt{\frac{183}{7}}. \quad 3219. \frac{12}{5}.$$

$$3220. \frac{\sqrt{2}}{\sin 15^\circ} \text{ или } \frac{\sqrt{2}}{\sin 105^\circ}. \quad 3221. 3\sqrt{\frac{3}{13}}.$$

$$3222. \frac{\sqrt{3}}{4}, 5. \quad 3223. \arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right). \quad 3224. \frac{108}{5}.$$

$$3225. 30. \quad 3226. \cos \alpha \sqrt{49 - 16 \sin^2 \alpha}.$$

$$3227. \frac{1352}{15}. \quad 3228. 30^\circ. \quad 3229. 3\sqrt{3}.$$

$$3230. \text{Площадь круга.} \quad 3231. \frac{n-m}{2m}.$$

$$3232. \cup AD : \cup DB = n : (n+2).$$

$$3233. \arccos\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}\right); \pi - \arccos\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

$$3234. \frac{1}{2}a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \frac{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$3235. \frac{a^2(24\sqrt{3}-11\pi)}{72}. \quad 3236. \frac{\sqrt{3}}{14\pi}. \quad 3237. \frac{12}{25\pi}.$$

$$3238. 2\sqrt{2}. \quad 3239. 3:5. \quad 3240. \frac{21}{44}. \quad 3241. 4:3.$$

$$3242. \frac{2R^2}{\sqrt{3}}(2\sqrt{3}-1). \quad 3243. 18. \quad 3244. 14 +$$

$$+ 6\sqrt{5}. \quad 3245. 32. \quad 3246. \frac{a\sqrt{19}}{15}. \quad 3247. 30^\circ.$$

$$3248. \frac{1}{2}(-b + \sqrt{b^2+4a^2}). \quad 3249. \frac{20}{46 + \sqrt{466}}.$$

$$3250. \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad 3251. LM = 4, KN = 20, KL =$$

$$= MN = 10; R = 5\sqrt{5}. \quad 3252. 6. \quad 3253. 3; 4.$$

$$3254. 28, \quad 2\sqrt{181}. \quad 3255. 56\sqrt{2}. \quad 3256. ABO.$$

$$3257. \frac{5}{8}. \quad 3258. \frac{54\sqrt{2}}{5}. \quad 3259. \frac{3}{2}. \quad 3260. 6.$$

$$3261. \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}. \quad 3262. AB=BC=7\sqrt{3}, CD=\sqrt{7},$$

$$AD=3\sqrt{7}. \quad 3263. \sqrt{13+6\sqrt{2}}. \quad 3264. 126\sqrt{3}.$$

3265. $10(\sqrt{3} - 1)$; 7,32. 3266. $\frac{19\sqrt{3}}{52}$.
 3267. $\frac{8}{\sqrt{5}}$. 3268. 1. 3269. $AC = 1$,
 $AB = BC = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 3270. $\sqrt{53}$, $\sqrt{13}$. 3271. 5.
 3272. 4. 3273. $\arccos \frac{1}{3}$. 3274. $\frac{\pi}{3}$. 3275. $ab - 2a$.
 3276. $\frac{\sqrt{31}}{4\sqrt{3}}(\sqrt{45} - 1)$. 3277. 4. 3278. 6.
 3279. $\frac{3}{2}$. 3280. 16. 3281. $\sqrt{6} + 1$, $2\sqrt{10}$.
 3282. $2\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$. 3283. $56\sqrt{2}$. 3284. $\frac{85}{48}$.
 3285. $\frac{7}{5}$. 3286. $2\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$. 3287. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. 3288. 12.
 3289. $\frac{2}{3}$, $\frac{3\sqrt{7}}{20}$. 3290. $\frac{7}{6}$. 3291. $\frac{1}{2}p(p-a)\tan \frac{\alpha}{2}$.
 3292. 3. 3293. $\frac{37}{15}$. 3294. 3.
 3295. $2\left(\cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{6}\right) + \cos\left(60^\circ - \frac{\alpha}{3}\right) + \cos \frac{\alpha}{2}\right)$. 3296. $\frac{3}{13}$. 3297. 4. 3298. $\frac{5}{6}$.
 3299. $\sqrt{5 \pm \frac{5\sqrt{3}}{2}}$. 3300. $\frac{6\sqrt{21}}{7}$. 3301. 129.
 3302. $\frac{7\sqrt{7}}{8}$. 3303. $\frac{\sqrt{5}}{6}$. 3304. $\frac{4-\sqrt{7}}{\pi}$. 3305. $\frac{8}{3}$.
 3306. $\sqrt{bd}$. 3307. $\frac{3\pi}{16}$. 3308. 30° , 60° .
 3309. $\frac{2125}{147}$. 3310. $AB = \sqrt{10}$. 3311. 2.
 3312. 8. 3313. 9. 3314. 27. 3315. $\frac{3}{8}$. 3316. $\frac{9}{2}$.
 3317. $\frac{7\sqrt{3}}{6}$. 3318. 55. 3319. $\frac{1}{k}$. 3320. $1 + \sqrt{\frac{5}{2}}$.
 3321. 9. 3322. 27. 3323. 9. 3324. 2; 6. 3325. 8.
 3326. 20. 3327. 18. 3328. а) 1:1; 5:8;
 б) 5:14. 3329. $\sqrt{7} + 5$. 3330. 12. 3331. 6.
 3332. $\sqrt{61 \sin^2 \alpha - 25}$. 3333. $\frac{\pi}{4}$. 3334. 120° .
 3335. 3,84. 3336. $\frac{\alpha - \beta}{2}$. 3337. $\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$.
 3338. $\frac{4P}{5}$. 3339. $4P$. 3340. $\frac{\sqrt{15}}{2}$. 3341. $\angle B =$
 $= \arctg \frac{5}{\sqrt{3}}$. 3342. 30. 3343. $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5k+1}{k+1}}$.
 3344. 1. 3345. $(1 + 2 \cos 2\beta)^2 \tan 2\beta$. 3346. $(1 + \cos 2\beta) \sin 2\beta$. 3347. $32 \sin \beta \cos^3 \beta$. 3348. 4;
 вне. 3349. 9. 3350. 60. 3351. $\sqrt{5}$. 3352. $\frac{5}{2\sqrt{13}}$.
 3353. $\frac{1}{\sqrt{10}}$. 3354. $\frac{9}{\sqrt{130}}$; $\frac{39}{5}$. 3355. $\frac{7}{\sqrt{85}}$; $\frac{34}{5}$.
 3356. $588\sqrt{3}$. 3357. $\angle ABC = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$.
 3358. $-\frac{1}{\sqrt{10}}$. 3359. $-\frac{1}{\sqrt{13}}$. 3360. $\frac{152 - 8\sqrt{165}}{21}$.
 3361. 7. 3362. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 3363. $\arcsin \frac{1}{8}$.
 3364. $\frac{75}{2}$. 3365. 6. 3366. $\sqrt{\frac{17}{5}}$.
 3367. $\frac{a\left(\frac{5}{3} - 2\sqrt{\frac{3}{5}} \cos \beta\right) \sin \gamma}{2 \sin \beta \sin (\beta + \gamma)}$.
 3368. $\frac{l \sin \beta \left(\frac{8}{5} - 2\sqrt{\frac{3}{5}} \cos \alpha\right)}{2 \sin \alpha \sin (\alpha + \beta)}$. 3369. 3.
 3370. Площадь треугольника. 3371. $\arctg \sqrt{5}$.
 3372. $\sqrt{\frac{7}{2}}$. 3373. $r\sqrt{6+2m}$, $r\sqrt{6-2m}$.
 3374. $2m - 1$. 3375. $2r\sqrt{5}$. 3376. $4(\sqrt{2} + 1)r^2$.
 3377. $\frac{2}{5}$. 3378. 210. 3379. 7,2. 3380. $2r\sqrt{\frac{r}{R}}$.
 3381. $\arccos \frac{1}{3}$; $25\sqrt{2}$. 3382. $\sqrt{2} : 1$.
 3383. $\frac{185}{8}$. 3384. $\frac{49(3\sqrt{3}-5)}{12}$. 3385. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
 3386. $\frac{675}{2}$. 3387. 306. 3388. 1. 3389. 3.
 3390. $\frac{bc}{a}$. 3391. 30° . 3392. 20.
 3393. $\frac{m^2}{n}$. 3394. 0,3. 3395. $\frac{ap}{c}$.
 3396. $\frac{a \sin (\alpha + \beta) (3 \sin^2 \beta + 1)}{12 \sin \alpha \sin \beta}$. 3397. Зада-
 ча не имеет решений. 3398. $2R^2(5\sqrt{3} - 6)$.
 3399. $\pi - \frac{2}{3} \arccos \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{8}$. 3400. $\arccos \frac{1}{3}$.

3401. $\frac{8b^2\sqrt{11}}{5}$. 3402. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. 3403. 4. 3404. 7.
 3405. $3\sqrt{3}$. 3406. 2. 3407. $\frac{9(3\sqrt{10}-8)}{10}$.
 3408. $\sqrt{3}$. 3409. $\frac{3}{2}$. 3410. 3. 3412. $\frac{m^2}{n}$.
 3413. 45° . 3414. $\sqrt{a(a+b)}$. 3415. $2 \operatorname{arctg} \frac{6}{7} =$
 $= \arcsin \frac{84}{85}$. 3416. $3\sqrt{2}$. 3417. 6.
 3418. $\operatorname{tg} \angle BAD = 3$; 91 : 40. 3419. $\operatorname{tg} \angle BAD =$
 $= 2$; 77 : 25. 3420. $\operatorname{tg} \angle ABC = 4\sqrt{3}$; $\frac{7R^2}{\sqrt{3}}$.
 3421. $\arccos \frac{1}{8}$. 3422. $2 \arccos \frac{2}{3}$.
 3423. 45° , $\operatorname{arctg} 2$, $\operatorname{arctg} 3$.
 3424. $\frac{1}{2}(a+b-\sqrt{(a+b)^2-4ab\sin^2\varphi})$.
 3425. $\frac{49}{\sqrt{3}}$. 3426. $\pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$. 3427. $\frac{2\pi}{3} -$
 $-\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$; $\frac{\pi}{3} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$. 3428. $\frac{5}{2}$.
 3429. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; $\frac{5}{\sqrt{6}}$. 3430. $8\sqrt{5}$ или $24\sqrt{5}$.
 3431. $\frac{6}{\sqrt{5}}$. 3432. 7 : 6. 3433. $\frac{4\sqrt{6}(9-4\sqrt{3})}{33}$.
 3434. $\sqrt{km}$. 3435. $\frac{R^2}{a}$. 3436. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$.
 3437. $d\sqrt{m}$. 3438. $\sqrt{rR}$, $\sqrt{\frac{r}{R}}$. 3439. 10.
 3440. 22. 3441. $\frac{3\sin 37,5^\circ}{\sin 82,5^\circ}$. 3442. $4\sqrt{3}$.
 3443. 1) $PO = 1$; 2) $PO = 16$. 3444. $4(\sqrt{3}+1)$.
 3445. 1) 1; 2) $k - 1$. 3446. $\frac{4}{3}(\sqrt{3} \pm 2)$.
 3447. $\angle A = \frac{2\pi}{3}$, $\angle B = \frac{\pi}{6}$, $\angle C = \frac{\pi}{6}$ или $\angle A =$
 $= \frac{\pi}{6}$, $\angle B = \frac{2\pi}{3}$, $\angle C = \frac{\pi}{6}$. 3448. $a^2 \cos \frac{\alpha}{2}$.
 3449. $\sqrt{h^2 + \frac{mh}{2}}$. 3450. $\frac{a^2}{b}$. 3451. $5 + 2\sqrt{5}$.
 3452. $\frac{13}{\sqrt{3}}$. 3453. $\frac{\pi-\alpha}{2}$, $\operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha}{2+\cos \alpha}$,

$\frac{\pi+\alpha}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha}{2+\cos \alpha}$. 3454. $\frac{5m^2\sqrt{11}}{7}$.
 3455. $2 \arcsin \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right)$, $\frac{\pi}{2} - \alpha - \arcsin \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right)$,
 $\frac{\pi}{2} + \alpha - \arcsin \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right)$.
 3456. $\arccos \frac{k^2+1-\sqrt{k^2+1}}{k^2}$,
 $\arccos \frac{\sqrt{k^2+1}-1}{k} - \frac{1}{2} \arccos \frac{k^2+1-\sqrt{k^2+1}}{k^2}$,
 $\pi - \arccos \frac{\sqrt{k^2+1}-1}{k} -$
 $-\frac{1}{2} \arccos \frac{k^2+1-\sqrt{k^2+1}}{k^2}$.
 3457. $\frac{3R}{2\sqrt{2}}$. 3458. $\frac{2S}{15}$, $\frac{S}{15}$. 3459. $\frac{\sqrt{7}}{2}$.
 3460. $\sqrt{3} + 1$.

Раздел 3

3461. $\frac{50}{3}$. 3465. 12° , 132° , 36° . 3466. $\frac{49}{2}$.
 3472. $|a-b|$. 3483. 15° . 3484. а) Нет; б) 3 или
 $\sqrt{5} - 2$. 3489. 120° . 3503. 2. 3511. $\sqrt{b^2-a^2}$.
 3516. 90° , $22,5^\circ$. $67,5^\circ$. 3518. 72° , 72° , 36° .
 3521. 15° . 3524. 5. 3526. $\frac{r}{\sin \frac{1}{2}\angle A}$,
 $2R \sin \frac{1}{2}\angle A$. 3528. $a+b$. 3529. $\frac{1}{2}$.
 3535. Точка M — основание высоты треуголь-
 ника ABC . 3541. 90° , 60° , 30° . 3544. 45° ,
 45° , 90° , $\frac{h^2}{2}$. 3545. 75° , 45° . 3550. 7. 3554. p .
 3557. 12. 3558. $\sqrt{ab}$. 3559. $\frac{36\sqrt{6}+55\sqrt{3}}{4}$.
 3560. Нет. 3571. 20° . 3572. 1) 1; 2) $m-1$.
 3574. 5. 3576. 20° , 5° , 55° . 3580. $180^\circ - 2\beta$;
 β ; β . 3582. 2. 3584. $\lambda+1$. 3588. 110° .
 3590. $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$. 3592. 60° , 45° , 75° . 3596. $t(1-t)$.
 3599. $\sqrt{ab}$. 3600. $r+r_1$. 3613. $\sqrt{a^2+b^2}$.
 3620. 80° . 3621. 15° , 75° .

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Раздел 1

§1

3636. Если прямая l параллельна плоскости α , то в плоскости α найдется прямая, параллельная прямой l . 3641. 60° . 3642. 720° .

3645. $\frac{2}{3}$. 3646. α или $180^\circ - \alpha$. 3647. Верно.

3648. 90° . 3652. Плоскость. 3655. $\frac{1}{4} s$.

3656. $\frac{1}{3} a$. 3658. 25-угольная пирамида.

3659. 17-угольная призма. 3661. Трапеция.

3663. Плоскость. 3666. Нет. 3668. $2 : 1, 3 : 2$.

3669. $\frac{1}{3} a$. 3670. $1 : 2$, считая от точки D .

3671. $\frac{1}{4} ab \sin \alpha$. 3674. $1 : 2$. 3675. $1 : 3$.

3676. 90° . 3679. $\frac{3}{16}$. 3680. 99^2 . 3681. $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}$.

3682. $4 - 2\sqrt{3}$. 3684. $3 : 1$, считая от вершины B . 3685. $2 : 3$, считая от точки A .

3687. $1 : 2$, считая от точки N . 3688. $\frac{2}{3} a$.

3689. $1 : 1$. 3691. $1 : 2$. 3695. $1 : 2$.

3699. $\frac{|c^2 - b^2|}{a^2}$. 3700. $1 : 3$. 3702. 12 .

3705. $1 : 3$. 3706. $\frac{3}{2}$. 3707. 60° .

3709. $\frac{\sqrt{15S^2 + 9Q^2}}{12}$. 3712. $1 : 2$. 3717. $2 : 3$.

3718. $2 : 1$. 3719. $4 : 3$. 3720. $2 : 3, 1 : 1$.

3721. $5 : 1$. 3722. $6 : 7$. 3723. $1 : 3$.

3724. $B_1P : B_1C_1 = 2 : 3, C_1Q : CC_1 = 1 : 1$.

3725. $3 : 5$; $\frac{7a^2\sqrt{6}}{16}$. 3726. $3 : 5$. 3729. $\frac{1}{3}$.

3730. Одну. 3731. Да. 3732. а) Точки A и C_1 ; б) точки M и N , делящие диагональ AC_1 на три равные части. 3735. $\frac{1}{4}$. 3736. Да.

3737. $1 : 1$. 3738. $5 : 1$, считая от точки B .

3740. $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. 3742. $2 : 5$. 3743. $\arcsin \frac{4}{5}$.

3745. $1 : 5, 3 : 7$. 3746. $3 : 1$, считая от середи-

ны AB . 3747. $3 : 5$. 3750. На 14 частей, 8 из которых — трехгранные углы, а 6 — четырехгранные. 3752. $\frac{n}{mp}$. 3753. $1 : 3$. 3754. $3 : 4$.

3758. $100^\circ < \alpha < 120^\circ$.

§2

3771. $\sqrt{3}$. 3772. Нет. 3773. $\sqrt{3}$. 3774. a .

3776. $\sqrt{b^2 - a^2}$. 3777. 3 . 3778. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 3779. $29,6$.

3782. $\sqrt{b^2 - h^2}$. 3783. Нет. 3785. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

3786. $\frac{3a^2}{4}$. 3787. $2b^2\sqrt{2} \sin 2\beta \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

3789. r . 3790. $\sqrt{\frac{2}{3}}$. 3791. 144 . 3792. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

3793. Нет. 3794. 3 . 3795. 90° .

3796. $\frac{1}{2} \sqrt{4l^2 - a^2 - b^2}$. 3797. $\sqrt{\frac{m^2 + n^2 + p^2}{2}}$.

3798. $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$. 3800. $\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$. 3801. $\frac{\sqrt{22}}{4}$.

3803. 2 или 1. 3807. $\sqrt{14}$. 3808. $\sqrt{5}$. 3809. $\frac{3}{2}$.

3811. $3a^2$. 3816. Нет. 3818. $\sqrt{a^4 - (b^2 - c^2)^2} + \sqrt{b^4 - (c^2 - a^2)^2} + \sqrt{c^4 - (a^2 - b^2)^2}$.

3819. $1,5$. 3820. $a(\sqrt{5} + \sqrt{2})$; $\frac{a}{\sqrt{6}}$. 3821. Нет.

3822. $4 + \sqrt{7}$ или $4 - \sqrt{7}$. 3823. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$.

3826. $2 \arctg \frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \arccos \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

или $180^\circ - 2 \arctg \frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}} =$

$= 180^\circ - \arccos \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2};$

$2 \arctg \frac{b}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \arccos \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

или $180^\circ - 2 \arctg \frac{b}{\sqrt{a^2 + c^2}} =$

$= 180^\circ - \arccos \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2};$

$$2 \operatorname{arctg} \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arccos \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\text{или } 180^\circ - 2 \operatorname{arctg} \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= 180^\circ - \arccos \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$$3827. \arccos \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)}}, \text{ если } a \geq b;$$

$$180^\circ - \arccos \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)}}, \text{ если}$$

$$a < b. \quad 3828. \frac{13}{6}, \quad \frac{13}{9}, \quad \frac{13}{12}. \quad 3829. \frac{483}{8}.$$

$$3830. \frac{a\sqrt{6}}{6}. \quad 3831. \text{Да.}$$

$$3832. \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos \varphi}.$$

$$3833. \sqrt{\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2}}. \quad 3834. \frac{1}{4} a^2 \sqrt{\frac{3(m+2n)}{m}}.$$

$$3835. \frac{a^2 \sqrt{195}}{32}. \quad 3836. 1872. \quad 3838. \arccos \frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\frac{1}{3}, CY:YM = 9:1 \text{ (} Y \text{ вне отрезка } CM).$$

$$3839. \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{3}, CY:YM = 8:1 \text{ (} Y \text{ на от-$$

$$\text{резке } CM). \quad 3840. 45^\circ, \frac{1}{3}, DY:YM = 8:1 \text{ (} Y \text{ на}$$

$$\text{отрезке } DM). \quad 3841. \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}. \quad 3842. 4,8; 72 +$$

$$+ 24\sqrt{2}. \quad 3843. a. \quad 3847. \frac{3}{2}. \quad 3850. \sqrt{9 \pm 12\sqrt{2}}.$$

$$3851. \arcsin \frac{\sqrt{78}}{9}, \frac{1}{\sqrt{26}}, DY:YM = 7:6 \text{ (} Y \text{ на}$$

$$\text{отрезке } DM). \quad 3852. \arcsin \frac{\sqrt{33}}{6}, \frac{a\sqrt{22}}{11},$$

$$CY:YM = 10:1. \quad 3853. \arccos \frac{1}{6}, a\sqrt{\frac{2}{35}},$$

$$DY:YN = 32:3. \quad 3854. \arccos \frac{2}{3}, \frac{a}{\sqrt{10}}.$$

$$3855. \frac{16\sqrt{5}}{3}. \quad 3858. 1. \quad 3859. \frac{9}{2}. \quad 3860. \frac{1}{3}h, \frac{2}{3}h.$$

$$3862. a\sqrt{\frac{2}{3}}. \quad 3863. \frac{a\sqrt{3}}{3}. \quad 3864. \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$3865. \frac{40\sqrt{5}}{3}, 6\sqrt{21}, 6\sqrt{21}, \frac{15\sqrt{15}}{2}. \quad 3866. 11.$$

$$3867. 6; 2; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}. \quad 3870. 3\sqrt{11}. \quad 3871. 3\sqrt{3}.$$

$$3872. \text{а) } l = \sqrt{10}, \text{ если } K' \in [P'R], L' \in [Q'S];$$

$$\text{б) } l = \sqrt{346}, \text{ если } K' \notin [P'R], L' \notin [Q'S];$$

$$\text{в) } l > \frac{\sqrt{634}}{5}, \text{ если } K' \notin [P'R], L' \in [Q'S];$$

$$\text{г) } l > \frac{\sqrt{8194}}{5}, \text{ если } K' \in [P'R], L' \notin [Q'S].$$

$$3873. \frac{\sqrt{31}}{6}. \quad 3874. \frac{9}{4}. \quad 3875. 156. \quad 3877. 6; \frac{9}{4}.$$

$$3878. 1; 3; 7; 9. \quad 3879. x = \frac{\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

$$3880. 2:1; a\sqrt{\frac{2}{15}}. \quad 3881. \frac{1}{3}. \quad 3882. 16.$$

$$3886. \frac{b}{c}. \quad 3887. \frac{160\sqrt{3}}{3}. \quad 3888. a, b, c, \text{ если}$$

$$c \leq \sqrt{a^2 + b^2}; a, b, \text{ если } c > \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$3889. \frac{5}{12}(2\sqrt{6} - 3\sqrt{2}), \frac{5}{12}(3\sqrt{2} + \sqrt{6}), \frac{5\sqrt{2}}{6}.$$

$$3890. \frac{5\sqrt{5}}{16}. \quad 3891. \frac{3 - \sqrt{5}}{2}. \quad 3893. \frac{4a^2}{\sqrt{17}}.$$

$$3894. 2(\sqrt{5} + \sqrt{7}). \quad 3895. 3S\sqrt{2}.$$

§3

$$3898. 2\sqrt{3}; 2. \quad 3899. \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$3900. \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos \alpha. \quad 3901. \text{а) Квадрат. б) Прямо-}$$

угольник, две стороны которого равны и параллельны ребру куба, а две другие — диагонали грани куба. 3902. $\frac{1}{2}$. 3903. Нет.

3904. $a \operatorname{ctg} \varphi$. 3905. α . 3906. а) Треугольник ABC и отрезки OA , OB и OC , где O — центр правильного треугольника ABC . б) Например, треугольник DMC , где M — середина

$$AB. \quad 3908. d \cos \alpha. \quad 3909. \frac{a}{b\sqrt{3}}. \quad 3911. a \sin \varphi.$$

$$3912. \frac{30\sqrt{6}}{7}. \quad 3913. \arccos \frac{1}{3}. \quad 3914. \sqrt{10}.$$

$$3915. 6. \quad 3916. \operatorname{tg} \beta = 2\sqrt{3}. \quad 3917. \text{а) } \arccos \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$6) 90^\circ; \quad \text{в) } 60^\circ. \quad 3918. \arcsin \left(\frac{4}{5} \sin \alpha \right).$$

$$3919. \arcsin \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \sin \alpha \right). \quad 3920. \text{ а) } 180^\circ - x,$$

$$180^\circ - y, z; x, 180^\circ - y, 180^\circ - z; 180^\circ - x, y, 180^\circ - z; x, y, z; 180^\circ - x, 180^\circ - y, z; x, 180^\circ - y, 180^\circ - z; 180^\circ - x, y, 180^\circ - z; 6) 180^\circ - \alpha, 180^\circ - \beta, \gamma, \alpha, \beta, 180^\circ - \gamma; 180^\circ - \alpha, \beta, 180^\circ - \gamma; \alpha, \beta, \gamma; 180^\circ - \alpha, 180^\circ - \beta, \gamma; \alpha, \beta, 180^\circ - \gamma; 180^\circ - \alpha, \beta, 180^\circ - \gamma.$$

$$3921. 2l \sin \alpha \sqrt{2S + l^2 \cos^2 \alpha}. \quad 3922. \text{ Окружность. } 3925. \frac{1}{2}. \quad 3926. \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$3927. \frac{1}{3} ph^2 \operatorname{ctg} \alpha. \quad 3928. \frac{c^3 \sqrt{3}}{48}. \quad 3929. \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

$$3930. 5\sqrt{3}. \quad 3931. 60. \quad 3932. \text{ Прямая, проходящая через центр описанной окружности треугольника } ABC \text{ перпендикулярно плоскости } \alpha.$$

$$3933. \frac{Q^2}{S}. \quad 3935. 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 60^\circ.$$

$$3936. \frac{1}{2} (\sqrt{S^2 + 8Q^2} - S). \quad 3939. \frac{ab}{a+b}.$$

$$3940. 90^\circ, 90^\circ, \alpha. \quad 3941. 60^\circ. \quad 3942. 6. \quad 3944. d^3 \sin \beta \sin \gamma \sqrt{\cos^2 \gamma - \sin^2 \beta}. \quad 3945. 6.$$

$$3946. 3. \quad 3947. \frac{b^3 \sqrt{3}}{24}. \quad 3949. \frac{a^2(2 + \sqrt{13})}{\sqrt{3}}.$$

$$3950. \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \alpha. \quad 3951. 90^\circ. \quad 3952. d \operatorname{ctg} \alpha \text{ или}$$

$$\frac{1}{3} d \operatorname{ctg} \alpha. \quad 3953. \arccos \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{3};$$

$$2 \operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{12b^2 - a^2}}{3\sqrt{4b^2 - a^2}}. \quad 3955. \frac{2\sqrt{\pi^2 - 1}}{\pi}.$$

$$3956. \cos \alpha = \frac{S_1}{Q}, \cos \beta = \frac{S_2}{Q}, \cos \gamma = \frac{S_3}{Q}.$$

$$3957. \text{ Квадрат, диагонали которого равны и параллельны отрезкам } AB \text{ и } CD.$$

$$3958. 3h^2 \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \alpha, \quad \frac{1}{3} h^2 \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

$$3959. \frac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3b^2 - a^2}}. \quad 3960. \frac{21\sqrt{15}}{10}. \quad 3961. \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{2ab}. \quad 3962. 75^\circ. \quad 3963. 6\sqrt{2} - \sqrt{6} + 4.$$

$$3964. 2, \text{ если } DE \parallel BC. \quad 3965. \sqrt{5}. \quad 3966. 1; 6,$$

$$3; 2. \quad 3967. \frac{91}{25}. \quad 3968. 6\sqrt{3}. \quad 3969. \frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

$$3970. \arcsin \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}}. \quad 3971. 48\sqrt{3}, 192\sqrt{3},$$

$$128\sqrt{3}, 128\sqrt{3}. \quad 3972. \frac{8}{3} r^3 \sqrt{3}. \quad 3973. 30^\circ.$$

$$3975. \arccos \frac{46}{\sqrt{2641}}. \quad 3976. \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$3977. m^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \frac{|m|^3 \sqrt{2}}{6}. \quad 3978. \arccos \frac{5}{8}.$$

$$3979. 25^\circ, 45^\circ, 110^\circ. \quad 3980. n = 3; k = \frac{1}{\cos \frac{180^\circ}{n}},$$

$$\text{где } n = 3, 4, \dots. \quad 3981. \frac{4 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

$$3982. 216. \quad 3983. 432. \quad 3984. 45^\circ.$$

$$3985. \arccos \frac{5}{8}. \quad 3986. \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad 3987. 30^\circ.$$

$$3988. \text{ Правильный шестиугольник со стороной } \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \text{ где } a \text{ — ребро куба. } 3989. \cos \alpha =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{5}. \quad 3990. \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ или } \sin \alpha = \frac{1}{3}.$$

$$3991. 60^\circ. \quad 3992. 432. \quad 3993. \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{13\sqrt{2}}{4}.$$

$$3994. \sqrt{\frac{21}{5}}. \quad 3995. 1. \quad 3996. \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$3998. \arccos \frac{17}{25}; \frac{5\sqrt{3}}{3}. \quad 3999. \sqrt{148 - 34\sqrt{3}}.$$

$$4000. 13.$$

§ 4

$$4004. a. \quad 4005. a^3 \sqrt{3} / 12. \quad 4006. \frac{a}{2}. \quad 4008. 45^\circ.$$

$$4009. \frac{a}{2}. \quad 4010. \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}. \quad 4011. a \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$4012. \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}. \quad 4013. a^2 \sqrt{3}. \quad 4014. \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$4015. \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}. \quad 4016. 90^\circ. \quad 4017. \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}.$$

$$4018. \operatorname{tg} \beta = 2\sqrt{3}. \quad 4019. \frac{a^2 \sqrt{39}}{4}. \quad 4020. a^2 \sqrt{2}.$$

$$4021. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad 4022. \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}. \quad 4023. \operatorname{tg} \beta =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad 4024. \frac{a^2\sqrt{3}}{2}. \quad 4025. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{7}.$$

$$4026. \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad 4027. \cos \beta = \frac{1}{3}.$$

$$4028. \sin \gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos \gamma = -\frac{1}{3}. \quad 4029. \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$4030. 36. \quad 4031. \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta. \quad 4032. \frac{81}{16}.$$

$$4033. \operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha. \quad 4034. \operatorname{tg} \beta = \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$4035. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{2}}. \quad 4036. \operatorname{tg} \beta = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \alpha + 3}},$$

$$\sin \beta = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \alpha + 3}}. \quad 4037. \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \beta + 4}, \quad \sin \alpha = \sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \beta + 4}.$$

$$4038. \frac{3a^2\sqrt{7}}{2}. \quad 4039. \frac{a^2\sqrt{2}}{4}. \quad 4040. \frac{3}{2} \sqrt{\frac{15}{2}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{30}}{4}. \quad 4041. \frac{27\sqrt{3}}{2}. \quad 4042. 3a^2, \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

$$4043. a \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad 4044. \frac{a\sqrt{2}}{2}. \quad 4045. \frac{R^3\sqrt{6}}{4}.$$

$$4046. Q \sqrt{\frac{Q}{3}}. \quad 4047. 90^\circ. \quad 4048. \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\sin \varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad 4049. \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad 4050. 6.$$

$$4051. \text{a) } \operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{3}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}, \sin \alpha =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}; \text{б) } \operatorname{tg} \beta = 4\sqrt{3}, \cos \beta = \frac{1}{7}, \sin \beta = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

$$4052. \text{a) } \operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}, \cos \alpha = \frac{1}{3}, \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3};$$

$$\text{б) } \operatorname{tg} \beta = 4, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{17}}, \sin \beta = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

$$4053. \text{a) } \operatorname{tg} \beta = \frac{3}{4}, \cos \beta = \frac{4}{5}, \sin \beta = \frac{3}{5}; \text{б) } \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= \frac{3}{8}, \cos \alpha = \frac{8}{\sqrt{73}}, \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{73}}. \quad 4054. \text{a) } \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= \sqrt{\frac{15}{2}}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{17}}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{17}}; \text{б) } \operatorname{tg} \beta = \sqrt{15},$$

$$\cos \beta = \frac{1}{4}, \sin \beta = \frac{\sqrt{15}}{4}. \quad 4055. \text{a) } \operatorname{tg} \beta = \sqrt{47},$$

$$\cos \beta = \frac{1}{4\sqrt{3}}, \sin \beta = \frac{\sqrt{47}}{4\sqrt{3}}; \text{б) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{17}}{2}, \cos \alpha =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{51}}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{47}}{\sqrt{51}}. \quad 4056. \text{a) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \text{б) } \beta = 45^\circ. \quad 4058. \frac{3a}{4}.$$

$$4059. \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{2}{3}, \cos \gamma = \frac{5}{13}. \quad 4060. 120^\circ. \quad 4061. a.$$

$$4062. 3 \frac{a}{2\sqrt{7}}. \quad 4063. \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{7}}{3}, \cos \gamma = \frac{1}{8}.$$

$$4064. \frac{a}{2}. \quad 4065. \frac{13\sqrt{3}}{12}. \quad 4066. \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}.$$

$$4067. \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}. \quad 4068. R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$4069. 3\sqrt{153}. \quad 4070. \frac{3a^2\sqrt{19}}{8}. \quad 4071. \frac{a^2\sqrt{29}}{8}.$$

$$4072. \sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2}. \quad 4073. \cos \alpha = \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$4074. \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{3} \cos \beta. \quad 4075. \cos \beta = \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$4076. \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}}. \quad 4077. \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

$$4078. \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 \beta}}. \quad 4079. \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{\cos \varphi}}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$$

$$4080. \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \cos \alpha, \cos \varphi = \frac{1}{2} (\sin^2 \alpha + 1).$$

$$4081. \cos \alpha = 2 \sin \frac{\varphi}{2}, \sin \alpha = \sqrt{1 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} =$$

$$= \sqrt{2 \cos \varphi - 1}. \quad 4082. \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\cos \beta}{\sqrt{3}}.$$

$$4083. \cos \beta = \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \quad 4084. 3.$$

$$4085. \arccos \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}. \quad 4086. 2. \quad 4087. \frac{2a}{3}.$$

$$4088. \frac{a\sqrt{6}}{6}. \quad 4089. \frac{3a}{4}. \quad 4090. \frac{7a}{12}. \quad 4091. \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$4092. \frac{ab\sqrt{2}}{4}. \quad 4093. \frac{3a}{\sqrt{13}}. \quad 4094. \frac{2a}{3}.$$

$$4095. \frac{12a}{\sqrt{73}}. \quad 4096. \frac{a\sqrt{30}}{2\sqrt{17}}. \quad 4097. \frac{a\sqrt{47}}{2\sqrt{17}}.$$

4098. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. 4099. $\frac{\sqrt{13}-1}{12}$. 4100. $\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$. 4133. $\frac{5ab\sqrt{2}}{16}$. 4134. $\frac{a^3}{16\sqrt{2}}$.
4101. $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{6}$, $\cos \gamma = -\frac{5}{7}$. 4102. $\frac{a}{6}$. 4135. $\frac{1}{6} a^3 \sqrt{1+\sqrt{5}}$. 4136. $\frac{4a^3}{7}$. 4137. $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} =$
 $= \frac{\sqrt{13}}{6}$, $\cos \gamma = \frac{13}{49}$. 4138. $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $\cos \gamma =$
 $= -\frac{1}{17}$. 4139. $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{73}{3}}$, $\cos \gamma = -\frac{23}{50}$.
4103. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. 4104. $\frac{a\sqrt{6}}{12}$. 4105. $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{13}}{3}$,
 $\cos \gamma = -\frac{5}{8}$. 4106. $\frac{36}{\sqrt{30}}$. 4107. $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. 4140. $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{15}}$, $\cos \gamma = -\frac{1}{16}$.
4108. $\frac{24}{\sqrt{17}}$. 4109. $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\cos \gamma = -\frac{1}{5}$. 4141. $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{47}}$, $\cos \gamma = \frac{15}{32}$. 4143. $\frac{1}{4} ab$.
4110. $\frac{a^2\sqrt{2}}{16}$. 4111. $\frac{a^2\sqrt{11}}{16}$. 4112. $\frac{1}{4} ab$ или
 $\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{16}$. 4113. $\frac{3a^2\sqrt{11}}{16}$. 4114. $\frac{3a^2\sqrt{33}}{8}$. 4145. $\frac{b^2}{\sqrt{3b^2-a^2}}$. 4146. $\frac{b^2}{\sqrt{2b^2-a^2}}$.
4115. $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}(\sqrt{3} \sin \alpha)$. 4116. $\sin \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}{\sqrt{3}}$. 4147. $\frac{b^2}{2\sqrt{b^2-a^2}}$. 4148. $\frac{1}{6} a^3 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} - 1}$.
4117. $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{1+4 \operatorname{ctg}^2 \beta}}{\sqrt{3}}$. 4118. $\operatorname{tg} \beta =$
 $= \frac{2}{\sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} - 1}}$. 4119. $\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\gamma}{2}}$. 4149. $\frac{2}{3} h^3 \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} - 1 \right)$. 4150. $\frac{a(\sqrt{21}-3)}{4}$.
4120. $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{1-2 \cos \varphi}$. 4121. $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} =$
 $= \sin \alpha$. 4122. $\sin \alpha = \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$. 4123. $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} =$
 $= \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 \beta}}$. 4124. $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} - 1}$. 4151. $\frac{a(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$. 4152. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 4153. $r =$
 $= \frac{a\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{12}$. 4154. $R = \frac{5a}{4\sqrt{3}}$. 4155. $\frac{8a}{3\sqrt{13}}$.
4125. $\cos \varphi = \frac{1}{1 - \cos \gamma}$. 4126. $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} =$
 $= \sqrt{2 \cos \varphi - 1}$. 4127. $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{3}}$. 4156. $R = \frac{4a}{\sqrt{14}} = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$. 4157. $2\sqrt{\frac{11}{3}}$.
4128. $\sin \alpha = \sqrt{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\gamma}{2}}$. 4129. $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} =$
 $= \sqrt{3 + 4 \operatorname{ctg}^2 \beta}$. 4130. $\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} - 3}}$. 4158. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. 4159. 4. 4160. $R = \frac{9a}{8}$; $r =$
 $= \frac{a(\sqrt{17}-1)}{8}$. 4161. $R = \frac{73a}{18}$; $r = \frac{4a}{9}$.
4162. $R = \frac{17a}{4\sqrt{15}}$; $r = \frac{3a}{2\sqrt{15}}$. 4163. $R = \frac{17a\sqrt{3}}{4\sqrt{47}}$;
 $r = \frac{a\sqrt{3}(4\sqrt{3}-1)}{6\sqrt{47}}$. 4164. $R = \frac{3\sqrt{2}a}{4}$, $r =$
 $= \frac{a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2}$. 4166. $\frac{a\sqrt{3b^2-a^2}}{3(a+\sqrt{4b^2-a^2})}$.
4167. $\frac{a\sqrt{2b^2-a^2}}{2(a+\sqrt{4b^2-a^2})}$. 4168. $\frac{a\sqrt{b^2-a^2}}{a\sqrt{4b^2-a^2}}$.
4169. $\frac{a(2b-a)}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$. 4170. $\frac{a(2b-a)}{2\sqrt{2b^2-a^2}}$.
4171. $\frac{a(2b-a)}{2\sqrt{b^2-a^2}}$. 4172. $\frac{a(2b+a)}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$.
4173. $\frac{a(2b+a)}{2\sqrt{2b^2-a^2}}$. 4174. $\frac{a(2b+a)}{2\sqrt{b^2-a^2}}$.

$$\begin{aligned}
 4175. & \frac{a(b\sqrt{3}-a)}{\sqrt{3}\sqrt{3b^2-a^2}}. & 4176. & \frac{a(b\sqrt{2}-a)}{\sqrt{2}\sqrt{2b^2-a^2}}. \\
 4177. & \frac{a(b-a)}{\sqrt{b^2-a^2}}. & 4178. & \frac{b}{2\sqrt{\cos \alpha}}. \\
 4179. & \frac{2}{3} \frac{r^3 \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + \sqrt{3} \right)^3}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} - 3}. & 4180. & r = \\
 & = \frac{a\sqrt{2}(3-\sqrt{7})}{4}. & 4181. & 4\sqrt{6}. & 4182. & \frac{1+\sqrt{33}}{8}. \\
 4183. & \arcsin \frac{1}{3\sqrt{2}}. & 4184. & \frac{5a}{3}. & 4185. & \arccos \frac{S}{nQ}. \\
 4186. & \frac{3ah}{(2\sqrt{3}+3)h+3a}. & 4187. & \left(a + \frac{b}{2} \right)^2. \\
 4188. & \frac{a\sqrt{3}}{3 \sin 2\alpha}. & 4189. & \frac{a(\sqrt{5}-1)}{4}. & 4190. & r = \\
 & = \frac{a(5-\sqrt{13})}{12} = \frac{a}{5+\sqrt{13}}. & 4191. & \frac{a^2\sqrt{4b^2-a^2}}{12}. \\
 4192. & \frac{a\sqrt{2}}{4}. & 4193. & a\sqrt{\frac{2}{3}}. & 4194. & \cos \frac{\gamma}{2} = \\
 & = \sin \beta \sin \frac{\pi}{n}. & 4195. & 3\sqrt{41}. & 4196. & \frac{7\sqrt{3}}{2}. \\
 4197. & \sin \varphi = \frac{\sqrt{15}}{16}. & 4198. & \sin \varphi = \frac{4}{17}. \\
 4199. & \sin \varphi = \frac{18}{25}. & 4200. & \sin \varphi = \frac{\sqrt{15}}{16}. \\
 4201. & \sin \varphi = \frac{\sqrt{47}}{32}. & 4202. & 30^\circ. & 4203. & 6 \text{ граней}; \\
 & \text{куб.} & 4204. & \arcsin \sqrt{\frac{3}{7}}. & 4205. & \sin \varphi = \frac{3}{13}. \\
 4206. & 30^\circ. & 4207. & \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{7}. & 4208. & \sin \varphi = \\
 & = \frac{3\sqrt{3}}{8}. & 4209. & \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{3}. & 4210. & \sin \varphi = \frac{3}{5}. \\
 4211. & \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}. & 4212. & \sin \varphi = \frac{3\sqrt{39}}{25}. \\
 4213. & \sin \varphi = \frac{\sqrt{14}}{9}. & 4214. & R = \frac{a\sqrt{6}}{4} \text{ или } R = \\
 & = \frac{3a\sqrt{6}}{8}; r = \frac{a(3-\sqrt{6})}{6} \text{ или } r = \frac{a\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{12}. \\
 4215. & \frac{a^3\sqrt{2}}{54}.
 \end{aligned}$$

§ 5

$$\begin{aligned}
 4216. & \frac{4+3\sqrt{6}}{19}. & 4218. & 5\pi. & 4219. & \frac{2R}{\sqrt{3}}. \\
 4220. & 2 \arcsin \sin \frac{\beta}{2} \cos \alpha. & 4222. & \frac{2\sqrt{3}}{3}. \\
 4223. & \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{\sin^2 180^\circ}}. \\
 4224. & \left| l \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \sqrt{r^2 - \frac{4}{3} l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right|. \\
 4225. & \text{Две окружности радиуса } r, \text{ лежащие в} \\
 & \text{плоскостях, параллельных данной, и удален-} \\
 & \text{ных от данной на расстояние, равное } r. \\
 4227. & \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}. & 4228. & \frac{1}{4}. & 4229. & \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{3}. \\
 4230. & 4. & 4231. & \arccos \frac{4r^2+l^2}{8r^2}. & 4232. & 14 \text{ или } \frac{14}{5}. \\
 4233. & \text{Прямая, параллельная ребру данного} \\
 & \text{двугранного угла и удаленная от его граней} \\
 & \text{на расстояние, равное данному радиусу.} \\
 4234. & \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}}. & 4235. & 2\sqrt{2}. \\
 4236. & \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. & 4237. & \text{а) } 5; \text{ б) } 4 \text{ и } 3. \\
 4238. & \frac{a\sqrt{21}}{6}. & 4239. & \frac{a\sqrt{89}}{8}. & 4240. & \frac{a\sqrt{481}}{32}. \\
 4241. & r \sqrt{1 + \cos^4 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \beta}. & 4242. & 152, \frac{24}{19}. \\
 4243. & R = \frac{13a}{12}, r = \frac{a}{4}. & 4244. & \frac{bc}{2a}, \frac{ac}{2b}, \frac{ab}{2c}. \\
 4246. & \frac{1}{3} (\sqrt{6-2a^2} + 2a). & 4247. & \frac{1}{2} a. \\
 4248. & \frac{1}{2} (\sqrt{3} \pm 1)R. & 4249. & 2 - \sqrt{3}. \\
 4251. & \frac{1}{2} (\alpha + \gamma - \beta). & 4253. & \frac{a(\sqrt{6}-1)}{10}. \\
 4254. & \frac{1}{4} \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}. & 4255. & \frac{1}{3} R. \\
 4256. & \frac{1}{4} (\sqrt{21} \pm 3)R. & 4257. & 2 + \sqrt{3}. \\
 4258. & \frac{a\sqrt{7}}{3}. & 4259. & \frac{a\sqrt{41}}{8}. & 4260. & 3ab. \\
 4261. & \text{Окружности радиусов } 2\sqrt{Rr}, 2\sqrt{Rr} \text{ и} \\
 & \frac{2R\sqrt{Rr}}{R+r}. & 4262. & 8\sqrt{3}. & 4263. & r \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \right).
 \end{aligned}$$

$$4264. \frac{2}{3} R \sqrt{3+6 \cos \alpha}. \quad 4265. \frac{a \sqrt{22}}{8}.$$

$$4266. \frac{r^3 \sqrt{6}}{4}. \quad 4267. \frac{2 \sqrt{3}}{9}. \quad 4268. \frac{a(2b-a)}{\sqrt{3b^2-a^2}}.$$

$$4269. \sqrt{\frac{3}{2}} \pm 1. \quad 4270. \sqrt{6}. \quad 4271. \frac{a}{4} \sqrt{\frac{23}{5}}.$$

$$4272. 6\pi. \quad 4273. \frac{1}{2}. \quad 4274. \frac{1}{12} a(4\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

$$4275. \frac{1 - \cos \alpha}{3 + \cos \alpha}. \quad 4276. \sqrt{\frac{3}{2}}. \quad 4277. a) a;$$

$$б) \frac{a(2 - \sqrt{2})}{2}. \quad 4278. \frac{5h\sqrt{3}}{9}; \quad 6) \frac{2h}{5}.$$

$$4279. 3\sqrt{15}(\sqrt{5} + 1)^2, \quad 2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{5}} =$$

$$= 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{3}} = \arccos \frac{1}{5}. \quad 4280. \frac{1}{3} r(6 +$$

$$+ \sqrt{27 + 12\sqrt{3}}). \quad 4281. \frac{1}{2r}, \quad \frac{1}{r}. \quad 4282. \sqrt{3}.$$

$$4284. \frac{4}{3} r \sqrt{3}. \quad 4285. 20. \quad 4286. \frac{1}{2} \sqrt{\frac{73}{22}}.$$

$$4287. \frac{5\pi\sqrt{5}}{6}. \quad 4288. 8\sqrt{2}. \quad 4289. \frac{1}{2} \sqrt{\frac{31}{4}}.$$

$$4290. V = \frac{4}{3} \sqrt{2}, \quad R = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 4291. 36.$$

$$4292. \frac{2r \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}. \quad 4293. \sqrt{3} - 1.$$

$$4294. AD = BD = \sqrt{2}; \quad CD = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

$$4295. \frac{4R\sqrt{14}}{7}. \quad 4296. \sqrt{8} - \sqrt{5}. \quad 4297. \sqrt{\frac{11}{19}}.$$

$$4298. 9. \quad 4299. R = \frac{1}{4} \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)},$$

$$r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8} - \frac{a^2 b^2 c^2}{16p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

$$4300. 48. \quad 4301. \frac{a^2 \sqrt{3}}{6}, \frac{a(\sqrt{3}-1)}{4}, \frac{a(\sqrt{3}+1)}{4}.$$

$$4302. \frac{1}{4} (14 - 7\sqrt{2}). \quad 4303. 67,5^\circ.$$

$$4304. \frac{R(17 - \sqrt{17})}{8h}. \quad 4305. а) 2; б) 8; в) 8, \text{ если}$$

$$x < \frac{11\sqrt{3}}{4}; \quad 5, \text{ если } x = \frac{11\sqrt{3}}{4}; \quad 2, \text{ если}$$

$$x > \frac{11\sqrt{3}}{4}. \quad 4306. 9. \quad 4307. \frac{18}{5}. \quad 4308. \frac{2}{3}; \quad 2.$$

$$4309. 5; \frac{16}{3}. \quad 4310. \frac{2R\sqrt{6}}{9}.$$

$$4311. \frac{R^3 \sqrt{3}(1 + 2 \cos \alpha)^2}{4(1 - 2 \cos \alpha) \cos \alpha}, \quad 1:2, \quad 3:1.$$

$$4312. \frac{7}{6}. \quad 4313. \frac{45m^3 \sqrt[3]{3}}{1024}. \quad 4314. \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

$$4315. 126. \quad 4317. 2r^2 \sqrt{3}. \quad 4318. 9. \quad 4319. 9.$$

$$4320. а) \sqrt{7} - \sqrt{5}; \quad б) \sqrt{7} + \sqrt{5}; \quad в) \sqrt{7} + \sqrt{5}.$$

$$4321. 6. \quad 4322. 8. \quad 4323. \frac{48\sqrt{13} - 74\sqrt{3}}{49}.$$

$$4324. 41 \left(\frac{\sqrt{105}}{55} + \frac{\sqrt{3}}{10} + \frac{3}{22} \right).$$

$$4325. \frac{hp(15 - \sqrt{193})}{8}. \quad 4326. \frac{183}{40}. \quad 4327. \frac{7}{3}$$

$$4328. \frac{1}{4} (S + \sigma k \sqrt{2 - 2l}). \quad 4329. \sqrt{3}, \quad \frac{19\sqrt{3}}{25}.$$

$$4330. \frac{r_1}{r_2} \sqrt{2R^2 - r_2^2 + 2R \cos \varphi \sqrt{R^2 - r_2^2}}.$$

§ 6

4331. $\sqrt{l^2 - h^2}$, $h \sqrt{l^2 - h^2}$. 4332. Два равных конуса с общим основанием. 4333. 120° .

$$4334. \frac{3}{2}. \quad 4335. \frac{h^2 + r^2}{2h}. \quad 4336. 180^\circ.$$

$$4338. \frac{\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\sin^2 \alpha}. \quad 4339. \frac{a^2 \sqrt{3}}{3}. \quad 4340. \frac{\pi r^2}{\cos \alpha}.$$

$$4341. \frac{hr}{r + \sqrt{h^2 + r^2}}. \quad 4343. \frac{2R^3 \sqrt{6}}{9}. \quad 4344. 12.$$

4345. 500. 4346. Цилиндрическое «кольцо», внутренний радиус которого равен h , внеш-

ний — $\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$, а высота равна a . Площадь

осевого сечения равна $2a \left(\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} - h \right)$.

$$4347. а) \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad б) \sqrt{3}. \quad 4348. \frac{1}{4}. \quad 4349. \frac{hr\sqrt{2}}{h + r\sqrt{2}}.$$

$$4350. \frac{\sqrt{3}-1}{4}. \quad 4351. \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{7}}. \quad 4352. \frac{1}{2} a(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

$$4353. \sqrt{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}. 4354. \frac{\sqrt{2}}{3}. 4355. 2 \arctg \frac{2}{\sqrt{3}} =$$

$$= \arccos \left(-\frac{1}{7} \right). \quad 4356. 2\sqrt{\frac{2}{3}} + 2.$$

$$4357. \arccos \left(-\frac{1}{3} \right). 4358. \sin \alpha + \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha}.$$

$$4359. \pi - 4 \arctg \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \quad 4360. \frac{1}{3} a^2 h \sqrt{3}.$$

$$4361. \frac{\pi(4\sqrt{3}-3)}{13}. \quad 4362. 2. \quad 4363. \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

$$4364. 120^\circ. 4365. \frac{a(2-\sqrt{3})}{6}. 4366. 32\pi\sqrt{78}.$$

$$4367. \arccos(\sqrt{5}-2). \quad 4368. \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

$$4369. \frac{9\pi R^3}{5\sqrt{10}}. \quad 4370. \frac{2R(2\sqrt{3}-3)}{3}.$$

$$4371. \frac{48\pi R^3}{125}. 4372. 2 \arcsin \frac{3}{2\sqrt{5}}. 4373. \frac{125\pi}{18}.$$

$$4374. \frac{9\pi\sqrt{2}}{8}. 4375. 1 + 2\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{3}. 4376. \frac{1}{3}(1 +$$

$$+ 2\sqrt{2})^3 \pi R^3. 4378. \frac{3(17+10\sqrt{3})}{44} r. 4379. 3r.$$

$$4380. 60^\circ. \quad 4381. a(\sqrt{4h^2+a^2}-h).$$

$$4383. \frac{R(H+h)}{\sqrt{H^2+h^2+R^2}},$$

$$\arccos \frac{hH}{\sqrt{(H^2+R^2)(h^2+R^2)}}.$$

$$4384. \frac{\pi a^2 \sqrt{23}}{9}. 4385. \frac{r(3\sqrt{2}+4)}{4}. 4386. \frac{7a\sqrt{3}}{24}.$$

$$4387. \frac{\sqrt{30}}{4}, \frac{\pi\sqrt{30}}{28}. 4388. \cos \alpha = \frac{1}{7}. 4389. \frac{68}{3}.$$

$$4390. \frac{\pi}{20}. \quad 4391. 2. \quad 4392. 2 \arctg \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 2 \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} = \arccos \frac{1}{3}. 4393. 2 \arctg \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 2 \arccos \frac{2}{\sqrt{7}} = \arccos \frac{1}{7}. \quad 4394. 63\pi\sqrt{6}.$$

$$4395. \frac{16}{11} \left(\arccos \frac{19}{30} + \frac{7\sqrt{11}}{135} \right). \quad 4396. \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

$$4397. \frac{3}{8} \sqrt{3} \pm \frac{1}{4}. 4398. \frac{9\sqrt{14}}{20} \pi. 4399. \frac{15\sqrt{7}}{8} \pi.$$

$$4400. \frac{a}{\sqrt{3}}. \quad 4401. 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad 4402. \frac{125\pi}{256}.$$

$$4403. 60^\circ. \quad 4404. 2 \arcsin \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$4405. \arcsin \left(\cos \gamma - \frac{2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}{\cos \gamma} \right). \quad 4406. R\sqrt{3},$$

$$\frac{R\sqrt{11}}{3}. 4407. \arctg \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg} \beta}. 4408. \text{Да}.$$

§ 7

$$4411. \frac{a^2 h}{3}. \quad 4412. \frac{a^2 h \sqrt{3}}{2}. \quad 4413. \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$4414. \frac{a^2 h \sqrt{3}}{12}. \quad 4415. \frac{a^2 \sqrt{3b^2-a^2}}{12}.$$

$$4416. \frac{a^2 \sqrt{b^2 - \frac{1}{2}a^2}}{3}. \quad 4417. \frac{a^2 \sqrt{b^2-a^2}}{2}.$$

$$4418. a^3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{12}. \quad 4419. a^3 \operatorname{tg} \frac{\beta}{24}.$$

$$4420. \frac{\sqrt{3}}{4} b^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha. \quad 4421. \frac{\sqrt{3}}{4} h^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

$$4422. \frac{1}{6} a^3 \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha. \quad 4423. \frac{1}{6} a^3 \operatorname{tg} \beta.$$

$$4424. \frac{4}{3} \frac{b^3 \operatorname{tg} \beta}{(\sqrt{2+\operatorname{tg}^2 \beta})^3}. \quad 4425. \frac{4}{2} h^3 \operatorname{tg}^2 \beta.$$

$$4426. \frac{1}{2} a^3 \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha. \quad 4427. \frac{3}{4} a^3 \operatorname{tg} \beta.$$

$$4428. \frac{6b^3 \sin \beta \cos^2 \beta}{\sqrt{(3+\cos^2 \beta)^3}}. \quad 4429. \frac{2}{3} h^3 \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \beta.$$

$$4430. \frac{2}{3} h(b^2-h^2). \quad 4431. \frac{h\sqrt{3}(b^2-h^2)}{4}.$$

$$4432. \frac{h\sqrt{3}(b^2-h^2)}{2}. \quad 4433. \frac{abS}{4(a+b)}.$$

$$4434. a^2(4+\sqrt{3}). \quad 4435. \frac{2048}{27}. \quad 4436. \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$4437. \frac{1}{6} V. \quad 4438. \frac{a\sqrt{48Q^2-a^4}}{24}.$$

$$4439. \frac{1}{6} a \sqrt{16Q^2-a^4}. \quad 4440. \frac{1}{4} a \sqrt{16Q^2-3a^4}.$$

4441. $\frac{2}{3} b^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$. 4442. $\frac{2}{3} h^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha$. 4499. $\frac{8r^3}{\sqrt{3}} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)$.
 4443. $\frac{1}{2} b^3 \sqrt{3} \sin \alpha \cos^2 \alpha$. 4444. $\frac{1}{2} h^3 \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \alpha$. 4500. $\frac{a^3}{(1 + \sqrt{2})^3}$. 4501. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{2(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3}$. 4502. 12.
 4445. $\sqrt{pqr}$. 4446. $\frac{d^3 \sqrt{2}}{8}$. 4447. $\frac{3}{2}$. 4503. 906. 4504. $a^2(1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{13})$, $\frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$.
 4448. $h^3 \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \beta$. 4505. $\frac{a^3 b}{12 \sqrt{3a^2 - 4b^2}}$. 4506. $\frac{b^3}{\sqrt{2}}$. 4507. $4 + 6\sqrt{3}$.
 4449. $\frac{mnpd^3}{(m^2 + n^2 + p^2)\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$. 4508. $\frac{2l^3 \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{27 \sin^3 \alpha}$. 4509. 2. 4510. 4500π .
 4450. $\frac{1}{2} l^3 \sin \beta \cos^2 \beta \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$. 4451. 72. 4511. $\frac{3\pi}{2}$. 4512. $\frac{1}{12} \pi h^3 (3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1)$.
 4452. $\frac{1}{2} d^3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cos^2 \beta \sin \beta$. 4453. 2. 4454. 36π . 4513. $\frac{48a^3}{125}$. 4514. 2. 4515. $\frac{19}{3}$. 4516. 6.
 4455. $\frac{7}{27}$. 4456. $\frac{1}{6} abc$. 4457. $a^3 \sqrt{2}$. 4458. $4\sqrt{3}$. 4517. $\frac{\sqrt{2}}{18}$. 4518. $\sqrt[3]{\frac{\alpha}{2\pi}}$. 4519. 1.
 4459. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$. 4460. $2a(a + \sqrt{4b^2 + a^2})$. 4520. $\frac{a^2(R\sqrt{3R^2 - a^2})}{12}$. 4521. $\frac{a^4 r \sqrt{3}}{6(a^2 - 12r^2)}$.
 4461. $ab\sqrt{3a^2 - b^2}$. 4462. $2(a + b)\sqrt{3(a^2 + b^2)}$. 4522. $\frac{b^4 \sqrt{3}(4R^2 - b^2)}{32R^3}$.
 4463. $\frac{3a^2}{8}$. 4464. $\frac{9a^3 \sqrt{11}}{4}$. 4465. $Q\sqrt{\sqrt{3} \cos \varphi}$. 4523. $\frac{1}{6} (b^2 \pm \sqrt{b^4 - 4Q^2}) \sqrt{b^4 - 4Q^2}$.
 4466. $\sqrt{6}$. 4467. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$. 4468. $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$. 4524. $\frac{h^2(2R - h)\sqrt{3}}{4}$. 4525. $\frac{r^2 h \sqrt{3}}{h - 2r}$.
 4469. $\frac{4}{3} r^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \beta$. 4470. $\frac{2}{\sqrt{3}} r^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \beta$. 4526. $\frac{h\sqrt{3h^4 + 4Q^2}}{2}$.
 4471. $\frac{41}{45}$. 4472. $\frac{1}{2} Sd$. 4473. $\frac{1}{2} ab\sqrt{6ab}$. 4527. $\frac{1}{3} a^2 \left(R \pm \sqrt{R^2 - \frac{1}{2} a^2} \right)$. 4528. $\frac{2}{3} \frac{ra^4}{a^2 - 4r^2}$.
 4474. $18\sqrt{2}$. 4475. $\frac{9d^3}{64}$. 4476. $\frac{1}{2} S\sqrt{S} \sqrt[4]{6}$. 4529. $\frac{b^4(4R^2 - b^2)}{12R^3}$.
 4477. 260; 312. 4478. $\frac{1}{2} (S_1 + S_2)h$. 4479. 12. 4530. $\frac{2}{3} (b^2 - \sqrt{b^4 - 4Q^2}) \sqrt{b^4 - 4Q^2}$.
 4480. $36\sqrt{2}$. 4481. $\frac{3\pi}{2}$. 4482. 8. 4531. $\frac{2}{3} h^2(2R - h)$. 4532. $\frac{4}{3} \frac{r^2 h^2}{h - 2r}$.
 4483. $d^3 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}$. 4484. 80. 4533. $\frac{2}{3} h(\sqrt{h^4 + 4Q^2} - h^2)$. 4534. $\frac{1}{2} a^2 \sqrt{R^2 - a^2}$.
 4485. $\frac{1}{3} (2\sqrt{6} - \sqrt{3})$. 4486. $\frac{1}{3} V$. 4487. $\frac{1}{6} V$. 4535. $\frac{3\sqrt{3}a^4 r}{3a^2 - 4r^2}$. 4536. $\frac{b^4 \sqrt{3}(4R^2 - b^2)}{16R^3}$.
 4488. $\frac{1}{3} b^3 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$. 4489. $\frac{1}{6}$. 4537. $\frac{1}{2} \sqrt{4b^4 - 16Q^2} (\sqrt{4b^4 - 16Q^2} - b^2)$.
 4491. 3. 4492. $\frac{1}{\sqrt{2} + 2 + \sqrt{6}}$. 4493. $2Q\sqrt{2}$. 4538. $\frac{1}{2} h^2 \sqrt{3} (2R - h)$. 4539. $\frac{2}{3} \frac{\sqrt{3} r^2 h^2}{h - 2r}$.
 4494. 108. 4495. $21\sqrt{55}$; 84. 4496. $\sqrt{\frac{QS_1 S_2}{2}}$. 4540. $\frac{1}{3} h \sqrt{3} (\sqrt{h^4 + 12Q^2} - h^2)$.
 4497. $\frac{ab\sqrt{12a^2 - 3b^2}}{8}$. 4498. $\frac{224}{3}$.

$$4541. \frac{a^3}{12 \sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} - 1}}.$$

$$4542. \frac{1}{24} a^3 \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} - 1}. \quad 4543. \sqrt{(\operatorname{tg}^2 \beta + 4)^3}.$$

$$4544. \frac{1}{12} \frac{b^3 \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \left(4 \sin^2 \frac{\gamma}{2} - 1 \right)}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}.$$

$$4545. \frac{\sqrt{3}}{4} h^3 \left(3 \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} - 1 \right). \quad 4546. \frac{h^3 \sqrt{3} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{3 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

$$4547. \frac{1}{4} R^3 \sqrt{3} \sin^3 2\alpha \operatorname{tg} \alpha.$$

$$4548. \frac{R^3 \sqrt{3} \sin^3 2\beta \operatorname{tg} \beta}{(3 \cos^2 \beta + 1)^3}.$$

$$4549. r^3 \sqrt{3} \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg}^3 \frac{\beta}{2}. \quad 4550. \frac{1}{6} \frac{a^3 \sqrt{\cos \varphi}}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$$

$$4551. \frac{2}{3} b^3 \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\gamma}{2} \right) \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

$$4552. \frac{4}{3} b^3 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sqrt{\cos \varphi}. \quad 4553. \frac{4}{3} \frac{h^3 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3} h^3 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \quad 4554. \frac{2}{3} R^3 \sin^3 2\alpha \operatorname{tg} \alpha.$$

$$4555. \frac{4}{3} Q \sqrt{(2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 1)^3}.$$

$$4556. \frac{4}{3} Q \sqrt{Q \cos \beta} \sin \beta. \quad 4557. \frac{3}{2} \frac{a^3}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} - 3}}.$$

$$4558. \frac{1}{4} a^3 \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} - 3}.$$

$$4559. \frac{3}{2} b^3 \left(1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\gamma}{2} \right). \quad 4560. 2b^3 \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} - 3}.$$

$$4561. \frac{1}{6} h^3 \sqrt{3} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} - 3 \right). \quad 4562. \frac{2\sqrt{3} h^3 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{1 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

$$4563. 4\sqrt{3} R^3 \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha.$$

$$4564. 4Q \sqrt{(4 \operatorname{tg}^2 \alpha + 3)^3}.$$

$$4565. 2\sqrt[4]{3} Q \sqrt{Q \cos \beta} \sin \beta.$$

$$4566. \frac{6}{9 + 2\sqrt{10} + \sqrt{13}}. \quad 4567. \frac{V}{15}. \quad 4568. \frac{2V}{15}.$$

$$4569. \frac{V}{60}. \quad 4570. \frac{3V}{10}. \quad 4571. \frac{V}{24}. \quad 4572. \frac{2}{3} a^2 h \sqrt{3}.$$

$$4573. 2. \quad 4575. \frac{12}{13 + \sqrt{41}}. \quad 4576. 3 : 32.$$

$$4577. 192. \quad 4578. 2. \quad 4579. 1 : 14. \quad 4580. \sqrt{6}.$$

$$4581. \frac{S\sqrt{S}}{3}. \quad 4582. \frac{2}{3} \frac{R^3 \operatorname{tg} \beta \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$4583. 2 : 33. \quad 4584. 5 : 51. \quad 4585. 2 : 23.$$

$$4586. 1 : 29. \quad 4587. 4S. \quad 4588. a) 1; б) 10; в) 100.$$

$$4589. \frac{12}{\sqrt{61}}. \quad 4590. 16r^3(\sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \alpha} - 1)^3.$$

$$4591. 2Q \sqrt{3(4 \operatorname{tg}^2 \alpha + 1)^3}.$$

$$4592. \frac{Q \sqrt{Q \cos \beta} \sin \beta}{\sqrt[4]{3}}.$$

$$4593. \frac{2}{3} Q \sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} - 1} \sqrt{\cos^3 \frac{\gamma}{2}}.$$

$$4594. \frac{1}{3} Q \sqrt{Q \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \left(3 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right)}.$$

$$4595. \frac{32}{3} \frac{R^3 \sin^4 \beta \cos^2 \beta}{(1 + \cos^2 \beta)^3}.$$

$$4596. \frac{16}{3} R^3 \operatorname{ctg}^4 \frac{\gamma}{2} \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\gamma}{2} \right).$$

$$4597. \frac{32}{3} R^3 \cos^2 \varphi \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

$$4598. \frac{2}{3} \frac{r^3 (\sqrt{2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 1} + 1)^3}{\operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$4599. \frac{2}{3} \frac{r^3 \left(\sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} + 1} + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} - 1} \right)^3}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} - 1}}.$$

$$4600. \frac{4}{3} \frac{r^3 \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}.$$

$$4601. \frac{4}{3} \frac{Q \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} - 1}}{\sqrt{\left(\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} + 1 \right)^3}}.$$

$$4602. \frac{4}{3} Q \sqrt{Q \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right)}.$$

$$4603. \frac{144R^3\sqrt{3}\operatorname{tg}^4\beta}{(3\operatorname{tg}^2\beta+4)^3}.$$

$$4604. 36\sqrt{3}R^3\operatorname{ctg}^4\frac{\gamma}{2}\left(1-3\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2}\right).$$

$$4605. 16\sqrt{3}R^3(2\cos\varphi-1)\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

$$4606. \frac{1}{6}\frac{r^3(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha+3}+\sqrt{3})^3}{\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

$$4607. \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{r^3\left(\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}+1}+\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}-3}\right)^3}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}-3}}.$$

$$4608. 4Q\sqrt{3\left(\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}-3\right)}\sqrt{\cos\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$4Q\sqrt{-3(1+2\cos\gamma)}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

$$4609. 2Q\sqrt{3Q\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\left(1-3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

$$4610. \text{a) } 5:1; \text{ б) } 29:3. \quad 4611. \frac{9}{2}. \quad 4613. \frac{1}{27}.$$

$$4614. \frac{\sqrt{6}}{216}. \quad 4615. \alpha\beta V. \quad 4616. \frac{1}{6}bh(2a+c).$$

$$4617. \frac{9}{95}. \quad 4618. \frac{1}{6}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}.$$

$$4619. \frac{l^3\sqrt{2}}{12}; \quad l^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad 4620. 6\sqrt{7}.$$

$$4621. \frac{4\sqrt{2}}{3}. \quad 4622. \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad 4623. \frac{9\pi}{2}.$$

$$4624. \frac{1}{27}2R^3\sqrt{3}\operatorname{ctg}^4\frac{\gamma}{2}\left(3-\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2}\right).$$

$$4625. \frac{1}{27}8R^3\sqrt{3}\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(3-4\sin^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

$$4626. \frac{25}{72}. \quad 4627. 25:227. \quad 4628. 11:7.$$

$$4629. \frac{a^3}{24}. \quad 4630. \frac{5a^3\sqrt{2}}{96}. \quad 4631. 6; 24; 16; 16.$$

$$4632. \frac{16\pi}{11}. \quad 4633. 405:1267. \quad 4634. 4:5.$$

$$4635. 1109:2571.$$

$$4636. 16r^3\left(\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}-1}\left(\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}+3}-\right.\right.$$

$$\left.-\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}-1}\right)^3\Bigg). \quad 4637. \frac{r^3\sqrt{3}\left(3-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)^2}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\left(\sqrt{3}-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^3}.$$

$$4638. \frac{13}{27}. \quad 4639. \frac{1}{6}b^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$4640. 12. \quad 4641. \frac{a}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+2)} = \frac{a\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2}.$$

$$4642. 1:47. \quad 4643. \frac{1}{6}abc\sin\alpha. \quad 4645. \frac{47V}{120}.$$

$$4646. \frac{29\sqrt{2}}{6}. \quad 4647. \frac{1}{3}r^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-2\cos\alpha}.$$

$$4648. \frac{4}{9}abc. \quad 4650. \frac{1}{2}abc. \quad 4651. \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13}+\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{3(13-\sqrt{65})}{8}. \quad 4652. 1:1:1, \frac{12}{5}, V_1=V_3=8,$$

$$V_2=32. \quad 4653. 1:5, 3:7; 25:119. \quad 4654. 3.$$

$$4655. 37:68. \quad 4656. \frac{3}{5}. \quad 4657. \frac{a^2b^2}{12\sqrt{3b^2-a^2}}.$$

$$4658. 23:77. \quad 4659. \frac{16\sqrt{2}}{3}. \quad 4660. 30.$$

$$4661. \frac{63}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}. \quad 4662. 400. \quad 4663. \frac{20\sqrt{3}}{3}.$$

$$4664. 10. \quad 4665. \frac{5V}{18}. \quad 4666. 105. \quad 4667. \frac{3}{8}.$$

$$4668. \frac{1}{3}ab^2\operatorname{tg}\alpha. \quad 4669. \frac{119V}{360}. \quad 4670. \frac{\sqrt{10}}{6}.$$

$$4671. 2\arcsin\left(\frac{2}{3}\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right). \quad 4672. \sqrt{2}.$$

$$4673. \frac{213}{67}. \quad 4674. \sqrt{133}. \quad 4675. \frac{36\pi}{11\sqrt{11}}.$$

$$4676. \frac{180\pi}{7}. \quad 4677. V(ACLN)=t, t\in\left[0; \frac{3V}{2}\right].$$

§ 8

$$4678. 2x-y-3z+13=0.$$

$$4679. \arccos\frac{2\sqrt{105}}{35}. \quad 4680. \cos\varphi=\frac{6}{\sqrt{105}}.$$

$$4681. \cos\varphi=\frac{4}{\sqrt{66}}. \quad 4682. \arccos\frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

$$4683. 3x+4y+1=0. \quad 4684. 2\arctg\frac{3\sqrt{5}}{10}=$$

$$=\arccos\frac{11}{29}. \quad 4685. \arccos\frac{5}{\sqrt{78}}. \quad 4687. \text{Her.}$$

$$4688. \arccos \frac{\sqrt{22}}{33}. \quad 4689. \arccos \frac{5\sqrt{6}}{18}.$$

$$4690. \frac{\sqrt{14}}{3}. \quad 4691. \frac{a}{\sqrt{3}}. \quad 4692. x + y + 3z = 0.$$

$$4693. 2x + 3y - z - 1 = 0. \quad 4694. 2x + 3y - z - 14 = 0. \quad 4695. \frac{13}{\sqrt{14}}. \quad 4696. \cos \alpha = \frac{20}{\sqrt{14}\sqrt{101}}.$$

$$4697. 28x + 16y - 27z + 24 = 0. \quad 4698. 28x + 16y - 27z - 89 = 0. \quad 4699. \frac{113}{\sqrt{1769}}. \quad 4700. \cos \alpha =$$

$$= \frac{86}{\sqrt{1769}\sqrt{329}}. \quad 4701. x + y + 3z = 0. \quad 4702. \frac{10}{\sqrt{11}}.$$

$$4703. \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{209}}. \quad 4704. x + y + 3z - 10 = 0.$$

$$4705. \begin{cases} x = -3 + 4t, \\ y = 3t, \\ z = 1 + t. \end{cases} \quad 4706. x - y + 2z - 3 = 0.$$

$$4707. \frac{2}{\sqrt{6}}. \quad 4708. \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.$$

$$4709. x - y + 2z - 5 = 0. \quad 4710. \begin{cases} x = 2 - 5t, \\ y = -1 + t, \\ z = 4t. \end{cases}$$

$$4711. \arccos \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}}. \quad 4712. \frac{\sqrt{22}}{3}.$$

$$4714. \arccos (\sin \alpha \sin \beta). \quad 4715. \frac{10}{3}. \quad 4716. \vec{p} = 2\vec{m} + 4\vec{n}. \quad 4719. x = -2 + 4t, y = 6t, z = 3 - 5t.$$

$$4720. \frac{10}{\sqrt{11}}. \quad 4721. x = t, y = 2 - t, z = 1 + t.$$

$$4722. \sin \beta = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{101}}. \quad 4723. \sin \beta = \frac{113}{\sqrt{329}\sqrt{42}}.$$

$$4724. \sqrt{6}. \quad 4725. \sqrt{6}. \quad 4726. \frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad 4727. \frac{\pi}{3},$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}. \quad 4728. \frac{1}{2} \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \sin \varphi.$$

$$4729. \arcsin \frac{22}{3\sqrt{102}}. \quad 4730. \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad 4731. 2x - y +$$

$$+ 7z - 23 = 0. \quad 4732. \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{23}}. \quad 4733. \arccos \frac{5}{\sqrt{861}},$$

$$\frac{20}{\sqrt{209}}. \quad 4734. \frac{26}{\sqrt{389}}. \quad 4735. \frac{113}{\sqrt{1011}}. \quad 4736. \frac{15}{\sqrt{69}}.$$

$$4737. \frac{3}{5\sqrt{2}}. \quad 4738. \frac{a}{\sqrt{10}}, a\sqrt{\frac{2}{35}}.$$

$$4739. x = -2 + 13t, \quad y = -3t, \quad z = 3 - 12t.$$

$$4740. \begin{cases} x = 8t, \\ y = 2t, \\ z = 11. \end{cases} \quad 4741. \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 0, \\ z = -2 + t. \end{cases}$$

$$4742. \frac{8\sqrt{2}}{3}. \quad 4743. AB; \text{ в любом отношении}$$

$$\text{от } 0 \text{ до } \frac{1}{56}, \text{ считая от вершины } A.$$

$$4744. \cos \alpha = \frac{2}{3} \text{ или } \cos \alpha = \frac{1}{6}.$$

§ 9

$$4750. \frac{4\pi}{3}. \quad 4751. \sqrt{5}. \quad 4753. 4. \quad 4754. \frac{2R}{\sqrt{3}};$$

$$R\sqrt{\frac{2}{3}}. \quad 4755. \text{Параллелепипед, сторона основания которого равна 2, боковое ребро равно 1; искомый периметр равен 6.} \quad 4756. \text{Параллелепипед, стороны основания которого равны 1 и } \frac{1}{2}, \text{ боковое ребро равно 1; искомый пери-}$$

$$\text{метр равен 3.} \quad 4757. 324\pi. \quad 4758. \frac{2\pi a^3 \sqrt{3}}{27}.$$

$$4759. 2. \quad 4760. 32(21 - 4\pi). \quad 4761. \text{а) } 30^\circ < \alpha < 170^\circ; \text{ б) } 20^\circ < \alpha < 80^\circ. \quad 4762. \sqrt{\pi^2 r^2 + h^2}.$$

$$4766. \frac{1}{4}P, \frac{3}{8}P, \frac{3}{8}P. \quad 4768. 30^\circ < \angle APC < 70^\circ,$$

$$50^\circ < \angle BPD < 90^\circ. \quad 4769. 1. \quad 4770. 2\sqrt{3}.$$

$$4771. \text{Нет.} \quad 4772. 2\pi R^2, \sqrt{2}. \quad 4773. \frac{8\pi r^3}{3}, 4.$$

$$4774. \frac{a\sqrt{10}}{3}. \quad 4775. \frac{3a}{2}. \quad 4777. \frac{4}{3}R; \frac{2}{3}R\sqrt{2}.$$

$$4778. \frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{4b}. \quad 4779. \frac{64}{81}R^3.$$

$$4780. \frac{a\sqrt{4b^2 - 3a^2}}{8b}. \quad 4781. \text{Три.} \quad 4783. (6 +$$

$$+ 2\sqrt{3})r. \quad 4784. 4V. \quad 4785. \frac{9}{8}\pi a^3. \quad 4786. \frac{6V\sqrt{3}}{\pi}.$$

$$4787. \arccos \frac{\sqrt{12} - 3}{3}. \quad 4789. \frac{1}{2}a^2. \quad 4790. 60^\circ \text{ или}$$

$$36^\circ. \quad 4791. 150^\circ. \quad 4792. \frac{\sqrt{13}}{2}. \quad 4793. 2b \sin 2\alpha,$$

$$\text{если } \alpha \leq 45^\circ; 2b, \text{ если } 45^\circ < \alpha < 90^\circ. \quad 4794. 2:3. \quad 4795. 2:3. \quad 4797. \text{Нет.}$$

$$4798. ah(a + h\sqrt{2}) \leq x \leq ah(a + h). \quad 4799. \text{Если}$$

$$a < \frac{b}{\sqrt{3}}, \text{ то } d = \sqrt{b^2 + \frac{9a^2}{4}}; \text{ если } a > \frac{b}{\sqrt{3}}, \text{ то } d = \sqrt{b^2 + \frac{ab\sqrt{3}}{2} + \frac{3a^2}{4}}.$$

4801. Нет.

$$4802. \frac{(5 + \sqrt{17})r}{2}. 4803. \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \sin \alpha},$$

где $90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$.

$$4804. \frac{a\sqrt{5}}{3}, \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

$$4805. \frac{6a}{\sqrt{23}}, \frac{6a}{5\sqrt{23}}.$$

$$4806. \frac{24V}{125}, \frac{16V}{81}.$$

$$4807. 2\sqrt{\frac{S_1}{\pi}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2}. 4808. \text{ а) } a; \text{ б) } \frac{a\sqrt{15}}{4}.$$

$$4809. \frac{a\sqrt{2}}{3}. 4811. \sqrt{61}. 4812. \text{ На четыре.}$$

$$4813. 40. 4814. 3a. 4815. \arcsin \frac{1}{3} =$$

$$= \operatorname{arccotg}(2\sqrt{2}). 4818. \frac{3\sqrt{87}}{8\sqrt{2}}.$$

$$4820. \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}. 4823. 1:3.$$

$$4824. \frac{a^2}{4}, \frac{7a^2}{32}. 4825. \text{ а) } 0 \leq h \leq \frac{3}{2}, V = \frac{3\pi h}{16};$$

$$\frac{3}{2} \leq h \leq 3, V = \frac{\pi h(6-h)^2}{108}; \text{ б) } \frac{8\pi}{27}. 4826. \frac{\sqrt{2}}{7},$$

$$3:1. 4827. \frac{2(\sqrt{11} - \sqrt{2})}{3}. 4828. \frac{4\sqrt{3}}{27}.$$

$$4829. \frac{2}{3}. 4831. V = 4\sqrt{6} \text{ или } V = \frac{20\sqrt{22}}{9\sqrt{3}};$$

$$a_{\min} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{7} - 1)}{3}. 4834. \sqrt{\frac{51}{2}}. 4835. \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{3}}.$$

$$4836. \frac{1}{4}(3 - \sqrt{5}). 4837. 5. 4838. 8\sqrt{6}.$$

$$4839. \frac{1}{4}(3 - \sqrt{5}). 4840. 2 - \sqrt{2}.$$

Раздел 2

$$4841. \frac{1}{4}l^3 \sin 2\alpha \operatorname{tg}^2 \beta. 4842. 45^\circ. 4843. 288.$$

$$4844. 6. 4845. \arcsin \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{3}}.$$

$$4846. \arccos \frac{11}{4\sqrt{38}}. 4847. \frac{1}{8}a^3\sqrt{2}.$$

$$4848. \frac{1}{6}b^3\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}. 4849. \text{ а) } 13; \text{ б) } 1 \text{ и } 5.$$

$$4850. \frac{12}{13 + \sqrt{41}}. 4851. \frac{12}{10 + \sqrt{22}}. 4852. \text{ Парал-}$$

лелепид, стороны основания которого равны 4 и 2, объем — 32. 4853. $\frac{a^3}{3\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})^3}.$

$$4854. \frac{abc\sqrt{2}}{2}. 4855. \frac{1}{2}a^3 \sin \alpha \sin \beta \cos^2 \beta.$$

$$4856. 18\sqrt{2}. 4857. \frac{5}{4}. 4858. \frac{a(2\sqrt{10} + 3\sqrt{2})}{3};$$

$$\frac{a}{\sqrt{11}}. 4859. \frac{2}{3}l^3 \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2}\right) \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}.$$

$$4860. \frac{1}{6}S\sqrt{2S \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. 4861. \frac{2a^3}{5}.$$

$$4862. \frac{64a^3}{125}. 4863. \frac{5ab\sqrt{2}}{16}. 4864. \frac{2\sqrt{11}}{3}.$$

$$4865. 2. 4866. \frac{\sqrt{353}}{3}. 4867. ab(1 + \sqrt{2}). 4868. 1.$$

$$4869. 8:37. 4870. \frac{a^3}{2}. 4871. a(3l + a).$$

$$4872. \frac{a^3\sqrt{2}}{12}. 4873. 200.$$

4874.

$$r^2 \operatorname{ctg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right) \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi - r^2 \operatorname{ctg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right)} \\ \frac{6 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{2}.$$

$$4875. 3, 5. 4876. 3. 4877. 4. 4878. \frac{9}{2}.$$

$$4879. 30\sqrt{3}. 4880. \frac{n\sqrt{4m^2 - 3n^2}}{8m}.$$

$$4881. \frac{33}{17\sqrt{17}}. 4882. \frac{\sqrt{73} - 1}{2}. 4883. \frac{\sqrt{3}}{24}.$$

$$4884. 2. 4885. 2. 4886. 1.$$

$$4887. \frac{18a^3b^3}{(a^2 - b^2)\sqrt{4b^2 - a^2}}. 4888. 125.$$

$$4889. \frac{13}{108}. 4890. 45^\circ, \frac{2}{\sqrt{3}}. 4891. 2. 4892. 5.$$

$$4893. \frac{16\sqrt{5}}{3}. 4894. \frac{a^3(2b - a)}{\sqrt{2b^2 - a^2}}. 4895. 11:54.$$

$$4896. 175:653. 4897. 13:99. 4898. 109:143.$$

$$4899. 72:53. 4900. \frac{9\sqrt{15}}{2}. 4901. 2:5.$$

4902. $\sqrt{391}$, 16, $4\sqrt{21}$, $4\sqrt{21}$. 4903. а) $\frac{6a}{\sqrt{23}}$;
 б) $\frac{6a}{5\sqrt{23}}$. 4904. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$, $\frac{a}{\sqrt{2}}$. 4905. 96;
 $2 \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3}$. 4906. 1) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; 2) $\frac{a}{\sqrt{5}}$.
 4907. 1) $\frac{a\sqrt{15}}{3}$; 2) $\frac{a\sqrt{10}}{4}$. 4908. $\frac{1}{3}$. 4909. 2 : 5.
 4910. 3 : 2. 4911. 30° .
 4912. $\frac{4}{3} r^3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{-\cos \alpha}$. 4913. а) $l = \sqrt{5}$,
 если $M' \in [A'C']$, $N' \in [B'D']$; б) $l > \frac{5\sqrt{13}}{3}$, если
 $M' \notin [A'C']$, $N' \notin [B'D']$; в) $l > \frac{\sqrt{349}}{3}$, если
 $M' \notin [A'C']$, $N' \in [B'D']$. 4914. $\frac{9}{4} r$.
 4915. $\frac{24}{6 + \sqrt{15}}$. 4916. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. 4917. $\frac{4\sqrt{6 + \sqrt{15}}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$.
 4918. $\frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{3} + \sqrt{7}}$. 4919. $2 \operatorname{arctg} \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$.
 4920. $\sqrt{67}$. 4921. 12. 4922. 3; $\frac{36}{25}$. 4923. $\sqrt{\frac{11}{19}}$.
 4924. 1. 4925. $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{23}{6}}$. 4926. $V = \frac{12}{15}$, $R = \frac{\sqrt{13}}{4}$.
 4927. 1 : 1 : 1, $\frac{\sqrt{2}}{3}$, $V_1 = V_3 = \frac{1}{2\sqrt{6}}$, $V_2 = \frac{2}{\sqrt{6}}$.
 4928. 450. 4929. 12. 4930. 8. 4931. $\frac{40}{3}$.
 4932. 6. 4933. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$. 4934. $PS = QS =$
 $= \sqrt{3} + 1$; $RS = \sqrt{2}$. 4935. $\frac{a^4}{24\sqrt{4b^2 - 2a^2}}$.
 4936. $\sqrt{3,9} a$. 4937. $3\sqrt{2} - 3$. 4938. $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{73}{22}}$.
 4939. 1. 4940. 15 : 61. 4941. 141 : 209.
 4942. 12. 4943. 5, $\frac{13}{12}$, $\frac{\pi}{6}$. 4944. $\frac{117}{2}$,
 $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. 4945. $\frac{12\sqrt{111}}{37}$, $\frac{48\sqrt{15}}{65}$. 4946. $\frac{79}{20}$.
 4947. $\frac{3}{4}$. 4948. $\frac{3a^2 \sqrt{3}}{256}$. 4949. 75° .
 4950. $28\sqrt{3}$. 4951. $72\sqrt{6}$. 4952. $\frac{\sqrt{11}}{12}$,
 $\frac{2(\sqrt{2} - 1)}{3}$. 4953. 4. 4954. $\frac{hp(15 - \sqrt{193})}{8}$.
 4955. $\frac{R(17 - \sqrt{17})}{8h}$. 4956. 73 : 503. 4957. 9.
 4958. $\frac{8\sqrt{6}}{5}$. 4959. $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{2}$. 4960. $\frac{27}{8}$. 4961. 4;
 $\frac{32}{9}$. 4962. $\frac{\sqrt{30}}{4}$, $\frac{\pi\sqrt{30}}{28}$. 4963. $\frac{12\sqrt{111}}{37}$,
 $\frac{48\sqrt{15}}{65}$. 4964. $\frac{5\sqrt{5}}{16}$. 4965. 88. 4966. 84.
 4967. 70π . 4968. $98\pi\sqrt{6}$. 4969. 2100.
 4970. $V = \frac{32}{\sqrt{3}}$ или $V = 28$. 4971. 7.
 4972. 10. 4973. D_1C_1 ; в любом отношении от
 0 до $\frac{1}{59}$, считая от вершины D_1 . 4974. 7.
 4975. $\frac{1}{4}(2\sqrt{5} - \sqrt{2})$. 4976. $\frac{11\sqrt{3} + 3\sqrt{7}}{4}$.
 4977. $17\left(\frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{3\sqrt{5}}{14} + \frac{18}{35}\right)$. 4978. $2\sqrt{3}$.
 4979. $\sqrt{15}$. 4980. 5. 4981. 45, $\frac{\sqrt{165}}{5}$.
 4982. $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3}$. 4983. $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.
 4984. $2\sqrt{6}$. 4985. $41\left(\frac{\sqrt{105}}{55} + \frac{\sqrt{3}}{10} + \frac{3}{22}\right)$.
 4986. $\frac{144\pi}{5}$. 4987. $\frac{32\pi}{3}$. 4988. 9.
 4989. $\frac{1}{4}(S + \sigma k \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - l^2 \sin^2 \alpha}})$.
 4990. $\sqrt{148 - 34\sqrt{3}}$. 4991. $a_{\min} = \frac{2(2\sqrt{5} - \sqrt{2})}{3}$.
 4992. $2 - \sqrt{2}$. 4993. 9. 4994. 1; $\frac{11}{37 + 4\sqrt{6}}$;
 $\frac{11}{37 - 4\sqrt{6}}$. 4995. $V(ACLN) = t$, $t \in [0; 10V]$.
 4996. $V(ACLN) = t$, $t \in \left[0; \frac{2V}{9}\right]$.
 4997. $\frac{48\sqrt{13} - 74\sqrt{3}}{49}$. 4998. $2 - \sqrt{2}$. 4999. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.
 5000. $\frac{a^2 r_2^2 + r_1^2 r_2^2 - 2R^2 r_1^2}{2Rr_1^2}$.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3

Планиметрия

Раздел I	
УЧЕБНЫЕ ЗАДАЧИ	6

1. Вводные задачи	6
2. Признаки равенства треугольников. Признаки и свойства параллельных прямых. Сумма углов треугольника	8
3. Окружность. Диаметр, перпендикулярный хорде. Замечательное свойство окружности. Касательная к окружности. Касающиеся окружности. Описанный четырехугольник	18
4. Параллелограмм. Трапеция. Средняя линия треугольника и трапеции. Теорема Фалеса	30
5. Углы, связанные с окружностью. Вписанный четырехугольник. Вспомогательная окружность	42
6. Теорема Пифагора. Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике	55
7. Подобные треугольники	77
8. Пропорциональные отрезки в круге. .	94
9. Метрические соотношения в треугольнике	102
10. Площадь. Метод площадей	125
11. Координаты. Векторы	168
12. Геометрические преобразования. .	173
13. Геометрические места точек и задачи на построение	184
14. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум	195

Раздел 2	
КОНКУРСНЫЕ ЗАДАЧИ	204

Раздел 3	
ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ	235

Стереометрия

Раздел 1	
УЧЕБНЫЕ ЗАДАЧИ	250

1. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Параллельность в пространстве	250
2. Перпендикуляр к плоскости. Теорема о трех перпендикулярах	258
3. Угол прямой с плоскостью. Угол между плоскостями	267
4. Элементы правильных пирамид . . .	275
5. Сфера. Касательная плоскость к сфере. Касающиеся сферы. Вписанная и описанная сферы	287
6. Круглые тела	297
7. Объем. Площадь поверхности	303
8. Векторы в пространстве. Метод координат	321
9. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум	325
Раздел 2	
КОНКУРСНЫЕ ЗАДАЧИ	333

Приложения

Основные сведения из школьной геометрии	350
Планиметрия	350
Стереометрия	357
Ответы	363
Планиметрия	364
Стереометрия	383

Учебное издание

Шарыгин Игорь Федорович
Гордин Рафаил Калманович

**Сборник задач по геометрии
5000 задач с ответами**

**Учебное пособие
для общеобразовательных учреждений**

Ответственный редактор *Е. С. Гридасова*
Технический редактор *Л. Б. Чуева*
Оформление обложки *Д. С. Иванова*

Подписано в печать 25.01.2001.
Формат 70х100 1/16. Гарнитура «Школьная». Усл. печ. л. 32,25.
Тираж 10 000 экз. Заказ № 3415.

Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953000 — книги, брошюры

Гигиеническое заключение № 77. 99. 14.953.П.12850.7.00.
от 14.07.2000

ООО «Издательство Астрель»
Лицензия ЛР № 066647 от 07.06.99.
143900, РФ, Московская область, г. Балашиха, проспект Ленина, 81.

ООО «Издательство АСТ».
Лицензия ИД № 02694 от 30.08.2000.
674460, РФ, Читинская обл., Агинский р-н, п. Агинское,
ул. Базара Ринчино, 84.

Наши электронные адреса:
WWW.AST.RU
E-mail: astpub@aha.ru

Тверской ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат детской
литературы им. 50-летия СССР Министерства Российской Федерации
по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
170040, г. Тверь, проспект 50-летия Октября, 46.

